

PREFACE.

A SUFFICIENT account has been already given in the preface of my Differential Calculus^s of the gradual development of Differential and Integral Calculus in Europe, and also in whose mind the notion of this science first arose in India. Therefore here I only wish to say that the learned public may not think it to be a mere translation or an abstract of some European book, but as a new treatise on the subject I have shown, as far as possible, all the important theorems together with numerous examples, so that the students may be able to grasp the methods thoroughly and thereby solve problems without the least doubt.

Many new methods are described in different portions of this book, which will be found simpler than those of Europeans. For instance, Mr Todhunter in his Integral Calculus, article 14, for the integration of

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \text{ assumed } \sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x. \text{ The same assumption was described by Mr Williamson. Mr Hymers putting } \sqrt{x^2 \pm a^2} \text{ into the form } (\sqrt{x^2 \pm a^2})(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \text{ deduced the integral}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Professor De Moirgan worked thus

$$\text{Let } \sqrt{x^2 \pm a^2} = y, \text{ then } x^2 \pm a^2 = y^2$$

$$\therefore 2x dx = 2y dy \text{ or } x dx = y dy$$

$$\text{Therefore, } x dx + y dy = y dy + y dx,$$

$$dx = \frac{y(dx + dy)}{x + y}, \text{ by substituting } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm y^2}} =$$

$$\int \frac{y(dx + dy)}{y(x + y)} = \int \frac{dx + dy}{x + y} = \text{Log}(x + y) = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

Professor De Moirgan deduced a second method of $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ also, by employing an imaginary quantity, thus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \text{Sin} \frac{x\sqrt{-1}}{a}$$

But by De Moirer's Theorem

$$\text{Cos } \theta - \text{Sin } \theta \sqrt{-1} = e^{-c} \sqrt{-1}$$

Named Chalana-Kalan, which is dedicated to His Honor Sir Alfred Lyall, K C B, C I D late Lieutenant-Governor of the North-Western Provinces and Chief Commissioner of Oudh, and published by the order of Government in 1886

Extracts from newspapers and journals

$$\text{Let } \sin \theta = \frac{x}{a} \sqrt{-1}, \quad \cos \theta = \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}, \quad -\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}},$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{r \sqrt{-1}}{a} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin^{-1} \frac{r \sqrt{-1}}{a} =$$

$$\text{Log} \left\{ \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}} - \frac{r}{a} (\sqrt{-1}) \right\} = \text{Log} \left(x + \sqrt{r^2 + a^2} \right)$$

where we omit the constant quantity $\text{Log } a$

The learned Pandit makes use of these and other facts to interweave Western with Eastern science, and to lead his country-men to move onward from the basis of truth they already possess. Pandit Sudhakara Divedi has done something to advance scientific knowledge in India, and it is to be hoped that he will be encouraged to redeem his promise and complete a series of work on Analytical Geometry, the Integral Calculus, and Quaternions. The Indian Government would do wisely by circulating this admirable book among the native students at colleges, and especially among private students in the Hindi area of Northern India—*The Overland Mail*, Feb 1, 1887

A REALLY remarkable book on the differential Calculus has just been published at Benares, which ought to be made known to Europe. It is called *Chalana Kalana*, and it is written by Pandit Sudhakara Divedi, of the Sanskrit College, Benares.

It is the first forward step that India has made in independent scientific research in modern times, and the author deserves the highest praise for the masterly manner in which he has dealt with his difficult subject. He has placed it in the power of Indian mathematicians to carry their studies to a very high point in their native Hindi, and he has done this not by merely translating an English mathematical work, but by writing an entirely new treatise, deduced from the discoveries of Descartes, Newton, Leibnitz, Bhaskaracharya and others. The methods of these authorities are transfused into Indian processes, thereby enabling native scholars to follow Western methods and reasoning with confidence and intelligence. He utilises a method of dealing with variables, devised by Bhaskaracharya, which is practically identical with that of the differential calculus, and he cites other correct processes which that admirable old astronomer was able to formulate. In this skilful way the author grafts Western science on to the Indian mind, while, in the general plan of his work, he follows Todhunter's well-known treatise. Originality is likewise shown by the author's simplification of Todhunter's method of treating vanishing fractions, and in the sections he has appended on analytical geometry and conic sections—additions rendered necessary by the fact that no treatise on them exists in the Hindi language.

The Pandit promises a series of works on the higher branches of mathematics, dealing fully with analytical geometry, the integral calculus, and quaternions. He has shown in the present work that he thoroughly understands his subject, and it is to be hoped, for the advancement of science, that he will succeed in directing the acute reasoning powers of Indians to the mathematical and scientific problems of the Western world—*The Academy* Feb 12, 1887 F P

In view of the aptitude for numerical calculation which the Hindus are acknowledged to possess in a marked degree, it seems singular that India, in modern days,

if $f(x) f'(x) = v$,

$$\int \frac{dx - dy}{x - y} = \int \frac{dx}{f(x)} \text{ i.e. } \text{Log } (x - y) = \text{Log } \{ f(x) + y \},$$

$$\begin{aligned} \cdot \quad x - y = f(x) + y \text{ or } y = \frac{x - f(x)}{2} \text{ and } \int \frac{dx}{f(x)} \text{Log } \{ f(x) + y \} \\ = \text{Log } \left\{ \frac{f(x) + v}{2} \right\} = \text{Log } \{ f(x) + v \}, \end{aligned}$$

where the constant $\text{Log } 2$ is omitted

Thus a theorem has been framed that when $f(x) \times f'(x) = v$ then

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \text{Log } \{ f(x) + v \},$$

$$\text{In } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, f(x) = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \text{ and } f(x) f'(x) = x$$

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$= \text{Log } \{ f(x) + x \} = \text{Log } (\sqrt{x^2 \pm a^2} + x), \text{ by my method}$$

In like manner many other new methods have been described

I have added many important theorems with numerous interesting examples regarding the Calculus of Variation and Dynamics of a Particle at the end of this book

It is advisable for the beginners first to read carefully the Differential Calculus, then to begin the Integral Calculus, otherwise it is impossible for them to understand the latter

In conclusion, I earnestly request all learned gentlemen to understand, that the book is not written to show off talent, but to encourage and incite our own countrymen towards the cultivation of Western science. Why should we not improve our own language and advance our own countrymen with the aid of Western science to the attainment of which we are applying our heart and soul?

Now-a-days there being more mutual communication between Europeans and Indians, the Europeans are very much interested in the study of Sanskrit and Hindi. Therefore this treatise will be also useful to those Europeans who are interested in the history and development of Indian Mathematics

I shall consider my labour not to have been in vain, even if my treatise should have no other result than to incite others to criticise my work and to produce more perfect treatises on the subject

किञ्चिन्निवेदनम्

वाराणसेयराजकीयसंस्कृतपरीक्षायां गणितपरीक्षापाठ्यग्रन्थेषु गुरुवर म. म. सुधाकरद्विवेदिनश्चलराशिकलनस्य निर्धारणं जातम् । १९९५ ईशवीये वर्षे राजकीया-
ज्ञया मुद्रितस्यास्य ग्रन्थगत्नस्यालभ्यत्वेन पुनर्मुद्रणस्यावश्यकत्वात् सरस्वतीभवनसिरी-
जाध्यक्षैस्तत्रैवास्य मुद्रणं समाप्तम् । गणितविषये प्रतिदिनं समुन्नतिर्दृश्यते, अतः
१९९५ ईशवीये मुद्रिते पुस्तके या शैली स्वीकृता तत्रेदानीं बहुत्र परिवर्तनं जातम् ।
तथापि परमविद्वद्भिर्महामहोपाध्यायैः स्वीकृतां शैलीं परिरक्ष्यैवास्य मुद्रणं संपादितम् ।
ग्रन्थान्ते प्राचीननवीनपरिपाठ्योर्भेदं ग्रन्थग्रन्थिमोचनं च यथामति प्रदर्शयिष्ये ।
अतिशीघ्रतया संमुद्रितेऽस्मिन् दृष्टिदोषात्कण्टकदोषाद्वा यदि कुत्रापि त्रुटिः संलक्षिता भवे-
त्तत्कृपया क्षमणीयोऽल्लेख्या च कृपालुभिर्विद्वद्भिः । अत्र हृदयतः काशिकराजकीयसंस्कृत
महाविद्यालयाध्यक्षेभ्यः परमविद्यारसिकेभ्यो विद्वद्वरेभ्यो डा० श्रीमङ्गलदेवशास्त्रिवर्येभ्यो
धन्यवादान् वितरामि येषां कृपालवेनैवेदानीं गणितशास्त्रस्याभ्युदयो दृश्यते संस्कृत-
विद्याजगति ।

इति निवेदयते

बलदेवमिश्रः

विषयसूचनिका (Contents)

अध्याय	पृष्ठ
१—चलराशिकलन का अभिप्राय और साधारण चलानयन	१ - ४१
२—अकरणीगत भिन्न संबंध का चलानयन (Rational Fraction)	} ४२ - ८१
३—लघुकरण परम्परा (Formulae of Reduction)	८२ - १०६
४—प्रकीर्णक (Miscellaneous Remarks)	१०७ - १४४

भूमिका ।

चलनकलन (Differential calculus) की भूमिका में विशेष रूप से लिख आये है कि यूरोप में यह विद्या कैसे फैली और भारतवर्ष में सब से पहले किस विद्वान् के ग्रन्थ में चलनकलन (Differential Calculus) और चरराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सिद्धान्त पाये जाते हैं । यहां पर इतना ही आवश्यक समझ कर लिखा जाता है कि विद्वान् लोग यह न समझे कि यह ग्रन्थ किसी अङ्गरेजी ग्रन्थ का अनुवाद और संक्षिप्त रूप है किन्तु जिसमें पढ़ने वालों को सब सिद्धान्तों से भली भांति परिचय हो जाय और उदाहरणों के उत्तर निकालने में संशय न हो इस लिये इसमें थोड़ा बहुत जहां तक हो सका है चरराशिकलन (Integral Calculus) संबन्धी सभी सिद्धान्तों को उदाहरण समेत यूरोप की युक्ति और अपनी कल्पना के बल से नूतन लघु प्रकार से दिखलाया है ।

जैसे $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$ इसकी सिद्धि के लिये टाडहण्टर (Todhunter) साहब और विलियमसन (Williamson) साहब ने $\sqrt{य^2 \pm अ^2} = ल - य$, यह कल्पना किया । हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{य^2 \pm अ^2}$
 $= \frac{(\sqrt{य^2 \pm अ^2})(य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})}{य + \sqrt{य^2 \pm अ^2}}$ ऐसा कर तब चरराशि को सिद्ध किया । प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने पहले $\sqrt{य^2 \pm अ^2} = र$ तब $य^2 \pm अ^2 = र^2$, $२य ताय = २र तार$ वा $यताय = रतार$ इस लिये $यताय + रताय = र तार + र ताय$ $\therefore ताय = \frac{र(तार + ताय)}{य + र}$

इसका उत्थापन देने से

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = \int \frac{र(तार + ताय)}{र(य + र)} = \int \frac{ताय + तार}{य + र} = ला(य + र)$$

प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने असंभव संख्या का भी उत्थापन

दे कर $\int \frac{ताय}{य^2 + अ^2}$ इस का मान इस प्रकार से सिद्ध किया है कि

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{1-(y\sqrt{-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{\text{ताय}\sqrt{-1}}{\sqrt{1-(y\sqrt{-1})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \text{ज्या}^{-1} \frac{y\sqrt{-1}}{1} \text{ परन्तु डेमाइवर के सिद्धान्त से}$$

कोज्याप—ज्याप $\sqrt{-1} = \sin^{-1} y\sqrt{-1}$

वा. $\sin^{-1} y\sqrt{-1} = \text{ला} (\text{कोज्याप—ज्याप } \sqrt{-1})$

कल्पना करो कि

ज्याप = $\frac{y}{\sqrt{-1}}$, कोज्याप = $\sqrt{1 - \frac{y^2}{-1}} = \sqrt{1 - y^2}$, $p = \text{ज्या}^{-1} \frac{y\sqrt{-1}}{1}$

वा, $\frac{1}{\sqrt{-1}} \text{ज्या}^{-1} \frac{y\sqrt{-1}}{1} = \text{ला} \left(\sqrt{1 + \frac{y}{-1}} - \frac{y}{-1} \right)^2$

= ला $(\sqrt{1 - y} + y) - \text{ला } y$ स्थिराङ्क को निकाल देने से पहिले ही के पंसा फल उत्पन्न हुआ ।

ऊपर जितनी युक्तियाँ दिखलाई गई है वे कभी मन में नहीं आ सकतीं जब तक यह ज्ञान न हो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{1-y^2}} = \text{ला}(\sqrt{1-y^2} + y)$

इस लिये यहाँ पर हमने नया यह प्रकार ९० प्रक्रम में लिखा है कि

कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{f(y)} = \text{ला} (f(y) + r)$ जहाँ r , y का कोई फल

है तो तात्कालिक गति से $\frac{\text{ताय}}{f(y)} = \frac{f'(y)\text{ताय} + \text{तार}}{f(y) + r}$. $f(y)\text{ताय} - \text{तार}$
 $= f'(y)\text{ताय} + \text{तार}$ पक्षान्तरानयन और परस्पर भाग

लेने से $\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{f(y)+r} = \frac{\text{ताय}}{f(y)}$ वा: यहाँ यदि $f'(y)f(y) = y$ तो

$$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{f(y)+r} = \frac{\text{ताय}}{f(y)} \therefore \int \frac{\text{ताय}-\text{तार}}{f(y)+r} = \int \frac{\text{ताय}}{f(y)}$$

$$\text{ताय} - \text{तार} = \text{ताय} \cdot f'(y) + r$$

$$\therefore \text{तार} = \text{ताय} \cdot f'(y) - r$$

$$r = \frac{\text{ताय} \cdot f'(y) - r}{f'(y) - 1} \text{ वा: } f'(y) - 1 = \frac{\text{ताय} \cdot f'(y) - r}{r}$$

$$\text{इसलिये } \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला} \left(\frac{\text{य} + \text{फ(य)}}{२} \right) = \text{ला} \{ \text{य} + \text{फ(य)} \} - \text{ला } २$$

ला २ स्थिराङ्क को निकाल देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला} \{ \text{य} + \text{फ(य)} \} \text{ यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हुआ अर्थात् } \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$$

इसका मान अवश्य ला { य + फ(य) } इसके तुल्य होगा यदि फ(य)फ'(य) = य हो तो ।

गणितज्ञों के बीच स्पष्ट है कि मेरा प्रकार एक प्रकार का सिद्धान्त है जो कि नियम से दिखलाता है कि जहाँ जहाँ फ(य)फ'(य) = य ऐसा होगा तहाँ तहाँ ही चलराशि का मान ला { य + फ(य) } यह होगा ।

इसी प्रकार इस ग्रन्थ में बहुत नई युक्तियों दिखलाई गई हैं ।

इस के अन्त में वैशेषिकलन (Calculus of variations) और एक परमाणु की गतिविद्या (Dynamics of a particle) के भी अनेक सिद्धान्त लिखे गये हैं जिनके बल से अनेक चमत्कृत उदाहरण के उत्तर सहज में निकल आते हैं ।

विद्यार्थियों के अभ्यास के लिये इसमें अनेक उदाहरण लिखे गये हैं जिनके अभ्यास से सब सिद्धान्तों से भली भाँति परिचय हो सकता है ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि पहले चलनकलन (Differential Calculus) को अच्छी तरह से सीखकर तब इसको पढ़ें अन्यथा इसका आना अत्यन्त दुर्घट है ।

अन्त में विद्वानों से यह सविनय प्रार्थना है कि मैंने अपनी पाण्डित्य दिखलाने के लिये इस ग्रन्थ को नहीं बनाया है किन्तु अपने देशवासियों के हृदय में यूरोप की विद्या का विशेष उत्साह दिलाने के लिये कि आप लोग कठिन परिश्रम से तन धन मन देकर जो यूरोप की विद्या सीखी उससे क्यो नहीं अपनी भाषा की पुष्टि कर अपने देश भाइयों का उपकार करते ।

भारतवर्ष में यूरोप के लोगो का अब विशेष संबन्ध होने से यूरोप के विद्वान् लोग भी संस्कृत और हिन्दी की ओर विशेष ध्यान देने लगे इसलिये यूरोप के लोगों को भी हिन्दी में यह नया ग्रन्थ यूरोपियन रीति से कहाँ कहाँ विशेष बातें प्रकाश करता है इसका परिचय करने के लिये इस ग्रन्थ को पढ़ने से विशेष उपकार होगा ।

यदि विद्वान् लोग खण्डन की बुद्धि से भी मेरे ग्रन्थ को एक बार आद्यन्त पढ़ेंगे तो भी मैं अपने परिश्रम को सफल समझूंगा ।

दोहा ।

गणित पयोनिधि सविधि मथि काढ़ी सुधा सुहीर ।

भणित सुधाकर नहिँ सुधा वसुधा मधि हे धीर ॥ १ ॥

कँल न परत निज कँलन सो कँलन विना जौ तात ।

कँल न कहहु कँल कँलन हित कँलन देहु येहि प्रात ॥ २ ॥

सुधाकर द्विवेदी ।



-
- १ कल = विश्राम, = आराम = चैन ।
 - २ कलन = करन = कर (हाथ) का बहुवचन ।
 - ३ कलन = कलना = गणना = हिसाब करना ।
 - ४ कल दूसरा आनेवाला दिन ।
 - ५ कल = सुन्दर = बढ़ियाँ ।
 - ६ कलन = चलराशिकलन = यह ग्रन्थ ।
 - ७ कलन = करन = कर्ण = ज्ञान ।

विशेष वर्णन ।

अध्याय १ ।

प्रक्रम ।	पृष्ठ ।
१ । चलनकलन और चलराशिकलन में सम्बन्ध	१
२ । \int_a^k फा(य) ताय इस का अर्थ	१—२
३ । \int_0^y फा(य) ताय इस का रूपान्तर	२—३
४ । \int फा(य) ताय इस को दिखाना कि फ (य) के समान है	३
५ । चलराशिकलन का अभिप्राय	३—५
६ । फ + स्थि इस में स्थिर का मान जानने के लिये प्रकार	५
७ । साधारण गतियों से चलानयन	५—६
८ । चलानयन के स्मरण के लिये श्लोक और दोहे	६—७
८ । अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण	८—१४
९ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$ इस का मान जानना जहां फ(य) फ(य) = य,	१४—१६
१० । खण्डचलानयन (Integration by parts) और उस के उदाहरण	१६—१८
११ । दूसरे प्रकार का खण्डचलानयन	१८
१२ । चलानयन में विशेष, खण्डचलानयन का श्लोक और दोहा, व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण और अभ्यासार्थ प्रश्न	१८—३४

द्वितीयाध्याय २ ।

१३ । अकरणीगत भिन्नसंबन्ध का चलानयन यदि तात्कालिक	
संबन्ध $\frac{अ + कय + खय^२ + \dots + पय^m}{अ + कय + खय^२ + \dots + पय^n}$ ऐसा हो	३५—३६
१४ । यदि संबन्ध का मान $\frac{\text{फ(य)}}{(\text{य-क}_r)^n \text{फा(य)}}$ ऐसा हो तो चलानयन	३६—३७

प्रक्रम ।

पृष्ठ ।

- १५। लाघव से आ_१, का_१ इत्यादि के मान और कुछ उदाहरण . ३७—३९
- १६। यदि फा(य) = (य—क_१)ⁿ फि(य) यदि ऐसा हो तो चलानयन और उदाहरण ... ३९—४१
- १७। हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो तब चलानयन और उदाहरण . ४१—४४
- १८। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव मान त वार हो तो चलानयन और उदाहरण .. ४४—४८
- १९। अकरणगीत भिन्न संबन्ध में विशेष . ४९
- २०। ऊपर के प्रक्रमों से अनेक चलानयन ४९—५०
- २१। $\frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})^m(\text{य}-\text{क})^n}$ इस का सहज में चलानयन .. ५०—५१
- २२। $\frac{\text{य}^{m+1}\text{ताय}}{(\text{अ} + \text{गय})^n}$ का चलानयन जहां म और न अभिन्न हैं . ५१
- २३। $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^n-1}$ का चलानयन जहां न धन और अभिन्न है ५१—५३ ..
- २४। $\int \frac{\text{य}^{m-1}\text{ताय}}{\text{य}^n-1}$ का मान जहां न > म ५३—५५
- २५। $\int \frac{\text{य}^{m-1}\text{ताय}}{\text{य}^n+1}$ का मान जहां न > म ५५
- २६। $\frac{\text{फ(य)}}{\text{य}^n-1}$ का मान खण्डभिन्नों में ५५—५६
- २७। $\frac{\text{फ(य)}}{\text{य}^n+1}$ का मान खण्डभिन्नों में ५६
- २८। उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न ५७—६५

तृतीयाध्याय ३।

- २९। $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य} + \text{अ})^n}$ का लघूकरण (Reduction) ... ६६—६७
- ३०। $\int \frac{\text{य}^m\text{ताय}}{(\text{अ} + \text{य})^n}$ का लघूकरण ६७—६९
- ३१। $\int \text{य}^m\text{त}^n$ ताय का लघूकरण जहां

प्रक्रम ।

पृष्ठ ।

$$t = \text{आय}^{\text{अ}} + \text{काय}^{\text{क}},$$

. ६९—७०

३२ । $\int \text{य}^{\text{म}} \text{त}^{\text{न}} \text{ताय}$ का लघूकरण जहां $t = \text{अ} + \text{कय} + \text{गय}^{\circ}$

. ७०—७१

३३ । ३१वें प्रक्रम में विशेष

.. ७१—७२

३४ । लघूकरण के कुछ उदाहरण

... ७२—७५

३५ । लघूकरण से त्रिकोणमिति संबन्धिफलों का चलानयन,

७५—७७

३६ । ३१वें प्रक्रम में और विशेष

.. ७७—७८

३७ । लघूकरण से सहज में सान्तचलानयन, कुछ उदाहरण,
और अभ्यास के लिये प्रश्न

..
. ७८—८५

चतुर्थाध्याय ४ ।

३८ । $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})$ ताय का मान २ प्र० से तथा श्रेढी के योग से

जानना

... ८६—८७

३९ । $\int \text{फ}(\text{य})$ ताय इस पर से श्रेढी का योग जानना

... ८७—८९

४० । श्रेढी के योग में विशेष

.. ८९—९०

४१ । सान्तचल के कुछ सिद्धान्त

... ९०—९२

४२ । सान्तचल के सिद्धान्त में विशेष

... ९२—९३

४३ । $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})$ ताय के मान में विशेष

९३

४४ । $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})$ ताय के मान में दूसरा विशेष

.. ९३—९४

४५ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^{\text{र}} + \text{य}^{\text{र}}}$ के मान में विशेष

९४—९७

४६ । तीन चलों में न्यूनाधिकता का विचार

.. ९८

४७ । $\text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}(\text{अ} + १) + \text{फ}(\text{अ} + २) + \dots$ इस श्रेढी और

$\int_{\text{अ}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})$ ताय के मान का विचार

... ९८—९९

४८ । लाय पर से कुछ श्रेढी का विचार

.. ९९—१००

४९ । जिस श्रेढी का कोई पद $\frac{१}{\text{फा}(\text{य})}$ हो उस के मान का

प्रक्रम ।

	पृष्ठ
विचार	... १००—१०३
५० । टेलर के सिद्धान्त में न से ऊपर के पदों का योग जानना	१०३—१०४
५१ । एक ही गति का प्रकारान्तर से चलानयन करने में विशेष	१०४—१०५
५२ । सान्तचलज्ञान के लिये वर्नली (Bernoulli) की श्रेढी	१०५—१०६
५३ । वार वार चलज्ञान करने का नियम और सङ्केत	१०६—१०७
५४ । वर्नली के श्रेढी की मूल श्रेढी	१०७
५५ । ५४वें प्रक्रम में विशेष	१०८—१०९
५६ । \int ज्यामय ताय इत्यादि के मान में विशेष	१०९
५७ । क्रिया समेत कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	१०९—१२०

श्रीः ।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

चलराशिकलन ।

श्लोक ।

यल्लीला विमला विलोक्य विपुलप्रालेयबालालये

भूपालेन्द्रललाटलालनकलालेपाङ्कितक्षमातले ।

उल्लङ्घ्य स्वकुलालिकूलकलितां लज्जानदीं मैथिली

यल्लोकाऽऽकुलिता चचाल चलवद्रामाय तस्मै नमः ॥१॥

१ प्र० । जैसे चलनकलन में स्वतन्त्रराशि के फलों पर से उनकी तात्कालिकी गति जानने के लिये अनेक प्रकार का वर्णन है उसी प्रकार से इस चलराशिकलन में फलों की तात्कालिकी गति पर से उन फलों के जानने के लिये अनेक प्रकार लिखे हैं । ऐसी दशा में चलराशिकलन को चलनकलन का उलटा कह सकते हैं ॥

२ । कल्पना करो कि फ(य) का तात्कालिक संबंध फा(य) है तो चलनकलन से $\frac{फ(य+च)-फ(य)}{च} = फा(य) + अ_1$ (यहां जब च = ० =

ताय तो $अ_1 = ०$) इस लिये

$$फ(य+च) - फ(य) = च \{ फा(य) + अ_1 \}$$

$$फ(य+२च) - फ(य+च) = च \{ फा(य+च) + अ_2 \}$$

$$फ(य+३च) - फ(य+२च) = च \{ फा(य+२च) + अ_3 \}$$

...

$$फ(य+nच) - फ \{ य + (n-१)च \} = च [फा \{ य + (n-१)च \} + अ_n]$$

दोनों पक्षों को जोड़ने से

$$फ(य+nच) - फ(य) = च \{ फा(य) + फा(य+च) + \}$$
$$+ च(अ_1 + अ_2 + अ_3 + \dots)$$

इस में य, य+च, य+२च, य+नच, इत्यादि के स्थान में अ, इ, उ, ... क इत्यादि का उत्थापन देने से

फ(क)—फ(अ) = च { फा(अ) + फा(इ) + फा(उ) + ... } + च(अ_१ + अ_२ + ...)
अब यहाँ यदि च = ० अर्थात् ताय के समान कल्पना करो तो

$$फ(क) — फ(अ) = फा(अ) ताय + फा(इ) ताय + फा(उ) ताय + ...$$

ऐसा होगा। यहाँ जब य + नच = क और य = अ, $\frac{क-अ}{न} = च$ इससे यह

सिद्ध होता है कि फल के तात्कालिक संबंध में स्वतन्त्र राशि के स्थान में क्रम से

अ, अ + $\frac{क-अ}{न}$, अ + २ $\frac{क-अ}{न}$, अ + ३ $\frac{क-अ}{न}$, ... क—च, का उत्थापन देकर

अलग अलग मान ले आओ फिर उन मानों को च से गुणकर जोड़ दो, योग में च के स्थान में शून्य अर्थात् ताय का उत्थापन दो तो योग, फल के उन दो मानों के अन्तर के तुल्य होगा जो कि स्वतन्त्र राशि के स्थान में अ, और क के उत्थापन से उत्पन्न होंगे। इस योग को संस्कृत में आढ्य भी कहते हैं इस लिये लाघव से आढ्य के आदि अक्षर को लुप्ताकार के रूप में लिखने से पूर्व योग को

$\int_{अ}^{क} फा(य) ताय$ ऐसे लिख सकते हैं। यहाँ $\int_{अ}^{क} फा(य) ताय$ इस से यह सम-

झना चाहिये कि फा(य)ताय के य के स्थान में अ, अ + ताय, अ + २ ताय, अ + ३ ताय, क—च, का उत्थापन देने से, जितने मान हैं उन सब का योग है। इस लिये प्रकागन्तर से जो योग पहले सिद्ध हुआ है इसे उसके समान करने से

फ(क)—फ(अ) = $\int_{अ}^{क} फा(य)ताय$ ऐसा हुआ। इस में यदि क के स्थान में

य, और अ के स्थान में शून्य का उत्थापन दे तो फ(य)—फ(०) =

$$\int_{०}^{य} फा(य)ताय \quad (१)$$

३। चलनकलन से सिद्ध है कि फ(य) में केवल य चलराशि है और स्थिराङ्क है इस लिये फ(य) में य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से फ(०) यह अवश्य शून्य वा किसी स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इस स्थिराङ्क को यदि स्थि

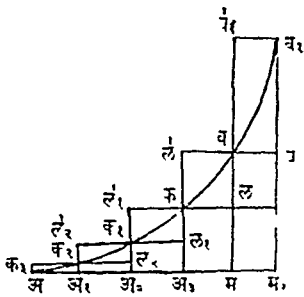
कहो तो दूसरे प्रक्रम का (१) समीकरण $f(y) - स्थि = \int_0^y फा(y) ताय$ ऐसा हुआ इस में पक्षान्तरानयन से $f(y) = \int_0^y फा(y) ताय + स्थि$ इसे लाघव से $f(y) = \int फा(y) ताय + स्थि$ ऐसा लिखते हैं ।

४। जब $f(y) = \int फा(y) ताय + स्थि$ तो दोनों की तात्कालिकी गति निकालने से $ता \{ f(y) \} = फा(y) ताय = ता \{ \int फा(y) ताय + स्थि \} = ता \{ \int फा(y) ताय \} + तास्थि = ता \{ \int फा(y) ताय \}$ इस लिये

$\int फा(y) ताय$ यह अवश्य $f(y)$ के समान हुआ । इस पर से यह भी कह सकते हो कि जिस फल की तात्कालिकी गति $फा(y) ताय$ है वह फल $\int फा(y) ताय$ के समान है वा $\int फा(y) ताय + स्थि$ इसके समान है ।

चलराशिकलन का अभिप्राय ।

५। नीचे लिखे हुए उदाहरण से विद्यार्थियों को स्पष्ट जान पड़ेगा कि चलनकलन और चलराशिकलन में क्या भेद है ।



कल्पना करो कि अकर, कव एक ऐसा वक्र है (जिसमें $अ म = य$, और $व म = र$), कि जिसके भुज, कोटि और चापसे जो वक्र त्रिभुज उत्पन्न होता है उस का क्षेत्रफल सर्वदा इ गुणित भुजघन के समान होता है तो बताओ कि य भुज में कोटि का क्या मान है ? यहाँ इ कोई स्थिर संख्या है ।

कल्पना करो कि $अम = य$, $वम = र$, तो अवम वक्रत्रिभुज का फल प्रश्न के अनुसार $इय^३$ और अव, म, का क्षेत्रफल $इ(य + म म,)^३$ होगा इस लिये इन दोनो का अन्तर, तुल्य हुआ $व, व म म, के$, अधिक हुआ $वव, म, म आयत से$ और अल्प हुआ $व, व, म, म आयत से$ तब

$$इ (य + म म,)^३ - इ.य^३ > वम \times मम, \text{ और } < व, म, \times मम,$$

$$म म, \text{ का भाग दे देने से } व, म, > इ \left\{ \frac{(य + म म,)^३ - य^३}{म म,} \right\} < वम, \text{ इसमें}$$

$$\text{यदि } मम, = 0 \text{ तो } व, म, = वम \text{ और } इ \left\{ \frac{(य + मम,)३ - य^३}{म म,} \right\} = \frac{ता}{ताय} (इय^३)$$

चलनकलन से । इस लिये चलनकलन से यह बात सिद्ध होती है कि फल के तात्कालिकसंबंध के समान r का मान है अर्थात् $r = ३ इ य'$ । इस प्रकार इस प्रश्न का उत्तर चलनकलन से सिद्ध हुआ ।

अब इसी वक्र में यदि ऐसा प्रश्न किया जाय कि एक वक्रक्षेत्र की कोटि गुणित त्रिगुणितभुजवर्ग के तुल्य है तो भुज, कोटि और वक्रकेचाप से जो त्रिभुज होगा उसका क्या क्षेत्रफल होगा? इस का क्षेत्रफल जानने के लिये $अम = य$, कान तुल्य समान विभाग करो और मानो कि उन विभागों का मान क्रम से $अ$, $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$, $अ_४$, $अ_५$, $अ_६$, $अ_७$, $अ_८$, $अ_९$, $अ_{१०}$ है जहाँ $\frac{य}{न} = अ$, $अ_१ = अ_२ = अ_३ = अ_४ = अ_५ = अ_६ = अ_७ = अ_८ = अ_९ = अ_{१०}$, तो वक्रक्षेत्र के लक्षण से $क_१ अ_१ = ३ इ \left(\frac{य}{न}\right)^२$, $क_२ अ_२ = ३ इ \left(\frac{२य}{न}\right)^२$, $व म = ३ इ \left(\frac{नय}{न}\right)^२$, इन सब को $\frac{य}{न}$ से गुण कर जोड़ देने से, $क_१ अ_१$, $क_२ अ_२$, इत्यादि आयतों के क्षेत्रफल का योग

$$\begin{aligned} &= ३ इ \frac{य}{न} \left(\frac{य}{न}\right)^२ + ३ इ \frac{य}{न} \left(\frac{२य}{न}\right)^२ + \dots + ३ इ \frac{य}{न} \left(\frac{नय}{न}\right)^२ \\ &= ३ इ \frac{य^३}{न^३} \left(१ + ४ + ९ + \dots + न^२ \right) = ३ इ \frac{य^३}{न^३} \frac{न}{२} (न + १) \frac{(२न + १)}{३} \\ &= ३ इ \frac{य^३}{२न^३} \left(\frac{२न^३ + ३न^२ + १}{३} \right) = इ \frac{य^३}{२} \left(२ + \frac{३}{न} + \frac{१}{न^३} \right) \end{aligned}$$

इस समीकरण में ज्यों ज्यों $न$ की संख्या बढ़ाते जायेंगे त्यों त्यों $क_१$, $क_२$, $क_३$, $क_४$, $क_५$, $क_६$, $क_७$, $क_८$, $क_९$, $क_{१०}$ इत्यादि वक्र के पास पास आते जायेंगे इस लिये यदि $न = \frac{१}{०}$ तो ठीक वक्रत्रिभुज का फल = $इय^३$ हुआ परन्तु यदि इस का तात्कालिक संबंध निकालो तो $\frac{ता}{ताय} (इय^३) = ३ इ य'$ यह तात्कालिक संबंध वक्र की कोटि के समान होता है इस लिये ४ प्रक्रम से $इय^३ = ३ इ य' ताय$ ऐसा हुआ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि तात्कालिक संबंध को उस वक्र की कोटि कल्पना करें जो कि मूलबिन्दु में होकर जाना हो तो जिस फल का यह तात्कालिक संबंध है वह फल उस वक्र त्रिभुज का फल होगा जो कि भुज, कोटि और वक्र के चाप से बनता है । अब जिस प्रकार से—

$३ इ य' ताय$ पर से $इय^३$ का मान निकले उस प्रकार का जो वर्णन करे उसको चलराशिकलन कहते हैं । इस उदाहरण से स्पष्ट है कि यदि चलनकलन,

और चलराशिकलन का लक्षण लाघव से कहें तो ऐसा होगा कि स्वतन्त्रराशि के फल पर से उसकी तात्कालिकी गति ले आवे उसे चलनकलन और तात्कालिकी गति पर से जो स्वतन्त्रराशि का फल ले आवे उसे चलराशिकलन कहना चाहिये ।

६। चलनकलन से सिद्ध है कि ता { फ(य) + स्थि } = ताफ (य) इस लिये \int ताफ(य) = फ(य), वा फ (य) + स्थि इस से यह समझना चाहिये कि तात्कालिकी गति पर से जो फल निकलता है उसमें यदि स्थिर संख्या जोड़ दें तो जोड़े हुए फल की भी वही तात्कालिकी गति आवेगी परन्तु चलराशिकलन से तात्कालिकी गति पर से जो फल आते हैं वे शुद्ध विना स्थिर के जोड़े आते हैं । विद्यार्थियों को चाहिये कि सर्वत्र जहां तात्कालिकी गति पर से चलराशिकलन के प्रकार से फल सिद्ध हो वहां उस फल में कोई स्थिरसंख्या भी जोड़े जिस स्थिर का मान, फल मे स्वतन्त्रराशि के स्थान में शून्य का वा किसी विशेष संख्या का उत्थापन देने से, ज्ञात हो सकता है । जैसे ५ प्रक्रम के उदाहरण में फल = $\int ३ इय^३$ ताय = फ + स्थि = इय^३ । अब फ + स्थि = इय^३ इस समीकरण मे यदि य = ० तो क्षेत्र देखने से स्पष्ट है कि क्षेत्रफल शून्य होगा

‘ ० + स्थि = इ (०) ’ स्थि = ०, इसी प्रकार स्वतन्त्रराशि मे ऐसी संख्या का उत्थापन देना चाहिये जिसमे फल का मान व्यक्त हो फिर उस मान पर से स्थिराङ्क का ज्ञान शीघ्र हो जायगा ।

७। चलनकलन की विपरीत क्रिया से स्पष्ट है कि,

$$\int \text{स्थिफ(य)ताय} = \text{स्थि} \int \text{फ(य) ताय}$$

$$\int \{ \text{फ(य)ताय} + \text{फा(य) ताय} \} = \int \text{फ(य) ताय} + \int \text{फा(य) ताय}$$

$$\int \text{य}^{\text{म}} \text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{लाय} ।$$

$$\int \text{अ}^{\text{य}} \text{ताय} = \frac{\text{अ}^{\text{य}}}{\text{लाइअ}}, \int \text{इ}^{\text{य}} \text{ताय} = \text{इ}^{\text{य}} ।$$

$$\int \text{ज्यायताय} = -\text{कोज्याय}, \int \text{कोज्यायताय} = \text{ज्याय} ।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्या}^२ \text{य}} = \text{स्प य}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्या}^२ \text{य}} = -\text{कोस्पय} ।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^२ - \text{य}^२}} = \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ वा } = -\text{कोज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^2 + \text{य}^2} = \frac{१}{\text{अ}} \text{स्प}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{वा} = -\frac{१}{\text{अ}} \text{कोस्प}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

८ । इनका स्मरण होने के लिये श्लोक और दोहे ।

श्लोक ।

चलः स्थिरघ्नविहतश्चलोऽन्यो यदि तद्गतिः ।

तुल्याऽऽद्यचलगत्या स्यात् स्थिरघ्नहतया तथा ॥ १ ॥

यद्गतिर्भुक्तियोगेन समा स्याद्यत्र तन्मितिः ।

भुक्त्युत्थचलयोगेन समाना चलकोविद् ॥ २ ॥

सैकघातश्चलस्यातः सैकतद्घातसंख्यया ।

चलोऽन्यो यद्गती राशिघातराशिजवाहतिः ॥ ३ ॥

यस्य भुक्तौ हरगतिर्लवमानं भवेद्धि सः ।

हरस्य लघुरिक्थेन समानो भवति ध्रुवम् ॥ ४ ॥

चलराशिसमः स्थिराङ्कघातः

प्रथमस्तद्धतराशिभुक्तिरस्ति ।

अपरस्य गतिस्तदा स्थिराङ्क—

लघुरिक्थात् इहाऽऽद्य एव चान्यः ॥ ५ ॥

चलज्या गुणिता भुक्तिर्यद्गतिस्तन्मितिर्भवेत् ।

चलकोटिज्या तुल्या क्षयगा चलयुक्तितः ॥ ६ ॥

चलकोटिज्या निघ्नी भुक्तिर्गस्य गतिर्भवेत् ।

चलजीवासमानं तन्मानं ह्येयं मनीषिभिः ॥ ७ ॥

चलकोटिज्याकावर्गभक्ता भुक्तिर्हि यद्गतिः ।

चलजस्पर्शरेखैव तन्मानं स्याच्चलोक्तिः ॥ ८ ॥

चलज्याकृतिसंभक्ता भुक्तिर्गस्य गतिर्भवेत् ।

तन्मानं चलजा कोटिस्पर्शरेखा क्षयात्मिका ॥ ९ ॥

राशिवर्गोनितस्थैर्यवर्गमूलहता गतिः ।

यद्गतिस्तन्मितिः स्थैर्यभक्तराशेर्धनुर्भवेत् ॥ १० ॥

स्थिरचञ्चलवर्गयोगभक्ता

गतिरस्तीह गतिर्यद्वान्यराशेः ।

स्थिरभक्तचलस्य यद्गनुर्भा—

शकलैस्तत्स्थिरभक्तमन्यमानम् ॥ ११ ॥

दोहा ।

जौं चल थिर से गुणित वा भाजित हो चल आन ।
 आदि गती स्थिरगुणित वा भाजित ता गति जान ॥ १ ॥
 कइ गति के युति तुल्य हो जाकी गति ता मान ।
 सब गति के चल योगसम जानहु सकल सुजान ॥ २ ॥
 राशिघातहत राशिगति जाकी गति सो जान ।
 सैकघात हत राशि को सैकघातसम मान ॥ ३ ॥
 जाकी गति में हर गती अंशमान जौं होय ।
 ई अघार लघुरिक्थ जो हर को है वह सोय ॥ ४ ॥

चौपाई ।

चलराशी सम थिर को घाता । आदि सो गुणित राशिगति ताता ॥
 जाकी गति सो आदि प्रमाना । थिर लघुरिक्थ विभाजित जाना ॥ ५ ॥

दोहा ।

चलजीवा से गुणित चलगति जाकी गति होय ।
 चलकोटिज्या के करहु ऋण तुम जानहु सोय ॥ ६ ॥
 चलकोटिज्यागुणित चलगति जाकी गति होय ।
 चलजीवा के तुल्य तेहि कहहु युक्ति जिय जोय ॥ ७ ॥
 चलकोटिज्यावर्गहत चलगति जाकी भुक्ति ।
 स्पर्शरेखिका चलहि को ताहि कहहु लखि सूक्ति ॥ ८ ॥
 चलजीवाकृतिभक्त जो चलगति जाकी भुक्ति ।
 चल को कोटिस्पर्श ऋण रेखा कहु लखि युक्ति ॥ ९ ॥
 स्थिरकृति में चलवर्ग ऋण तेहि पदहत गति होय ।
 जाकी स्थिरहत चलहि को चाप कहहु तुम सोय ॥ १० ॥

चौपाई ।

स्थिरचञ्चलकृतियोगविभाजित ।

चलगति जाकी गति सो साधित ॥

स्थिरहत चलको चाप वनावहु ।

स्पर्शखण्ड से सो स्थिर भाजहु ॥ ११ ॥

८ । इस प्रक्रम में पूर्व प्रकारों का अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

उदाहरण ।

(१) $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{य}}$ इस गति की चलराशि ले आवो ? ।

यहाँ $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{य}} = \text{ताय } य^{-\frac{१}{२}}$ । $\int \text{ताय } य^{-\frac{१}{२}} = २य^{\frac{१}{२}}$, (३ सूत्र से)

२। ताय $(क + अ य^n)^m य^g$, इस की चलराशि ले आवो ? ।

यहाँ द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$(क + अ य^n)^m = क^m + मक^{m-१}(अय^n) + \frac{म(म-१)}{२}क^{m-२}(अय^n)^२ +$$

$$\cdot \text{ताय}(क + अ.य^n)^m य^g = क^m य^g \text{ताय} + अमक^{m-१} य^{n+g} \text{ताय}$$

$$+ अ \frac{म(म-१)}{२} क^{m-२} य^{n+g} \text{ताय} + \dots$$

$$\therefore \int \text{ताय}(क + अ य^n)^m य^g = \int क^m य^g \text{ताय} + \int अमक^{m-१} य^{n+g} \text{ताय} + \dots$$

$$= क^m \int य^g \text{ताय} + अ म क^{m-१} \int य^{n+g} \text{ताय}$$

$$+ अ \frac{म(म-१)}{२} क^{m-२} \int य^{n+g} \text{ताय} + \dots \quad (२ सूत्र से)$$

$$= \frac{क^m}{ग+१} य^{g+१} + \frac{अ म क^{m-१}}{न+ग+१} य^{n+ग+१} +$$

$$\frac{अ^२ म(म-१) क^{m-२}}{(२न+ग+१) \cdot २} य^{n+ग+२} + \dots \quad (३ सूत्र से)$$

३। $\frac{य^m \text{ताय}}{(अ + क य)^n}$ इस की चलराशि बतावो ? यहाँ म और न दोनो अभिन्न और धन संख्या है ।

यहाँ कल्पना करो कि $अ + क य = ल$ $य = \frac{ल-अ}{क}$, और $\text{ताय} = \frac{\text{ताल}}{क}$ ।

$$\text{इन का उत्थापन देने से } \frac{य^m \text{ताय}}{(अ + क य)^n} = \frac{य^m \text{ताल}}{क ल^n} = \frac{(ल-अ)^m \text{ताल}}{क^{m+१} ल^n}$$

$$\therefore \int \frac{य^m \text{ताय}}{(अ + क य)^n} = \int \frac{(ल-अ)^m \text{ताल}}{क^{m+१} ल^n} = \frac{१}{क^{m+१}} \int \frac{(ल-अ)^m \text{ताल}}{ल^n}$$

अब इस पर से (द्वियुक्पदसिद्धान्त से) चलराशि जान सकते हो ।

४। कोज्या'य ताय, ज्या'यताय इन की चलराशि क्या है ?

यहाँ त्रिकोणमिति से कोज्या'य = $\frac{१ + \text{कोज्या } २ य}{२}$, इस लिये

$$\text{कोज्या}^2 \text{ ताय} = \frac{१ + \text{कोज्या } २ \text{ य}}{२} \text{ ताय, यहाँ यदि } २ \text{ य} = २, \text{ तो ताय} = \frac{\text{तार}}{२}$$

$$\therefore \int \text{कोज्या}^2 \text{ ताय} = \int \left(\frac{१ + \text{कोज्या } २ \text{ य}}{२} \text{ ताय} \right) = \int \left(\frac{\text{तार}}{४} + \frac{\text{कोज्या } २ \text{ य}}{४} \text{ तार} \right)$$

$$= \frac{१}{४} \int \text{तार} + \frac{१}{४} \int \text{कोज्या } २ \text{ य तार} = \frac{२ + \text{ज्या } २ \text{ य}}{४} = \frac{२ \text{ य} + \text{ज्या } २ \text{ य}}{४} \text{ (७ सूत्र से)}$$

इसी प्रकार

$$\text{ज्या}^2 \text{ ताय} = \frac{१ - \text{कोज्या } २ \text{ य}}{२} \text{ ताय} \therefore \int \text{ज्या}^2 \text{ ताय} = \frac{२ \text{ य} - \text{ज्या } २ \text{ य}}{४}$$

५। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{२ \text{ अ य} - \text{य}^2}}$ इस की चलराशि क्या है ?

कल्पना करो कि $\text{य} = \text{अ} - \text{ल}$ \therefore ताय = -ताल,

और $\sqrt{२ \text{ अ य} - \text{य}^2} = \sqrt{२ \text{ अ} (\text{अ} - \text{ल}) - (\text{अ} - \text{ल})^2} = \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}$

$$\therefore \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{२ \text{ अ य} - \text{य}^2}} = \int -\frac{\text{ताल}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ}}$$

$$= \text{उज्या}^{-1} \frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ (१० सूत्र से)}$$

६। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}}$ इस की चलसंख्या बतावो ?

कल्पना करो कि $\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} = \text{ल} - \text{य}$ $\therefore \text{य}^2 - २ \text{ य ल} + \text{ल}^2 = \text{य}^2 + \text{अ}^2$

$$\text{और य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{२ \text{ ल}} \therefore \text{ताय} = \frac{४ \text{ ल}^2 \text{ ताल} - २ \text{ ताल} (\text{ल}^2 - \text{अ}^2)}{४ \text{ ल}^2}$$

$$= \frac{२ \text{ ताल}^2 (\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{४ \text{ ल}^2} = \frac{\text{ताल} (\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{२ \text{ ल}^2}, \text{ और जब य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{२ \text{ ल}}$$

$$\therefore \text{ल} - \text{य} = \text{ल} - \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{२ \text{ ल}} = \frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{२ \text{ ल}} \text{ इनका उत्थापन देने से}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{ताल} (\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{२ \text{ ल}^2} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}} = \frac{\text{ला ल}}{\text{ल}^2 + \text{अ}^2} = \frac{\text{ला}}{\text{ल}}$$

$$= \text{ला} (\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} + \text{य}) \text{ (४ सूत्र से)}$$

७। $\frac{\text{ताय}}{\text{कोज्या } \text{य}}$ इस की चलसंख्या बतावो ?

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}} &= \frac{\text{कोज्यायताय}}{\text{कोज्याय}} = \int \frac{\text{कोज्यायताय}}{1-\text{ज्याय}} = \int \frac{\text{ताल}}{1-\text{ल}} \text{ (यदि ल = ज्याय)} \\ &= \int \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ताल}}{1-\text{ल}} + \frac{\text{ताल}}{1+\text{ल}} \right] = \frac{1}{2} \left[\int \frac{\text{ताल}}{1+\text{ल}} - \int \frac{-\text{ताल}}{1-\text{ल}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{ला} (1+\text{ल}) - \text{ला} (1-\text{ल}) \right\} = \text{ला} \sqrt{\frac{1+\text{ज्याय}}{1-\text{ज्याय}}} \\ &= \text{लाकोस्प} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{य}{2} \right] \end{aligned}$$

इसी प्रकार $\int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्याय}} = \text{लास्प} \frac{य}{2}$,

८। $\frac{\text{ताय}}{1-\text{य}}$ इसकी चलसंख्या क्या है ?

$$\frac{\text{ताय}}{1-\text{य}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ताय}}{1-\text{य}} + \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}} \right] \therefore \text{७ उदाहरण के ऐसा}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{1-\text{य}} = \frac{1}{2} \text{ला} \frac{1+\text{य}}{1-\text{य}}, \text{ इस में यदि य} = \text{य}\sqrt{-1}$$

$$\text{तो } \int \frac{\text{ताय}\sqrt{-1}}{1+\text{य}} = \frac{1}{2} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}} \text{ वा } \int \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$\text{परन्तु ११ सूत्र से } \int \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}} = \text{स्प}^{-1}\text{य}$$

$$\therefore \text{स्प}^{-1}\text{य} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$\text{वा, स्प}^{-1}\text{य} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}} + \text{स्थि}$$

यहा कल्पना करो कि य = स्प प . \therefore स्प⁻¹य = प

$$\text{इस लिये प} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}} + \text{स्थि, यदि प} = 0, \text{ तो य} = 0. \therefore \text{स्थि} = 0.$$

$$\text{तब प} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ला} \frac{1+\text{य}\sqrt{-1}}{1-\text{य}\sqrt{-1}}$$

$$\text{वा इ } 2\text{प}\sqrt{-1} = \frac{1+\text{स्प प}\sqrt{-1}}{1-\text{स्पप}\sqrt{-1}} = \frac{\text{कोज्या प} + \text{ज्या प}\sqrt{-1}}{\text{कोज्या प} - \text{ज्या प}\sqrt{-1}}$$

$$= \left(\text{कोज्या } \phi + \text{ज्या } \phi \sqrt{-1} \right)^2$$

$$\therefore \text{इ } \phi \sqrt{-1} = \text{कोज्या } \phi + \text{ज्या } \phi \sqrt{-1}, \text{ वा इ } -\phi \sqrt{-1}$$

= कोज्या ϕ - ज्या $\phi \sqrt{-1}$ (चलनकलन में डेमाइवर का सिद्धान्त देखो)

९। $\frac{\text{ताय}}{\text{य} \sqrt{2 \text{अ य} - \text{अ}^2}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

कल्पना करो कि $2 \text{अ य} - \text{अ}^2 = \text{ल}^2 \therefore \frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{2 \text{अ}} = \text{य}$

और ताय = $\frac{2 \text{लताल}}{2 \text{अ}} = \frac{\text{लताल}}{\text{अ}}$

इस लिये $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य} \sqrt{2 \text{अ य} - \text{अ}^2}} = \int \frac{\frac{\text{लताल}}{\text{अ}}}{\frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{2 \text{अ}}} = \int \frac{2 \text{लताल}}{\text{अ}^2 + \text{ल}^2}$

= $2 \int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}^2 + \text{ल}^2} = \frac{2}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1} \frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \frac{2}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1} \sqrt{\frac{2 \text{अ य} - \text{अ}^2}{\text{अ}}}$ (११ सूत्र से)

१०। $\frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{क य}^2}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{क य}^2} = \frac{1}{\text{अ}} \int \frac{\text{ताय}}{1 + \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{य}^2}$, यहाँ यदि $\text{ल} = \text{य} \sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}$ तो $\text{य} = \frac{\text{ल}}{\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}}$

ताय = ताल $\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}$

इस लिये $\frac{1}{\text{अ}} \int \frac{\text{ताय}}{1 + \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{य}^2} = \frac{1}{\text{अ}} \int \frac{\text{ताल} \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}}{1 + \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{य}^2} = \frac{\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}}{\text{अ} \sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}}}} \int \frac{\text{ताल}}{1 + \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{य}^2} =$

$\frac{1}{\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}} \text{स्प}^{-1} \frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}} \text{स्प}^{-1} \left(\text{य} \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}} \right)$

११। $\frac{\text{ताय.य}^2}{1 + \text{य}^2}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\frac{\text{य}^2}{1 + \text{य}^2} = \text{य}^2 - \text{य} + \frac{\text{य}}{1 + \text{य}^2}$

इस लिये $\int \frac{\text{य}^2 \text{ताय}}{1 + \text{य}^2} = \int \text{य}^2 \text{ताय} - \int \text{यताय} + \int \frac{\text{यताय}}{1 + \text{य}^2}$

$$= \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \log(1+y)$$

१२। (अ + क) ताय
अ य^३ + क य^२ इस की चलसंख्या क्या है ?

कल्पना करो कि य = $\frac{1}{r}$ ∴ ताय = $-\frac{\text{तार}}{r^2}$

इस लिये $\frac{(अ + क)ताय}{अ य^३ + क य^२} = -\frac{(अ + क)तार}{r^2 y^2 (अ य^३ + क)} = -\frac{(अ + क) तार}{(अ य^३ + क)}$

$$= -\frac{(अ + क)तार}{\frac{अ + क r^2}{r^2}} = -\frac{(अ + क)r^2 तार}{अ + क r^2}$$

$$\therefore \int \frac{ताय(अ + क)}{अ य^३ + क य^२} = -(अ + क) \int \frac{r^2 तार}{अ + क r^2} = -\frac{अ + क}{क} \int \frac{r^2 तार}{\frac{अ}{क} + r^2}$$

$$= -\frac{अ + क}{क} \int \left(\text{तार} - \frac{\frac{अ}{क} \text{तार}}{\frac{अ}{क} + r^2} \right) = -\frac{अ + क}{क} \left(\int \text{तार} - \frac{अ}{क} \int \frac{\text{तार}}{\frac{अ}{क} + r^2} \right)$$

$$= -\frac{अ + क}{क} \left\{ r - \frac{अ}{क} \sqrt{\frac{क}{अ}} \text{स्प}^{-1} \left(\frac{r \sqrt{क}}{\sqrt{अ}} \right) \right\} = -\frac{अ + क}{क} \left(r - \sqrt{\frac{अ}{क}} \text{स्प}^{-1} \left(r \sqrt{\frac{क}{अ}} \right) \right)$$

$$= -\frac{अ + क}{क} \left(\frac{१}{य} - \sqrt{\frac{अ}{क}} \text{स्प}^{-1} \left(\frac{\sqrt{क}}{य \sqrt{अ}} \right) \right)$$

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) $\int \frac{\text{ज्यायताय}}{\text{कोज्याय}}$, उ० लांछेय ।

(२) $\int \frac{\text{ताय}}{अय + क \sqrt{य}}$. . . उ० $\frac{२}{अ} \log(अ \sqrt{य} + क)$

(३) $\int \text{ताय} (\sqrt{य + \sqrt[३]{य}}) \dots \dots$ उ० $\frac{३}{२} \frac{य^{\frac{२}{३}}}{३} + \frac{३}{४} \frac{य^{\frac{४}{३}}}{४}$

(४) $\int \text{ताय}(य^{-३} + य^{-२} + अ)$ उ० $\frac{२अ य^३ + २य^२ ला य - १}{२य}$

(५) $\int \frac{\text{ताय}}{अ^2 - य^2}$. उ०, $\frac{१}{२अ}$ ला $\frac{अ + य}{अ - य}$,

(६) $\int \frac{\text{ताय.क}}{यलाय}$ उ०, क ला (लाय)

(७) $\int \text{कोस्पयताय}$.. उ० लाज्याय

(८) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{४ - य^2}}$. . उ० ज्या^{-१} $\frac{य}{२}$

(९) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{८ - २य - य^2}}$. . उ० ज्या^{-१} $\frac{१ + य}{२}$

(१०) $\int \frac{\text{ताय}}{१० + २य + य^२}$.. . उ०, $\frac{१}{३}$ स्प^{-१} $\frac{य + १}{३}$

(११) $\int \frac{\text{ताय य}^०}{य^० + ४}$ उ०, $\frac{य^३}{६} - य^० + ८य^० - ३२ला (य^० + ४)$

(१२) $\int \frac{५ \text{ ताय}}{४य^० + य^०}$. उ० $५(२स्प^{-१} \frac{१}{२य} - \frac{१}{य})$

(१३) $\int \frac{\text{ताय}}{अ + क य}$ उ० ला (क $\sqrt{अ + क य}$)

(१४) $\int \frac{(१०य^० + ९य^०) \text{ ताय}}{य^१० + य^०)^{\frac{५}{६}}}$ उ० $\frac{७}{३}(य^१० + य^०)^{\frac{३}{६}}$

(१५) $\int \frac{\left\{ \frac{न.य^{न-१} + (न-१)य^{न-२}}{न} \right\} \text{ताय}}{\frac{अ}{(य^n + य^{न-१})क}}$ उ० $\frac{क(य^n + य^{न-१}) - क-अ}{न(क-अ)}$

(१६) $\int \frac{(\sqrt{य^२ + ९} + य)^२ \text{ताय}}{\sqrt{य^२ + ९}}$, उ० $\frac{१}{२}(य + \sqrt{य^२ + ९})^२$

(१७) $\int \frac{२य \text{ ताय}}{(य^२ + १)^०}$. उ०, $-\frac{१}{य^२ + १}$

(१८) $\int \frac{क.य^० \text{ ताय}}{य^० + १}$. उ०, $क \left(\frac{य^०}{४} - \frac{य^०}{२} + ल\sqrt{य^२ + १} \right)$

(१९) $\int (अ + य^०) (अ + य) \text{ ताय}$. उ०, $अ^२य + \frac{अय^२}{२} + \frac{अय^३}{३} + \frac{य^४}{४}$

$$(20) \int (x^2 + y^2)(x + y) y \text{ ताय, } \text{उ०, } \frac{x^3 y^2}{2} + \frac{x^2 y^3}{3} + \frac{x y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$$

$$(21) \int \frac{(1+y)^2(1-y) \text{ ताय}}{y^2}, \dots \text{उ०, लाय } -y - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{y}$$

$$(22) \int \frac{y^2 \sqrt{y} \text{ ताय}}{1+y}, \text{ उ०, } \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}} - 2 \text{ स्प }^{-1} y^{\frac{3}{2}}$$

$$(23) \int (x + k y^n)^m \text{ न क य }^{n-1} \text{ ताय, उ०, } \frac{(x + k y^n)^{m+1}}{m+1}$$

उदाहरण

(२४) एक चोर अ स्थान से एक हीरे को चुरा कर भागा । जब अ स्थान से पौन मील दूर जा चुका तब उस को पकड़ने के लिये एक सिपाही अ स्थान से दौड़ा इस सिपाही के प्रतिक्षण की गति चोर की गति से अ स्थान से चोर की दूरी जो हो उतनी गुणित है तो बतावो कि अ स्थान से कितनी दूर पर चोर पकड़ा गया ? । उत्तर, $2\frac{1}{2}$ मील ।

(२५) एक हीरे के मोल की वाढ़ एक राजा के आमदनी की वाढ़ से आमदनी के वर्ग को गुणने से जो हो सो होती है तो बताओ कि जब राजा की आमदनी तीन लाख हो तो हीरे का क्या मोल होगा ?

उत्तर, 9×10^4 हीरे का मोल ।

९। कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(y)} = \text{ला} \{ \text{फ}(y) + r \}$ जहाँ r , y का कोई फल

है तो तात्कालिक गति बनाने से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{फ}(y)} = \frac{\text{फ}'(y)\text{ताय} + \text{तार}}{\text{फ}(y) + r} \cdot \text{फ}(y)\text{ताय} + \text{ताय } r$$

= $\text{फ}'(y)\text{ताय फ}(y) + \text{तारफ}(y)$, पक्षान्तरानयन से और परस्पर भाग देने से

$$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{\text{फ}(y) \text{ फ}(y)-r} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(y)} \text{ यहाँ यदि } \text{फ}'(y)\text{फ}(y) = y, \text{ तो}$$

$$\frac{\text{ताय}-\text{तार}}{y-r} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(y)} \cdot \int \frac{\text{ताय}-\text{तार}}{y-r} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(y)}$$

$$\therefore \text{ला}(y-r) = \text{ला} \{ \text{फ}(y) + r \} \cdot y-r = \text{फ}(y) + r$$

$$\text{तब } r = \frac{y-\text{फ}(y)}{2} \text{ और } \text{फ}(y) + r = \frac{y+\text{फ}(y)}{2}$$

$$\text{इस लिये } \int \frac{ताय}{फ(य)} = ला \left(\frac{य + फ(य)}{२} \right) = ला (य + फ(य)) - ला$$

$$\text{बिगड़ को छोड़ देने से } \int \frac{ताय}{फ(य)} = ला (य + फ(य))$$

$$\text{जैसे (१) उदाहरण, } \int \frac{ताय}{य} \text{ यहाँ } फ(य) = य, \text{ और } फ'(य) = १$$

$$\therefore फ(य) फ'(य) = य, \text{ इस लिये } \int \frac{ताय}{य} = ला (य + फ(य)) = ला २ य$$

$$= ला य + ला = \text{बिगड़ को निवार्य लेने से } \int \frac{ताय}{य} = ला य।$$

ऐसा ही पहले भी सिद्ध है ।

$$(२) \text{ उदाहरण, } \int \frac{ताय}{\sqrt{य \pm अ}} \text{ यहाँ } फ(य) = \sqrt{य \pm अ}$$

$$\text{इस लिये } फ'(य) = \frac{य}{\sqrt{य \pm अ}} \text{ और } फ(य) फ'(य) = य, \text{ इस लिये}$$

$$\text{ऊपर की युक्ति से } \int \frac{ताय}{\sqrt{य \pm अ}} = ला (य + \sqrt{य \pm अ}) \text{ यही पहले भी}$$

सिद्ध हुआ है ।

$$(३) \text{ उदाहरण, } \int \frac{ताय}{\sqrt{(य \pm २अ) - अ}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{(य \pm अ) - अ}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{र - अ}}$$

$$\text{यदि } र = य \pm अ,$$

$$\text{तब दूसरे उदाहरण से } \int \frac{ताय}{\sqrt{र - अ}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{य \pm २अ}}$$

$$= ला(र + \sqrt{र - अ}) = ला (य \pm अ + \sqrt{य \pm २अ})$$

(२) उदाहरण की सिद्धि के लिये टाउहण्टर (Todhunter) और विलियमसन (Williamson) साहब ने $\sqrt{य \pm अ} = ल - य$, यह कल्पना किया ।

$$\text{हाइमर्स (Hymers) ने } \sqrt{य \pm अ} = \frac{(\sqrt{य \pm अ})(य + \sqrt{य \pm अ})}{य + \sqrt{य \pm अ}}$$

ऐसा कर तब चलाशि सिद्ध किया, डेमोर्गन (Demorgan) ने

$$\text{पहले } \sqrt{य \pm अ} = र \text{ तब } य \pm अ = र^2 \therefore र^2 - य = र^2 - अ \text{ और}$$

$$\text{वा, यताय} = र^2 - अ \text{ इस लिये य.ताय} + र.ताय = र^2 - अ + र.ताय$$

∴ ताय = $\frac{र(ताय + तार)}{य + र}$ इस का उत्थापन देने से

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = \int \frac{र(ताय + तार)}{र(य + र)} = \int \frac{ताय + तार}{य + र} = ला(य + र)$$

$$= ला(य + \sqrt{य^2 \pm अ^2}) \text{ ऐसा सिद्ध किया,}$$

डिमार्गन साहव ने असंभव संख्या का भी उत्थापन देकर चलराशि ले आने के लिये एक दूसरी रीति लिखी है परन्तु ये सब कल्पनाये शीघ्र मन में नहीं आ सकती जब तक कि पहले से यह ज्ञान न हो कि

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = ला(य + \sqrt{य^2 \pm अ^2}) \text{ ऐसा होता है इस लिये हमारी समझ}$$

में इस प्रक्रम के आदि में हमने जो सिद्धान्त लिखा है उस से बहुत ही सहज में चलराशि सिद्ध हो जाता है ।

१० । चलनकलन से सिद्ध है कि ता (च + ज) = ताच ज + च ताज

$$\cdot \int ता (च \times ज) = \int ताच ज + \int च ताज$$

∴ $\int ताचज = च ज - \int च ताज$ इसे खण्डचलानयन कहते हैं इस पर से अनेक उदाहरण की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है जैसे ।

(१) उदाहरण, $\int ज्या^{-१}य ताय$ यहां यदि ताय = ताच और ज्या^{-१}य = ज

$$\text{तो च} = य, \text{ और ताज} = \frac{ताय}{\sqrt{१-य^2}},$$

इस लिये $\int ज्या^{-१}य ताय = च ज - \int च ताज$

$$= य ज्या^{-१}य - \int \frac{यताय}{\sqrt{१-य^2}} = य ज्या^{-१}य + \sqrt{१-य^2}$$

(२) उदाहरण, $\int ताय \sqrt{य^2 \pm अ^2}$ यहां ताय = ताच • य = च

$$\text{और } \sqrt{य^2 \pm अ^2} = ज \cdot \frac{य ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = ताज,$$

$$\text{इस लिये, } \int ताय \sqrt{य^2 \pm अ^2} = य \sqrt{य^2 \pm अ^2} - \int \frac{य ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$$

$$= य \sqrt{य^2 \pm अ^2} - \int \frac{ताय (य \pm अ \mp अ)}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$$

$$= y\sqrt{y^2 \pm a^2} - \int \frac{y \sqrt{y^2 \pm a^2} \pm a^2}{\sqrt{y^2 \pm a^2}} dy$$

पक्षान्तरानयन से और ६ प्रक्रम से

$$2 \int \frac{y \sqrt{y^2 \pm a^2}}{y^2 \pm a^2} dy = y \sqrt{y^2 \pm a^2} \pm a^2 \log (y + \sqrt{y^2 \pm a^2})$$

$$\therefore \int \frac{y \sqrt{y^2 \pm a^2}}{y^2 \pm a^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{y^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log (y + \sqrt{y^2 \pm a^2})$$

(३) उदाहरण, \int यकोज्याअय ताय यहाँ ताच = कोज्याअय ताय

$$\therefore च = \frac{\text{ज्याअय}}{अ} \text{ और } ज = य \therefore \text{ताज} = \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये, } \int \text{यकोज्याअय ताय} = \frac{य \text{ ज्याअय}}{अ} - \int \frac{\text{ज्याअय} \cdot \text{ताय}}{अ}$$

$$= \frac{\text{यज्याअय}}{अ} + \frac{\text{कोज्याअय}}{अ^2}$$

यदि \int यⁿकोज्याअयताय तो पूर्व युक्ति से

$$\int \text{य}^n \text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{य}^n \text{ ज्याअय}}{अ} - \frac{2}{अ} \int \text{यज्याअयताय}$$

$$= \frac{\text{य}^n \text{ ज्याअय}}{अ} + \frac{2}{अ} \left(\frac{\text{यकोज्याअय}}{अ} - \frac{\text{ज्याअय}}{अ^2} \right)$$

$$= \frac{\text{य}^n \text{ ज्याअय}}{अ} = \frac{2\text{यकोज्याअय}}{अ^2} + \frac{\text{ज्याअय}}{अ^2}$$

(४) उदाहरण, \int यⁿकोज्याअयताय यहाँ भी ताच

= कोज्याअयताय और ज = यⁿ मानने से

$$\int \text{य}^n \text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{य}^n \text{ ज्याअय}}{अ} - \frac{1}{अ} \int \text{न} \cdot \text{य}^{n-1} \text{ ज्याअयताय}$$

$$= \frac{\text{य}^n \cdot \text{ज्याअय}}{अ} - \frac{\text{न}}{अ} \int \text{य}^{n-1} \text{ ज्याअयताय}$$

फिर \int यⁿ⁻¹ज्याअयताय

$$= \frac{\text{य}^{n-1} \text{कोज्याअय}}{अ} + \int (\text{न}-1) \text{य}^{n-2} \text{कोज्याअय}$$

$$= \frac{\text{य}^{n-1} \text{कोज्याअय}}{अ} + \frac{\text{न}-1}{अ} \int \text{य}^{n-2} \text{कोज्याअय}$$

यो बार बार क्रिया करने से \int य^ककोज्याअयताय इस का मान आजायगा ।

$$\begin{aligned}
 (4) \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} &= \int \left\{ \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{ता} (\text{इ}^{\text{कय}}) \right\} \\
 &= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} - \int \frac{\text{अकोज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} \text{ताय} \\
 &= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} - \int \left\{ \frac{\text{अकोज्याअय}}{\text{क}^2} \text{ता} (\text{इ}^{\text{कय}}) \right\} \\
 &= \frac{\text{ज्याअय}}{\text{क}} \text{इ}^{\text{कय}} - \frac{\text{अकोज्याअय}}{\text{क}^2} \text{इ}^{\text{कय}} - \int \frac{\text{अ}^2 \text{ज्याअय}}{\text{क}^2} \text{इ}^{\text{कय}} \text{ताय}
 \end{aligned}$$

पक्षान्तरानयन से

$$\begin{aligned}
 \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} + \frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2} \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} \\
 &= \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2}{\text{क}^2} \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}}{\text{क}} \left(\text{ज्याअय} - \frac{\text{अकोज्याअय}}{\text{क}} \right) \\
 \therefore \int \text{इ}^{\text{कय}} \text{ज्याअय ताय} &= \frac{\text{इ}^{\text{कय}} (\text{क ज्याअय} - \text{अकोज्याअय})}{\text{अ}^2 + \text{क}^2},
 \end{aligned}$$

११ । यह चलनकलन से सिद्ध है कि ता $\left(\frac{\text{च}}{\text{ज}} \right) = \frac{\text{ज ताच} - \text{च ताज}}{\text{ज}^2}$

(जहां च, और ज दोनो य स्वतन्त्रराशि के फल है)

$$\begin{aligned}
 \text{इस लिये } \int \text{ता} \left(\frac{\text{च}}{\text{ज}} \right) &= \int \frac{\text{ज ताच} - \text{च ताज}}{\text{ज}^2} = \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} - \int \frac{\text{च ताज}}{\text{ज}^2} \\
 &= \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} + \int \text{च} \cdot \text{ता} \left(\frac{1}{\text{ज}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{च}}{\text{ज}} - \int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} = \int \text{च ता} \left(\frac{1}{\text{ज}} \right) \text{ यह भी एक दूसरे प्रकार का खण्ड-}$$

चलानयन है । इसको $\int \frac{\text{ताच}}{\text{ज}} = \frac{\text{च}}{\text{ज}} + \int \frac{\text{च ताज}}{\text{ज}^2}$ ऐसे भी लिख सकते हो ।

१२ । स्वतन्त्रराशि का चाहे जैसा फल हो परन्तु चलनकलन से उसका तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हो परन्तु यदि तात्कालिक सम्बन्ध ज्ञात हो तो चलराशिकलन से साक्षात् उसी तात्कालिक सम्बन्ध से प्रायः फल का ज्ञान नहीं होता जैसे $\frac{1}{\sqrt{y \pm 2ay}}$ इस तात्कालिक सम्बन्ध में जब तक एक

दूसरा स्वतन्त्रराशि र, = य ± अ ऐसा न मानोगे तब तक चलसंख्या का जानना कठिन है । एक स्वतन्त्रराशि के स्थान में क्या जोड़ घटा वा किससे गुण भाग कर दूसरी स्वतन्त्रराशि कल्पना करें जिसमें तात्कालिक सम्बन्ध वा तात्कालिकी गति पर से सहज मे चलसंख्या सिद्ध हो जाय इस के लिये अनेक उदाहरणों के क्रियाओं का जानना और अभ्यास करना इनको छोड़ और कोई उपाय नहीं है । इस लिये विद्यार्थियों को अभ्यास करने के लिये हम यहाँ पर कुछ उदाहरणों को क्रिया समेत दिखाते हैं ॥

उदाहरणों के करने के पहले खण्डचलायन की क्रिया समझने के लिये नीचे लिखे हुए श्लोक वा दोहे को अभ्यास कर रक्खो ।

श्लोक ।

इष्टाप्तभुक्तिं परिकल्प्य भुक्ति
तज्जं चलं चैकमथाहतिर्या ।
एकेष्टयोरिष्टजवाहतैक—

गतेश्चलोना स्वगतेश्चलः स्यात् ॥ १२ ॥

दोहा

इष्टभक्त गति मानि गति जो चल सो है एक ।
एक इष्ट को घात करि राखहु धारि विवेक ॥
इष्टभुक्ति हत एक को मानि भुक्तिः चल लाय ।
तामें याको हीन करि गतिचल कहो बनाय ॥ १२ ॥

उदाहरण ।

$$\begin{aligned} (१) \int य \sqrt{य + अ} \text{ ताय} &= \int (य + अ - अ) \sqrt{य + अ} \text{ ताय} \\ &= \int (य + अ) (य + अ)^{\frac{१}{२}} \text{ ताय} - \int अ \sqrt{य + अ} \text{ ताय} \\ &= \int (य + अ)^{\frac{३}{२}} \text{ ताय} - अ \int \text{ ताय} (य + अ)^{\frac{१}{२}} \\ &= \frac{२}{५} (य + अ)^{\frac{५}{२}} - \frac{२}{३} अ (य + अ)^{\frac{३}{२}} \end{aligned}$$

$$२) \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{य + अ} + \sqrt{य + क}} = \int \frac{\text{ताय} \sqrt{य + अ} - \text{ताय} \sqrt{य + क}}{अ - क}$$

$$= \frac{२ \left\{ (य + अ)^{\frac{३}{२}} - (य + क)^{\frac{३}{२}} \right\}}{३ (अ - क)}$$

दोनों उदाहरणों में र = य + अ
कल्पना करने से भी चलराशिसिद्ध हुए है

$$\begin{aligned}
 (३) \int \frac{य \cdot ताय}{य^८ - अ^८} &= \frac{१}{२अ^८} \int \left(\frac{यताय}{य^८ - अ^८} - \frac{यताय}{य^८ + अ^८} \right) \\
 &= \frac{१}{२अ^८} \int \left\{ \frac{१}{४अ^८} \left(\frac{२ताय \cdot य}{य^८ - अ^८} - \frac{२ताय \cdot य}{य^८ + अ^८} \right) - \frac{यताय}{य^८ + अ^८} \right\} \\
 &= \frac{१}{८अ^८} \log \frac{य^८ - अ^८}{य^८ + अ^८} - \frac{१}{२अ^८} \int \frac{य \cdot ताय}{य^८ + अ^८} \\
 &= \frac{१}{८अ^८} \log \frac{य^८ - अ^८}{य^८ + अ^८} - \frac{१}{४अ^८} \int \frac{२यताय}{य^८ + अ^८} \\
 &= \frac{१}{८अ^८} \log \frac{य^८ - अ^८}{य^८ + अ^८} - \frac{१}{४अ^८} \operatorname{स्प}^{-१} \frac{य^८}{अ^८},
 \end{aligned}$$

$$(४) \int (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} य^{म-१} ताय = \int य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} य^{म-न} ताय$$

$$= \int य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} (य^n)^{\frac{म}{न}-१} ताय$$

$$= \int क'^{\frac{म}{न}} क^{\frac{म}{न}-१} य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} (य^n)^{\frac{म}{न}-१} ताय$$

$$= क'^{\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} क^{\frac{म}{न}-१} (य^n)^{\frac{म}{न}-१} ताय$$

$$= क'^{\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} (कय^n)^{\frac{म}{न}-१} ताय$$

$$= क'^{\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} (अ + कय^n - अ)^{\frac{म}{न}-१} ताय । अब यहां$$

मानो कि $र = अ + कय^n$. तार $= न कय^{न-१} ताय$ और

$$ताय = \frac{तार}{नक य^{न-१}}$$

$$इस लिये क'^{\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} (अ + कय^n - अ)^{\frac{म}{न}-१} ताय$$

$$= क'^{\frac{म}{न}} \int य^{न-१} (अ + कय^n)^{\frac{प}{व}} (अ + कय^n - अ)^{\frac{म}{न}-१} \frac{तार}{नक य^{न-१}},$$

$$= \frac{क'^{\frac{म}{न}}}{नक} \int र^{\frac{प}{व}} (र - अ)^{\frac{म}{न}-१} तार । अब यहां यदि $\frac{म}{न}$ यह अभिन्न$$

और धन हो तो द्वियुक्पदसिद्धान्त से $(र - अ)^{\frac{म}{न}-१}$ इस का मान

फैला कर उसे $र^{\frac{प}{व}} तार$ इस से गुण फिर सहज में चलराशि जान सकते हो

जैसे $\int y^2 \sqrt{a+y}$ ताय यहां $n=1, \frac{p}{v} = \frac{1}{2}, k=1$, और $m-1=2$

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{3}{1} = 3$, और $r = a+y$, तव

$$\frac{k^{1-\frac{m}{n}}}{n \cdot k} \int r^{\frac{p}{v}} (r-a)^{\frac{m}{n}-1} \text{ तार} = \frac{1^{-2}}{1 \times 1} \int r^{\frac{1}{2}} (r-a)^2 \text{ तार}$$

$$= \int r^{\frac{1}{2}} (r^2 - 2ra + a^2) \text{ तार} = \int r^{\frac{5}{2}} \text{ तार} - 2a \int r^{\frac{3}{2}} \text{ तार} + a^2 \int r^{\frac{1}{2}} \text{ तार}$$

$$= \frac{2}{7} r^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} a \cdot r^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} a^2 r^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{7} (a+y)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} a (a+y)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} a^2 (a+y)^{\frac{3}{2}} \quad \cdot$$

और $\int y^2 (a+ky)^{\frac{3}{2}}$ ताय । यहां $n=2, m-1=3, \frac{p}{v} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{m}{n} = 2, r = a+ky$

$$\text{इस लिये, } \frac{k^{1-\frac{m}{n}}}{n \cdot k} \int r^{\frac{p}{v}} (r-a)^{\frac{m}{n}-1} \text{ तार} = \frac{1}{2k} \int r^{\frac{2}{3}} (r-a)^2 \text{ तार}$$

$$= \frac{1}{2k} \left(\frac{2}{7} r^{\frac{7}{3}} - \frac{4}{5} a r^{\frac{5}{3}} \right) = \frac{2}{7k} (a+ky)^{\frac{7}{3}} - \frac{4a}{5k} (a+ky)^{\frac{5}{3}} \quad |$$

अथवा, $\int (a+ky)^{\frac{p}{v}} y^{m-1} \times \text{ताय}$

$$= \int (ay^{-n} + k)^{\frac{p}{v}} y^{\frac{np}{v} + m-1} \times \text{ताय}$$

$$= \int y^{-n-1} (ay^{-n} + k)^{\frac{p}{v}} y^{\frac{np}{v} + m+n} \times \text{ताय}$$

$$= \int a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1} \times y^{-n-1} (ay^{-n} + k-k)^{\frac{p}{v}} (ay^{-n} + k-k) - \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1 \right) \times \text{ताय}$$

यहां भी यदि $r = ay^{-n} + k$ तो तार = $-anay^{-n-1} \times \text{ताय}$

$$\therefore \text{ताय} = -\frac{\text{तार}}{anay^{-n-1}}$$

इस लिये

$$\int a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1} \times y^{-n-1} (ay^{-n} + k-k)^{\frac{p}{v}} \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1 \right) \times \text{ताय} (ay^{-n} + k)^{\frac{p}{v}}$$

$$= -\frac{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1}}{an} \int r^{\frac{p}{v}} (r-k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1\right)} \times \text{तार} । \text{यहां यदि}$$

$\frac{m}{n} + \frac{p}{v}$ यह ऋणात्मक अभिन्न संख्या हो तो द्वियुक्पद से चलराशि जान सकते हो

$$\text{जैसे } \int \frac{\text{ताय}}{y \sqrt{a+y^2}} = \int y^{-2} (a+y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ताय}$$

$$\text{यहाँ } m-1 = -2 \quad m = -1, n=2, \text{ और } \frac{p}{v} = -\frac{1}{2}$$

$$\cdot \frac{m}{n} + \frac{p}{v} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \text{ और } k=1,$$

$$\text{इस लिये } -\frac{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1}}{an} \int r^{\frac{p}{v}} (r-k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1\right)} \times \text{तार}$$

$$= -\frac{a^0}{2a} \int r^{-\frac{1}{2}} (r-1)^0 \times \text{तार} = -\frac{1}{2a} \int r^{-\frac{1}{2}} \text{तार}$$

$$= \frac{1}{a} r^{\frac{1}{2}} \text{ यहाँ } r = ay^{-2} + 1,$$

$$\text{और } \int \frac{\text{ताय}}{(a+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int y^0 (a+y^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ताय}$$

$$\text{यहाँ } m-1 = 0. \quad m=1, \frac{p}{v} = -\frac{3}{2}$$

$$n=2, \frac{m}{n} + \frac{p}{v} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \text{ और } a^2 = a, r = (a^2 y^{-2} + 1)$$

$$\text{इस लिये } -\frac{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1}}{an} \int r^{\frac{p}{v}} (r-k)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{v} + 1\right)} \times \text{तार}$$

$$= -\frac{1}{2a^2} \int r^{-\frac{3}{2}} (r-1)^0 \text{ तार}$$

$$= -\frac{1}{2a^2} \int r^{-\frac{3}{2}} \text{तार} = -\frac{1}{2a^2} \times -\frac{2}{1} r^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{r}}$$

$$= \frac{1}{a^2 \sqrt{a y^{-2} + 1}} = \frac{y}{a^2 \sqrt{a^2 + y^2}} ।$$

$$\begin{aligned}
 (५) \int \frac{य^मताय}{(अ+कय)^न} &= \frac{१}{क^म} \int \frac{(अ+कय-अ)^म}{(अ+कय)^न} ताय \\
 &= \frac{१}{क^म} \int \frac{(र-अ)^म}{र^n} \frac{तार}{क}, \text{ यदि } र = अ + कय, \\
 &= \frac{१}{क^{म+१}} \int \frac{र^म - मअ \cdot र^{म-१} + अ^० \cdot \frac{म(म-१)}{२} र^{म-२} \dots}{र^n} \cdot तार \\
 &= \frac{१}{क^{म+१}} \int (र^{म-न} - मअ र^{म-न-१} + अ^० \cdot \frac{म(म-१)}{२} र^{म-न-२} \dots) तार \\
 &= \frac{१}{क^{म+१}} \left\{ \frac{र^{म-न+१}}{म-न+१} - \frac{मअ}{म-न} र^{म-न} + अ^० \cdot \frac{म(म-१)}{२} \cdot \frac{र^{म-न-१}}{म-न-१} \dots \right\} ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (६) \int \frac{ताय}{अ+कय+गय^२} &= \int \frac{४ग \cdot ताय}{४अग + ४कगय + ४ग^२य} \\
 &= \int \frac{४गताय}{(२गय + क)^२ + ४अग - क^२} \\
 &= \int \frac{४गताय}{र^२ + ४अग - क^२} = \int \frac{२तार}{र^२ + ४अग - क^२} \text{ (यदि } २गय + क = र \text{)} \\
 &= \frac{२}{\sqrt{४अग - क^२}} \operatorname{स्प}^{-१} \frac{र}{\sqrt{४अग - क^२}}
 \end{aligned}$$

यदि $४अग > क^२$ और अ, क, ग सब धन हों

$$\begin{aligned}
 \text{वा, } \int \frac{२तार}{र^२ + ४अग - क^२} &= २ \int \frac{१}{२ख} \left(\frac{तार}{र-ख} - \frac{तार}{र+ख} \right) \\
 &= \frac{१}{ख} \operatorname{ला} \frac{र-ख}{र+ख}
 \end{aligned}$$

(यदि $ख = \sqrt{क^२ - ४अग}$ और $४अग < क^२$)

$$\frac{१}{ख} \operatorname{ला} \frac{र-ख}{र+ख} = \frac{१}{\sqrt{क^२ - ४अग}} \operatorname{ला} \frac{२गय + क - \sqrt{क^२ - ४अग}}{२गय + क + \sqrt{क^२ - ४अग}}$$

$$\begin{aligned}
 (७) \int \frac{ताय}{(य+अ)(य+क)} &= \int \frac{१}{अ-क} \left(\frac{ताय}{य+क} - \frac{ताय}{य+अ} \right) \\
 &= \frac{१}{अ-क} \int \left(\frac{ताय}{य+क} - \frac{ताय}{य+अ} \right) = \frac{१}{अ-क} \operatorname{ला} \frac{य+क}{य+अ} ।
 \end{aligned}$$

$$(८) \frac{(त+नय)ताय}{अ+कय+गय^२} = \frac{१}{२ग} \int \frac{\{ २तग + न(क + २गय - क) \} ताय}{अ+कय+गय^२}$$

$$= \frac{१}{२ग} \left\{ \int \frac{न(क + २गय)ताय}{अ + कय + गय^२} + \int \frac{(२तग - नक)ताय}{अ + कय + गय^२} \right\}$$

$$= \frac{न}{२ग} ला (अ + कय + गय^२) + \left(\frac{२तग - नक}{२ग} \right) \int \frac{ताय}{अ + कय + गय^२}$$

दूसरे खण्ड का चल द्वे उदाहरण से स्पष्ट है ।

$$(९) \frac{(अ + कय)ताय}{य^२ - २अ_१य + अ_१^२ + क_१^२} = \int \frac{\{ अ + कअ_१ + क(य - अ_१) \} ताय}{य^२ - २अ_१य + अ_१^२ + क_१^२}$$

$$= \int \frac{(अ + कअ_१)ताय}{(य - अ_१)^२ + क_१^२} + \int \frac{क(य - अ_१)ताय}{(य - अ_१)^२ + क_१^२}$$

$$= \frac{अ + कअ_१}{क_१} स्प^{-१} \frac{य - अ_१}{क_१} + \frac{क}{२} ला \{ (य - अ_१)^२ + क_१^२ \}$$

(१०) ९ वे उदाहरण मे यदि, अ = १, -क = अ_१ = कोज्याइ, और क_१ = ज्याइ

$$तो \int \frac{(१ - कोज्याइ य)ताय}{१ - २कोज्याइ \times य + य^२} = \frac{१ - कोज्याइ}{ज्याइ} स्प^{-१} \frac{य - कोज्याइ}{ज्याइ}$$

$$- \frac{कोज्याइ}{२} ला \{ (य - कोज्याइ)^२ + ज्याइ^२ \}$$

$$= ज्याइ स्प^{-१} \frac{य - कोज्याइ}{ज्याइ} - \frac{कोज्याइ}{२} ला (य^२ - २कोज्याइ \times य + १) ।$$

$$(११) \int \frac{(अ^२ \pm य)^{\frac{१}{२}} ताय}{य^२} = \int \left(\frac{अ^२ ताय}{य \sqrt{अ^२ \pm य}} \pm \frac{य^२ ताय}{य^२ \sqrt{अ^२ \pm य}} \right)$$

$$\int \pm ताय (अ^२ \pm य)^{-\frac{१}{२}} + \int अ^२ य^{-२} (अ^२ \pm य)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\sqrt{अ^२ य^{-२} + १} + ला (य + \sqrt{अ^२ + य^२}) \text{ यदि धन चिह्न हो ।}$$

$$= -\sqrt{अ^२ य^{-२} - १} - ज्या^{-२} \frac{य}{अ} \text{ यदि ऋण हो ।}$$

$$(१२) \int \frac{अ^२ ताय}{य \sqrt{य^२ \pm अ^२}} = \int अ^२ य^{-२} (\pm अ^२ य^{-२} + १)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= \int (अ^२ य^{-२} + १ - १)(अ^२ य^{-२} + १)^{-\frac{१}{२}} ताय, + चिन्ह से$$

$$= \int (अ^२ य^{-२} + १)^{\frac{१}{२}} ताय - \int \frac{ताय}{\sqrt{अ^२ य^{-२} + १}} अत्र यहां (अ^२ य^{-२} + १)^{\frac{१}{२}}$$

और $\frac{१}{(अ^२ य^{-२} + १)^{\frac{१}{२}}}$ का मान द्वियुक्पदसिद्धान्त से ले आकर एक श्रेणी

में चलाशि का मान जान सकते हो इसी प्रकार—चिन्ह से भी जान लो

$$(१३) \int \frac{\text{ताय}}{y \sqrt{a^2 y^2 + 1}} = \int \frac{\text{ताय} \cdot y^{-1}}{y \sqrt{a^2 + y^{-2}}} = \int \frac{\text{ताय} \cdot y^{-3}}{\sqrt{a^2 + y^{-2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int -2 \text{ताय} y^{-3} (a^2 + y^{-2})^{-\frac{1}{2}} = -(a^2 + y^{-2})^{\frac{1}{2}} ।$$

$$(१४) \int \frac{\text{ताय}}{a + ककोज्याय} = \int \frac{\text{ताय}}{a(\text{ज्या} \frac{y}{2} + कोज्या \frac{y}{2}) + क(\text{कोज्या} \frac{y}{2} - ज्या \frac{y}{2})}$$

$$= \int \frac{\text{ताय}}{(a + क)कोज्या \frac{y}{2} + (a - क)ज्या \frac{y}{2}} = \int \frac{\text{ताय छे} \frac{y}{2}}{a + क + (a - क)स्प \frac{y}{2}}$$

$$= २ \int \frac{\text{ताल}}{a + क + (a - क)ल}, \text{ यदि } ल = स्प \frac{y}{2}$$

इस लिये यदि $a > क$ तो

$$२ \int \frac{\text{ताल}}{a + क + (a - क)ल^2} = \frac{२}{a - क} \int \frac{\text{ताल}}{\frac{a + क}{a - क} + ल^2} = \frac{२}{a - क} \int \frac{\text{ताल}}{ग^2 + ल}$$

यदि $ग^2 = \frac{a + क}{a - क}$ तो ११ सूत्र से

$$\frac{२}{a - क} \int \frac{\text{ताल}}{ग^2 + ल} = \frac{२}{a - क} \cdot \frac{१}{ग} स्प^{-१} \frac{ल}{ग} = \frac{२}{a - क} \frac{\sqrt{a - क}}{\sqrt{a + क}} स्प^{-१} \frac{ल}{ग}$$

$$= \frac{२}{\sqrt{a^2 - क^2}} स्प^{-१} \left(\sqrt{\frac{a - क}{a + क}} स्प \frac{१}{२} य \right)$$

और यदि $a < क$ तो

$$२ \int \frac{\text{ताल}}{a + क + (a - क)ल^2} = २ \int \frac{\text{ताल}}{a + क - (क - अ)ल^2} = \frac{२}{क - अ} \int \frac{\text{ताल}}{\frac{a + क}{क - अ} - ल^2}$$

$$= \frac{२}{क - अ} \int \frac{\text{ताल}}{ग^2 - ल}, \text{ यदि } \frac{a + क}{क - अ} = ग^2$$

$$= \frac{२}{क - अ} \int \frac{१}{२ग} \left(\frac{\text{ताल}}{ग - ल} + \frac{\text{ताल}}{ग + ल} \right) = \frac{१}{ग(क - अ)} \left(\int \frac{\text{ताल}}{ग - ल} + \int \frac{\text{ताल}}{ग + ल} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{g(k-a)} \left(- \int \frac{-\text{ताल}}{g-l} + \int \frac{\text{ताल}}{g+l} \right) \\
 &= \frac{1}{g(k-a)} \left[\text{ला}(g+l) - \text{ला}(g-l) \right] \\
 &= \frac{1}{g(k-a)} \text{ला} \frac{g+l}{g-l} = \sqrt{\frac{1}{k-a}} \text{ला} \frac{\sqrt{a+k} + \sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2}}{\sqrt{a+k} - \sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2}}
 \end{aligned}$$

यदि $\sqrt{a+k} - \sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2}$ यह ऋणात्मक हो तो

$$\int \frac{\text{ताय}}{a+k \text{ कोज्याय}} = \frac{1}{\sqrt{k-a}} \text{ला} \frac{\sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2} + \sqrt{a+k}}{\sqrt{k-a} \operatorname{स्प} \frac{y}{2} - \sqrt{a+k}}$$

यदि यहां $\int \frac{\text{ताय}}{g+k \text{ ज्याय}}$ यह जानना हो तो

$$y = \frac{\pi}{2} + l \text{ कल्पना करने से } \int \frac{\text{ताय}}{a+k \text{ ज्याय}} = \int \frac{\text{ताल}}{a+k \text{ कोज्याल}} \text{ यह }$$

ठीक १४ वें उदाहरण के ऐसा हो गया ।

१५ । जैसे ज्याय = r तो ज्या⁻¹r = y अर्थात् ज्या से जिसका बोध होता है उस से उलटा ज्या⁻¹ से बोध होता है । इसी प्रकार कल्पना करो कि फ से जो बोध होता है उस से उलटा फ⁻¹ से तब फ { फ⁻¹(y) } = y ऐसा होगा अर्थात् फ⁻¹ से यदि ज्या⁻¹ यहण करो तो इसे ऐसे बोलेंगे कि य का जो क्रमज्या खण्ड पर से चाप हो उस को क्रमज्या य के बराबर है ।

इस पर से यदि $\int f(y) \text{ ताय}$ इस का ज्ञान हो तो

$\int f^{-1}(y) \text{ ताय}$ इसका भी ज्ञान हो सकता है जैसे

यदि $f^{-1}(y) = l$ तो $y = f(l)$ तब

$f^{-1}(y) \text{ ताय} = \int l \frac{\text{ताय}}{\text{ताल}} \text{ताल} = y \text{ल} - \int y \text{ताल} = y \text{ल} \int f(l) \text{ताल}$ । ऊपर जो उदाहरण दिखाये गये हैं उनके बल से हजारहों चलानयन कर सकते हो और

जब अनन्त चल का मान आ गया तब उस में स्थिराङ्कों का उत्थापन देने से सान्तचलानयन भी सहज में कर सकते हो ।

जैसे खण्ड चलानयन से

$$\begin{aligned} \int \text{ज्या}^n \text{यताय} &= - \int \frac{\text{ताकोज्याय}}{\text{ताय}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} \\ &= -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int \text{कोज्यायज्या}^{n-2} \text{यताय} \\ &= -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int (1-\text{ज्या}^2 \text{य}) \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} \\ &= -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} \end{aligned}$$

—(n-1) ∫ ज्याⁿयताय सम शोधन से

$$n \int \text{ज्या}^n \text{यताय} = -\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य} + (n-1) \int \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{ज्या}^n \text{यताय} = - \frac{\text{कोज्यायज्या}^{n-1} \text{य}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय}$$

यहां पर यदि n एक से अधिक और धन हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान

में ० और $\frac{\pi}{2}$ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^n \text{यताय} = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} ।$$

इसी प्रकार यदि n धन और ३ से अधिक हो तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} = \frac{n-3}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-4} \text{यताय} ।$$

इसी प्रकार यदि n धन और सम हो तो लगातार यही विधि करने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ताय} = \frac{\pi}{2} \text{ और यदि धन न विषम हो तो अन्त में}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्यायताय} = 1 \text{ यह होगा । इस लिये}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \dots 1}{n(n-2)(n-4) \dots 2} \frac{\pi}{2} \text{ (यदि } n \text{ सम) ।}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \dots 2}{n(n-2)(n-4) \dots 3} \text{ (यदि } n \text{ विषम) ।}$$

यहाँ कल्पना करो कि n घन और सम है तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \dots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \quad (१)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} = \frac{n-2}{n-1} \frac{n-4}{n-3} \frac{n-6}{n-5} \dots \frac{2}{3} \quad (२)$$

अब यहाँ स्पष्ट है कि (२) प्रक्रम से श्रेणी में यदि मान ले आओ तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय} \text{ यह } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} \text{ इस से छोटा और}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय} \text{ इस से बड़ा है क्योंकि ऊपर के मान नीचे के मान से}$$

उत्तरोत्तर छोटे हैं। परन्तु पूर्व सिद्ध है कि

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय}} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-1} \text{यताय}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{n-2} \text{यताय}} \text{ यह १ से}$$

छोटा और $\frac{n-1}{n}$ से बड़ा है। इस लिये (१) और (२) के दहिने पक्ष का

संबन्ध १ से न्यून और $\frac{n-1}{n}$ से बड़ा हुआ। इस प्रकार से

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} \frac{(n-2)(n-2)}{(n-3)(n-1)} \text{ और}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (n-3)(n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-2)(n-1)} \frac{n}{n-2} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

रूप व्यासार्द्ध की परिधि जानने के लिये इसे वालिस का सूत्र Wallis's Formula कहते हैं। इस प्रकार से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त नये उत्पन्न हो सकते हैं।

अभ्यास के लिये और उदाहरण

$$१। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-कय-य^2}} = ज्या^{-१} \frac{क+२य}{\sqrt{४+क}}$$

$$२। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-५य-य^2}} = ज्या^{-१} \frac{५+२य}{\sqrt{२९}}$$

$$३। \int क य^n लायताय = \frac{क}{न+१} य^{n+१} \left(लाय - \frac{१}{न+१} \right)$$

$$४। \int २ य^n लायताय = \frac{२}{३} य^n \left(लाय - \frac{१}{३} \right)$$

$$५। \int यलायताय = \frac{१}{२} य^२ \left(लाय - \frac{१}{२} \right)$$

$$६। \int लायताय = य (लाय - १)$$

$$७। \int अय \sqrt{य+१} = \frac{२अ}{५} (य+१)^{\frac{५}{२}} - \frac{२अ}{३} (य+१)^{\frac{३}{२}}$$

$$८। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{य+२} - \sqrt{य+१}} = \frac{२}{३} \left\{ (य+२)^{\frac{३}{२}} + (य+१)^{\frac{३}{२}} \right\}$$

$$९। \int य^३ (३+य\sqrt{३})^{\frac{३}{२}}$$

$$= \frac{१}{१६} (३+य\sqrt{३})^{\frac{६}{२}} - \frac{३}{१०} (३+य\sqrt{३})^{\frac{५}{२}}$$

$$१०। \int (अ+कय)^२ य^५ ताय,$$

$$= \frac{१}{क५} \left(\frac{२^५}{७} - \frac{२}{३} अर^६ + \frac{६}{५} अ^२र^५ - अ^३र^५ + \frac{अ^५}{३} र^३ \right) \text{ यदि } र = अ + कय$$

$$११। \int \frac{य^n ताय}{(१+२य)^५}$$

$$= \frac{1}{64} \left[\frac{r}{2} - \frac{5}{1} r + 10 \text{लार} + \frac{10}{r} - \frac{5}{2r^2} + \frac{1}{3r^3} \right]$$

यदि $r = 1 + 2y$ ।

$$१२। \int \frac{\text{ताय}}{१ + २य + ३य^२} = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{स्प}^{-२} \frac{३य + १}{\sqrt{२}}$$

$$१३। \int \frac{\text{ताय}}{४ + ५य + य^२} = \frac{१}{३} \text{ला} \left[\frac{य + १}{य + ४} \right]$$

$$१४। \int \frac{\text{ताय}}{(य + ४)(य + ५)} = \text{ला} \frac{य + ४}{य + ५}$$

$$१५। \int \frac{(१ + २य) \text{ताय}}{१ + २य + ३य^२} \\ = \frac{१}{३} \left\{ \text{ला} (१ + २य + ३य^२) + \frac{१}{\sqrt{२}} \text{स्प}^{-२} \frac{३य + १}{\sqrt{२}} \right\}$$

$$१६। \int \frac{(१ + २य) \text{ताय}}{४ + ५य + य^२} = \text{ला} (४ + ५य + य^२) - \frac{४}{३} \text{ला} \left[\frac{य + १}{य + ४} \right]$$

$$१७। \int \frac{(१ + २य) \text{ताय}}{(य - अ)^२ + क^२} \\ = \frac{१ + २अ}{क} \text{स्प}^{-१} \frac{य - अ}{क} + \text{ला} \left\{ (य - अ)^२ + क^२ \right\}$$

$$१८। \int \frac{(१ + २य) \text{ताय}}{य^२ - ४य + ८} = \frac{५}{२} \text{स्प}^{-२} \frac{य - २}{२} + \text{ला} \left\{ (य - २)^२ + ४ \right\}$$

$$१९। \int \frac{\text{रताय}}{र - य \text{कोज्याइ} + य^२} \\ = \text{ज्याइ} \text{स्प}^{-१} \frac{य - \text{कोज्याइ}}{\text{ज्याइ}} - \frac{\text{कोज्याइ}}{२} \text{ला} \left\{ (य - १)^२ + ४य \text{ज्या}^२ \frac{३}{२} \right\}$$

यदि $r = १ - य \text{कोज्याइ}$ ।

$$२०। \int \frac{\text{ताय} \sqrt{१ + य}}{य^२} = \frac{\text{ला} (य + \sqrt{१ + य^२})^२ - \sqrt{१ + य^२}}{य}$$

$$२१। \int \frac{\text{ताय} \sqrt{१ - य^२}}{य^२} = - \frac{\sqrt{१ - य^२}}{य} - \text{ज्या}^{-१} य$$

$$२२। \text{सिद्ध करो कि} \int \frac{\text{अ ताय}}{य \sqrt{य^२ - अ}} = - \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{अ}}{य}$$

$$\text{वा } \int \frac{\text{अ ताय}}{\sqrt{य^2 - अ^2}} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{अ}}{य}$$

$$२३। \text{ सिद्ध करो कि } \int \frac{\text{अताय}}{य\sqrt{य^2 + अ^2}} = \text{ला} \frac{य}{अ + \sqrt{य^2 + अ^2}}$$

$$२४। \text{ सिद्ध करो कि } \int \frac{\text{अताय}}{य\sqrt{अ^2 - य^2}} = \text{ला} \frac{य}{अ + \sqrt{अ^2 - य^2}}$$

$$२५। \int \frac{\text{ताय}}{य^2\sqrt{य^2 + १}} = - (१ + य^{-2})^{\frac{१}{2}}$$

$$२६। \int \frac{\text{ताय}}{२ + \text{कोज्याय}} = \frac{२}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{१}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{\frac{१}{३}} य \right]$$

$$२७। \int \frac{\text{ताय}}{१ + २\text{कोज्याय}} = \frac{१}{\sqrt{३}} \text{ला} \frac{\text{स्प}^{\frac{१}{३}} य + \sqrt{३}}{\text{स्प}^{\frac{१}{३}} य - \sqrt{३}}$$

$$२८। \text{पज्याप कोज्यापताप} = \frac{\text{ज्या२प}}{८} = \frac{\text{पकोज्या२प}}{४}$$

$$२९। \int \frac{\text{इकयताय}}{\text{इकय} + १} = \frac{१}{क} \text{स्प}^{-1} (\text{इकय})$$

$$३०। \int \frac{\sqrt{य + क}}{\sqrt{य}} \text{ताय} = \sqrt{य^2 + कय} + क \cdot \text{ला} (\sqrt{य + क} + \sqrt{य})$$

$$३१। \int \text{ज्या}^{\frac{१}{३}} यताय = \frac{३य}{८} + \frac{\text{ज्या२य}}{१६} - \frac{\text{ज्या} \cdot य}{२}$$

$$३२। \int \text{प} \cdot \text{स्पष छेँ पताप} = \frac{\text{छेँष}}{२} \text{प} - \frac{१}{३} \text{स्पप}$$

३३। खण्डचलानयन से सिद्ध करो कि

$$\int \text{इकयकोज्याअयताय} = \frac{\text{इकय} (\text{ककोज्याअय} + \text{अज्याअय})}{अ^2 + क^2}$$

३४। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} & \int \text{इअयज्यामय कोज्यानयताय} \\ &= \frac{\text{इअय} \{ \text{अज्या} (म + न) य - (म + न) \text{कोज्या} (म + न) य \}}{२ \{ अ^2 + (म + न)^2 \}} \\ &+ \frac{\text{इअय} \{ \text{अज्या} (म - न) य - (म - न) \text{कोज्या} (म - न) य \}}{२ \{ अ^2 + (म - न)^2 \}} \end{aligned}$$

$$३५। \int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्यायकोज्याय}} = \text{ला (स्पय)}$$

$$३६। \int \frac{\text{ताय}}{२\text{ज्याय}} = \text{ला} \left(\text{स्प} \frac{\text{य}}{२} \right)^{\frac{१}{२}}, \text{ और } \int \frac{\text{ताय}}{२\text{कोज्याय}}$$

$$= \text{ला} \left\{ \text{कोस्प} \left(\frac{\pi}{४} - \frac{\text{य}}{२} \right) \right\}^{\frac{१}{२}} = \text{ला} \left\{ \text{स्प} \left(\frac{\pi}{२} + \frac{\text{य}}{२} \right) \right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$३७। \int \frac{\text{कयताय}}{(\text{अ}-\text{य})^३} = \frac{\text{अक}}{२(\text{अ}-\text{य})^३} - \frac{\text{क}}{\text{अ}-\text{य}}$$

$$३८। \int \frac{२ + \text{कोज्याय}}{२\text{य} + \text{ज्याय}} \text{ताय} = \text{ला} (२\text{य} + \text{ज्याय})$$

$$३९। \int \frac{\text{ताय}(\text{लाय})^{\text{म}}}{\text{य}} = \frac{(\text{लाय})^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}$$

$$४०। \frac{२\text{ताय}}{\text{कोज्याय} + \text{ज्याय}} = \sqrt{२} \text{ला} \left\{ \text{स्प} \left(\frac{\pi}{८} + \frac{\text{य}}{२} \right) \right\}$$

$$४१। \int \frac{२\text{य} + २\text{ज्याय}}{१ + \text{कोज्याय}} \text{ताय} = २\text{य स्प} \frac{\text{य}}{३}$$

$$४२। \int \frac{\text{ग ज्याय}^{\text{य}} \text{ताय}}{\text{अ} + १ \cdot \text{कोज्याय}^{\text{य}}} = \frac{\text{ग}}{\text{क}} \left[\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{अ}} \right]^{\frac{१}{\text{य}}} \text{स्प} \frac{\text{स्पय} \sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{अ} + \text{क}}} - \frac{\text{गय}}{\text{क}}$$

$$४३। \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{क ज्याय} + \text{ग कोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{ग} \left(\frac{\text{क}}{\text{ग}} \text{ज्याय} + \text{कोज्याय} \right)}$$

$$= \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \frac{\text{ताल}}{\text{ग}} \text{कोज्या}(\text{य}-\text{इ})} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{अ} + \frac{\text{कोज्याल}}{\text{कोज्याइ}}}$$

$$\text{यदि } \frac{\text{क}}{\text{ग}} = \text{स्पइ, य}-\text{इ} = \text{ल}$$

अब १४वे उदाहरण से सिद्ध कर लो ।

$$४४। \int \frac{\text{अ यताय}}{\sqrt{२\text{अय}-\text{य}^२}} = \text{अ}^{-१} \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}} - \text{अ} \sqrt{२\text{अय}-\text{य}^२}$$

$$४५। \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}-\text{य}^२+२}} = \text{ला} \left\{ \text{य}-४ + \sqrt{\text{य}-\text{य}^२+२} \right\}$$

$$४६। \int \text{तापस्प}^{\text{न-१}} = \frac{\text{य}^{\text{न-१}}}{२\text{न}-१} - \frac{\text{य}^{\text{न-१}}}{२\text{न}-३} + \frac{\text{य}^{\text{न-१}}}{२\text{न}-५} - \frac{\text{य}^{\text{न-१}}}{२\text{न}-७}$$

+ ... — (— १)^{नय} + (— १)^{नष} यदि य = स्पप

$$४७। \int \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^न \text{ताय} = य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^न - नय \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^{न-१}$$

$$+ न(न-१)य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^{न-२} - न(न-१)(न-२)य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^{न-३} + \dots$$

$$४८। \int \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^४ \text{ताय} = य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^४ - ४य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^३$$

$$+ १२य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\}^२ - २४य \left\{ \text{ला} \left(\frac{य}{अ} \right) \right\} + २४य$$

$$४९। \int \frac{\text{क उज्या}^{-२} \frac{य}{अ}}{\sqrt{(२अय-य)}} \text{ताय} = \frac{\text{क}}{२} \left[\text{उज्या}^{-२} \frac{य}{\text{क}} \right]^२$$

$$५०। \int \text{ला} \left\{ (\text{लाय})^१ \right\} \text{ताय} = \text{लाय} \left\{ \text{ला} (\text{लाय}) - १ \right\}$$

५१। सिद्ध करो कि

$$\int_०^{\pi} \pi \text{अपज्यापताप} = \pi \cdot अ$$

$$५२। \int_०^अ \text{ताय} \sqrt{अ-य} = \frac{\pi अ}{४}$$

$$५३। \int \frac{३}{१} \cdot \frac{\text{ला} (\text{लाय})}{य} \text{ताय} = ०$$

$$५४। \int_०^{\pi} \pi ३^{-य} \text{कोज्या}^३ \text{यताय} = \frac{२}{१५} (१ + ३^{-\pi})$$

$$५५। \int_०^{\pi} \frac{\pi}{४} \text{षस्पप छेपताप} = \frac{\pi}{४} - \frac{१}{३}$$

५६। अकग वृत्तार्द्ध के के केन्द्र पर एक कीट बैठाथा और दूसरा अ विन्दु पर। दूसरा परिधि के राह से और पहला केग व्यासार्ध के राह से ग विन्दु पर आने के लिये चला। दूसरा परिधि मे अ विन्दु से जितनी चापात्मक दूरी पर पहुँचता था उसकी कोटिज्या से उस के प्रतिक्षण की गति को गुण देने और व्यासार्द्ध का भाग देने से जो हो उतना प्रतिक्षण पहला चलता था तो बतावो कि जब दूसरा ग विन्दु पर पहुँचा उस समय पहला कहाँ पर पहुँचा।

उ० के ही विन्दु पर लौट कर फिर पहुँचा।

५०। एक लड़के ने एक सीधी १० हाथ की पङ्क्ति में चावलो को बिछा दिया । उन चावलो को खाने के लिये एक जोड़ा कबूतर उतरे । नर एक सिरे से खाने लगा और मादा दूसरे सिरे से । नर उस सिरे से जितना हटता जाता था उससे उसके प्रतिक्षण की गति में भाग देने से जो लब्ध हो उतनी मादे की प्रतिक्षणिकगति है तो बतावो कि उस सिरे से कितनी दूरी पर नर मादा से मिलेगा ।

उ० ७-२३ हाथ

इति प्रथमाध्याय ।

द्वितीयाध्याय

अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन ।

१३ । यदि तात्कालिक सम्बन्ध का रूप

$$\frac{अ + कय + खय^2 + \dots + पय^m}{अ + कय + खय^2 + \dots + पय^n} \text{ ऐसा हो}$$

जहाँ अ, क, अ, क इत्यादि स्थिराङ्क हों और म, न धन और अभिन्न हों ।

यहाँ यदि न से म बड़ा हो तो वीजगणित की साधारण भागविधि से अंश में हर का भाग देकर अभिन्न लब्धि ले आ सकते हो और शेष (जिस में कि सब से बड़ा य का घात न घात से अल्प रहेगा) के नीचे हर का हर लगा दो । इस प्रकार पूर्व भिन्न का रूप अभिन्न और भिन्न दो खण्डों के योग तुल्य जो होगा उस में अभिन्न का चल तो पहले अध्याय के सूत्रों से सहज में जाना जायगा परन्तु भिन्न के चलानयन के लिये पहले इस भिन्न को अनेक भिन्नों के योग के रूप में ले आने का यत्न करते हैं ।

कल्पना करो कि वह भिन्न $\frac{व}{भ}$ है । जहाँ व और भ दोनों य के फल हैं और भ के मान में य का सब से बड़ा घात न है । लाघव के लिये मान लो कि भ में यⁿ का गुणक १ है ।

कल्पना करो कि

$$भ = (य - अ_१)(य - क_१)^t (य^2 - २अ_२य + अ_२^2 + क_२^2)(य^2 - २ग_१य + ग_१^2 + घ_१^2)^थ$$

अब यहाँ यदि भ = ० ऐसा समीकरण हो तो इस में य का

(१) एक मान = अ_१ सम्भव संख्या ।

(२) त तुल्य सम्भव मान = क_१

(३) दो असम्भव मान = अ_२ ± क_२√—१

(४) थ जोड़े असम्भव मान, हर एक = ग_१ ± घ_१√—१

समीकरणों के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि सब खण्डों का घात अवश्य भ के तुल्य होगा जहाँ १ + त + २ + २थ = न । मानो कि

$$\frac{व}{भ} = \frac{आ_१}{य - अ_१} + \frac{का_१}{(य - क_१)^t} + \frac{का_२}{(य - क_१)^{t-१}} + \frac{का_३}{(य - क_१)^{t-२}} + \dots$$

$$+ \frac{का_t}{य - क_१} + \frac{खाय + गा}{य^2 - २अ_२य + अ_२^2 + क_२^2}$$

$$+ \frac{च_1य + ज_1}{(य^2 - २ग_1य + ग_1^2 + घ_1^2)^{1/2}} + \frac{च_2य + ज_2}{(य^2 - २ग_2य + ग_2^2 + घ_2^2)^{1/2}} +$$

$$+ \frac{च_3य + ज_3}{य^2 - २ग_3य + ग_3^2 + घ_3^2}$$

जहाँ आ, का, का, खा, गा, च, ज, इत्यादि सब स्थिराङ्क हैं ।

यहाँ यदि दहिने पक्ष के सब भिन्नो का समच्छेद विधि से योग करें तो स्पष्ट है कि अंश मान व के तुल्य होगा । अब इस सरूप कमीकरण से य के समान घातों के गुणको को समान करने से स्थिराङ्को का मान व्यक्त हो जायगा ।

१४ । य के मान से $(य - क_1)^n$ इसके अवशिष्ट खण्डों के घात को फा(य) कल्पना करो और व को फ(य) मानो तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य - क_1)^n फा(य)} = \frac{फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)}{(य - क_1)^n फा(य)} + \frac{\frac{फ(क_1)}{फा(क_1)}}{(य - क_1)^n}$$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $य = क_1$ तो

$$फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य) = 0$$

इस लिये $(य - क_1)$ इससे $फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)$ यह निःशेष होगा ।

मानो कि $य - क_1$ इस का भाग देने से लब्धि = फि(य) तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य - क_1)^n फा(य)} = \frac{फि(य)}{(य - क_1)^{n-1} फा(य)} + \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \frac{१}{(य - क_1)^{n-1}}$$

इसी रीति से

$$\frac{फि(य)}{(य - क_1)^{n-1} फा(य)} = \frac{फि(य) - \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)}{(य - क_1)^{n-1} फा(य)} + \frac{\frac{फि(क_1)}{फा(क_1)}}{(य - क_1)^{n-1}}$$

यहाँ भी यदि $य = क_1$ तो $य - क_1$ से $फि(य) - \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)$ निःशेष

होगा । मानो कि भाग देने से लब्धि = फी(य) तो

$$\frac{फ(य)}{(य - क_1)^n फा(य)} = \frac{फी(य)}{(य - क_1)^{n-1} फा(य)} + \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \frac{१}{(य - क_1)^{n-1}}$$

$$+ \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} \frac{१}{(य - क_1)^{n-1}}$$

यों बार बार क्रिया करने से भी स्पष्ट हो जायगा कि

$\frac{f(y)}{(y-k_1)^n f_a(y)}$ इस का मान अनेक खण्ड भिन्नों में ला सकते हैं ।

जिनके मान क्रम से $\frac{f(k_1)}{f_a(k_1)} \frac{1}{(y-k_1)^n}, \frac{f'(k_1)}{f_a'(k_1)} \frac{1}{(y-k_1)^{n-1}}$

इत्यादि हैं । यहाँ अत्यन्त स्पष्ट है कि $\frac{f(k_1)}{f_a(k_1)}, \frac{f'(k_1)}{f_a'(k_1)}$ इत्यादि

स्थिराङ्क हैं इस लिये १३वें प्रक्रम में जो आ, का_१, का_२ इत्यादि स्थिराङ्क कल्पना किया है वह ठीक है । इस प्रकार आ, का_१, का_२ इत्यादि को स्थिराङ्क ठहराना मिस्टर होमरशम काक्स (Mr Homeisham Cox) ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) में लिखा है । इस प्रकार अकरणगीत भिन्न को खण्ड भिन्नों के रूप में ला सकते हैं ।

इसी तरह यदि $\mu = (y-a_1)(y-k_1)(y-x_1)$ ऐसा हो

जहाँ a_1, k_1, x_1 , इत्यादि सब परस्पर भिन्न और सम्भाव्य संख्या हैं

तो $\frac{v}{\mu} = \frac{A_1}{y-a_1} + \frac{K_1}{y-k_1} + \frac{X_1}{y-x_1} + \dots$ ऐसा कल्पना कर सकते

हो फिर पूर्ववत् सरूप समीकरण से A_1, K_1, X_1 इत्यादि के मान जान सकते हो ।

१५ । लाघव से भी A_1, K_1 , इत्यादि का मान निकाल सकते हो कल्पना

करो कि $\frac{v}{\mu} = \frac{f(y)}{f_a(y)}$ और $f_a(y) = (y-a_1)(y-k_1) \dots$ तो

$$\frac{f(y)}{f_a(y)} = \frac{A_1}{y-a_1} + \frac{K_1}{y-k_1} + \frac{X_1}{y-x_1} + \dots$$

इस लिये

$$f(y) = A_1 (y-k_1)(y-x_1)$$

$$+ K_1 (y-a_1)(y-x_1) + X_1 (y-a_1)(y-k_1) \dots +$$

इस सरूप समीकरण में चाहे y का मान जो मानो परन्तु समीकरण

सत्य ही रहेगा इस लिये मानो कि $y = a_1$ तो

$$f(a_1) = A_1 (a_1 - k_1)(a_1 - x_1) \quad (१)$$

क्योंकि और खण्ड = ०

$$\text{परन्तु } f_a(y) = (y-a_1)(y-k_1)(y-x_1)$$

$$\text{इस लिये फा}(y) = (y - k_1)(y - x_1) + (y - a_1)(y - x_1) \\ + (y - a_1)(y - k_1) +$$

य के स्थान में a_1 का उत्थापन देने से

$$\text{फा}(a_1) = (a_1 - k_1)(a_1 - x_1)$$

इस लिये (१) समीकरण का रूप

$$\text{फ}(a_1) = \text{आ}_1 \text{फा}(a_1) \cdot \text{आ}_1 = \frac{\text{फ}(a_1)}{\text{फा}(a_1)}$$

$$\text{इसी तरह का}_1 = \frac{\text{फ}(k_1)}{\text{फा}(k_1)} \quad \text{खा}_1 = \frac{\text{फ}(x_1)}{\text{फा}(x_1)}, \text{ इत्यादि ।}$$

$$(१) \text{ उदाहरण } \int \frac{५y^2 - १००y + १५१}{y^2 - ५y + ६} \text{ ताय इस का मान बतावो ।}$$

$$\text{यहाँ } \frac{५y^2 - १००y + १५१}{y^2 - ५y + ६} = ५y + २५ + \frac{-५y + १}{y^2 - ५y + ६} \\ = ५y + २५ + \frac{\text{आ}_1}{y - २} + \frac{\text{का}_1}{y - ३}$$

$$\text{समच्छेद करने से, } -५y + १ = y(\text{आ}_1 + \text{का}_1) - (३\text{आ}_1 + २\text{का}_1)$$

इस लिये सरूप समीकरण से

$$-५ = \text{आ}_1 + \text{का}_1, \quad -१ = ३\text{आ}_1 + २\text{का}_1$$

$$\text{आ}_1 = ९, \quad \text{का}_1 = -१४, \text{ इस लिये}$$

$$\int \frac{५y^2 - १००y + १५१}{y^2 - ५y + ६} \text{ ताय} \\ = \int ५y \text{ ताय} + \int २५ \text{ ताय} + ९ \int \frac{\text{ताय}}{y - २} - १४ \int \frac{\text{ताय}}{y - ३} \\ = ५\frac{y^2}{2} + २५y + ९\text{ला}(y - २) - १४\text{ला}(y - ३)$$

यह तेरहवें प्रक्रम की विधि से आया है ।

१५वें प्रक्रम से निकालना हो तो अभिन्न खण्ड को छोड़ कर

$$\frac{-५y + १}{y^2 - ५y + ६} = \frac{-५y + १}{(y - २)(y - ३)} = \frac{\text{फ}(y)}{\text{फा}(y)}, \text{ यहाँ } \text{अ}_1 = २, \text{ क}_1 = ३,$$

$$\text{फ}(y) = -५y + १, \text{ फा}(y) = (y - २)(y - ३) \text{ और}$$

$$\text{फा}(y) = २y - ५, \text{ इस लिये } \text{आ}_1 = \frac{\text{फ}(a_1)}{\text{फा}(a_1)} = \frac{-५ \times २ + १}{२ \times २ - ५} = \frac{-९}{-१} = ९,$$

$$\text{और } का_2 = \frac{फ(क_2)}{फा(क_2)} = \frac{-५ \times ३ + १}{२ \times ३ - ५} = \frac{-१४}{१} = -१४,$$

फिर पूर्ववत् क्रिया करो ।

देखो १५वें प्रक्रम से कैसा लाघव से आ_२ और का_२ का मान आया है ।

$$(२) उ०। \int \frac{य^२ + १}{(य-१)(य+२)(य-३)} \text{ ताय इस का मान जानना है ।}$$

$$\text{यहाँ } अ_२ = १, क_२ = -२, ख_२ = ३, फ(य) = य^२ + १$$

$$फा(य) = (य-१)(य+२)(य-३),$$

$$फा(य) = (य+२)(य-३) + (य-१)(य-३) + (य-१)(य+२)$$

इस लिये

$$आ_२ = \frac{फ(अ_२)}{फा(अ_२)} = \frac{२}{३(-२)} = -\frac{१}{३},$$

$$का_२ = \frac{फ(क_२)}{फा(क_२)} = \frac{५}{(-३)(-५)} = +\frac{१}{३},$$

$$खा_२ = \frac{फ(ख_२)}{फा(ख_२)} = \frac{१०}{२ \times ५} = १$$

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{य^२ + १}{(य-१)(य+२)(य-३)} = \frac{१}{य-३} + \frac{१}{३} \frac{१}{य+२} - \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{य-१}$$

$$\int \frac{य^२ + १}{(य-१)(य+२)(य-३)} \text{ ताय}$$

$$= ला (य-३) + \frac{१}{३} ला य + २ - \frac{१}{३} ला (य-१)$$

१६। पूर्व भिन्न मे यदि फा(य) = (य-क_२)^न फि(य) ऐसा हो तो

पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{फ(य)}{(य-क_२)^न फि(य)} = \frac{का_२}{(य-क_२)^न} + \frac{का_३}{(य-क_२)^{न-१}} + \dots$$

$$+ \frac{का_n}{य-क_२} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

जहाँ $\frac{फी(य)}{फि(य)}$ यह और खण्डभिन्नो का योग है ।

ऊपर के समीकरण में दोनों पक्षों को $(y - k_1)^n$ से गुण देने से

$$\frac{f(y)}{f_1(y)} = f_2(y) = का_1 + का_2 (y - k_1) + का_3 (y - k_1)^2 + \dots + \frac{f_n(y)}{f_1(y)} (y - k_1)^{n-1}$$

य के स्थान में k_1 का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} f_1(k_1) &= का_1 \\ f_1'(k_1) &= का_2 \\ f_1''(k_1) &= 2 का_3 \\ f_1'''(k_1) &= 2 \cdot 3 का_4 \\ f_1^{n-1}(k_1) &= (n-1) का_n \end{aligned}$$

(१) उदाहरण $\int \frac{११y^3 + ९y^2 + ७y + ५}{y^4 - ५y^3 + ६y^2 + ४y - ८} dy$ ता यह इसका मान जानना है तो

यहाँ $\frac{११y^3 + ९y^2 + ७y + ५}{y^4 - ५y^3 + ६y^2 + ४y - ८} = \frac{११y^3 + ९y^2 + ७y + ५}{(y-2)^3(y+1)}$, इस लिये

$k_1 = 2, n = 3, f_1(y) = y + 1 \mid f_2(y) = \frac{११y^3 + ९y^2 + ७y + ५}{y + 1}$

$f_1'(y) = \frac{३३y^2 + १८y + ७}{y + 1} - \frac{११y^3 + ९y^2 + ७y + ५}{(y + 1)^2}$

$f_1''(y) = \frac{६६y + १८}{y + 1} - \frac{२(३३y^2 + १८y + ७)}{(y + 1)^2} + \frac{२(११y^3 + ९y^2 + ७y + ५)}{(y + 1)^3}$

इस लिये $f_1(k_1) = \frac{११ \times ८ + ९ \times ४ + ७ \times २ + ५}{२ + १} = \frac{८८ + ३६ + १४ + ५}{३}$

$= \frac{१४३}{३} = का_1$

$f_1'(k_1) = \frac{३३ \times ४ + १८ \times २ + ७}{२ + १} - \frac{१४३}{९} = \frac{१३२ + ३६ + ७}{३} - \frac{१४३}{९}$

$= \frac{१७५}{३} - \frac{१४३}{९} = \frac{५२५}{९} - \frac{१४३}{९} = \frac{३८२}{९} = का_2$

और $f_1''(k_1) = \frac{१५०}{३} - \frac{२(१३२ + ३६ + ७)}{९} + \frac{१४३ \times २}{२७}$

$= \frac{१३५०}{२७} - \frac{१०५०}{२७} + \frac{१४३ \times २}{२७} = \frac{३००}{२७} + \frac{२८६}{२७} = \frac{५८६}{२७}, \frac{२९३}{२७} = का_3$

इस लिये भिन्न का रूपान्तर

$$\frac{१४३}{३} \frac{१}{(य-२)^३} + \frac{३८२}{९} \frac{१}{(य-२)^२} + \frac{२९३}{२७} \frac{१}{य-२} + \frac{४}{२७} \frac{१}{य+१}$$

तब

$$\begin{aligned} & \int \frac{११य^३ + ९य^२ + ७य + ५}{य^४ - ५य^३ + ६य^२ + ४य - ८} \text{ताय} \\ &= \frac{१४३}{३} \int \frac{\text{ताय}}{(य-२)^३} + \frac{३८२}{९} \int \frac{\text{ताय}}{(य-२)^२} + \frac{२९३}{२७} \int \frac{\text{ताय}}{य-२} + \frac{४}{२७} \int \frac{\text{ताय}}{य+१} \\ &= \frac{२९३}{२७} \text{ला}(य-२) + \frac{४}{२७} \text{ला}(य+१) - \frac{१४३}{६(य-२)^२} - \frac{३८२}{९(य-२)} \end{aligned}$$

१७। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो अर्थात्

एक मान $अ + क\sqrt{-१}$ हो और दूसरा $अ - क\sqrt{-१}$ तो मानो कि

$$\frac{ब}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{\text{आ}_१}{य-(अ+क\sqrt{-१})} + \frac{\text{आ}_२}{य-(अ-क\sqrt{-१})} + \frac{\text{फी}(य)}{\text{फि}(य)}$$

जहाँ $\frac{\text{फी}(य)}{\text{फि}(य)}$ और खण्डों का योग है तो समच्छेद करने से

$$\begin{aligned} \text{फ}(य) &= \text{आ}_१ \{ य-(अ-क\sqrt{-१}) \} \text{फि}(य) \\ &+ \text{आ}_२ \{ य-(अ+क\sqrt{-१}) \} \text{फि}(य) \\ &+ \text{फी}(य) \{ य-(अ+क\sqrt{-१}) \} \{ य-(अ-क\sqrt{-१}) \} \\ &= \{ (\text{आ}_१ + \text{आ}_२)य - (\text{आ}_१ + \text{आ}_२)अ + क(\text{आ}_१ - \text{आ}_२)\sqrt{-१} \} \text{फि}(य) \\ &+ \text{फी}(य) \{ य^२ - २अय + अ^२ + क^२ \} \end{aligned}$$

अब यहाँ $य$ के मान में $अ + क\sqrt{-१}$ वा $अ - क\sqrt{-१}$ का उत्थापन देने से स्पष्ट है कि $य^२ - २अय + अ^२ + क^२ = ०$

अर्थात् $य^२ - २अय - (अ^२ + क^२)$ तब ऊपर के समीकरण का रूप

$$\text{फ}(य) = \{ (\text{आ}_१ + \text{आ}_२)य - (\text{आ}_१ + \text{आ}_२)अ + क(\text{आ}_१ - \text{आ}_२)\sqrt{-१} \} \text{फि}(य) \cdot (१)$$

ऐसा होगा ।

(१) इस में बार बार यदि $य$ के स्थान में $२अय - (अ^२ + क^२)$ का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि अन्त में $दाय + ध = दाँय + धँ$ ऐसा स्वरूप होगा फिर इस में $य$ के स्थान में $अ + क\sqrt{-१}$ वा $अ - क\sqrt{-१}$ का उत्थापन देने से और असम्भाव्य तथा सम्भाव्य संख्याओं के गुणक समान करने से दाँ और धँ

प्रकट हो जायेंगे इन पर से $(आ_२ + आ_३)$ और $(आ_२ + आ_३)अ$ भी प्रकट हो जायेंगे । अथवा

$$\begin{aligned} \frac{फ(य)}{फा(य)} &= \frac{आ_१}{य - (अ + क\sqrt{-१})} + \frac{आ_२}{य - (अ - क\sqrt{-१})} + \frac{फा(य)}{फि(य)} \\ &= \frac{आ_१य - (आ_१अ - आ_१क\sqrt{-१}) + आ_२य - (आ_२अ + आ_२क\sqrt{-१})}{य^२ - २अय + अ^२ + क^२} + \frac{फा(य)}{फि(य)} \\ &= \frac{खाय + गा}{य^२ - २अय + अ^२ + क^२} + \frac{फा(य)}{फि(य)} \end{aligned}$$

जहाँ य का गुणक ख है और अव शिष्ट गा है । अव पूर्ववत् समच्छेद करने से और य के समान घातो के गुणक समान करने से खा, और गा व्यक्त हो जायेंगे ।

(१) उदाहरण $\int \frac{ताय}{अ^३ + य^३}$ इस का मान जानना है ।

$$\text{यहाँ } \frac{१}{अ^३ + य^३} = \frac{१}{(अ + य)(अ^२ - अय + य^२)} = \frac{आ_१}{य + अ} + \frac{खाय + गा}{य^२ - अय + अ^२}$$

समच्छेद कर अंश को रूप के तुल्य करने से

$$\begin{aligned} १ &= आ_१य^२ - अआ_१य + आ_१अ^२ + खाय + अखाय + गाय + गाअ \\ &= य^२(आ_१ + खा) + य(अखा + गा - अआ_१) + आ_१अ^२ + गाअ \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये } आ_१ + खा = ० \quad अखा + गा - अआ_१ = ०$$

$$१ = अ(आ_१अ + गा)$$

$$\begin{array}{l} अआ_१ + अखा = ० \quad गा + २अखा = ० \quad गा = -२अखा \\ गा - अआ_१ + अखा = ० \quad आ_१ = -खा \end{array}$$

$$\begin{aligned} अआ_१ &= -अखा \quad १ = अ(आ_१अ + गा) = अ(-अखा - २अखा) \\ &= -३अखा \end{aligned}$$

$$- \frac{१}{३अ} = खा, आ_१ = \frac{१}{३अ} \quad \text{और } गा = -२अखा = \frac{२}{३अ}$$

इस लिये इनके उत्थापन से

$$\begin{aligned} \int \frac{ताय}{अ^३ + य^३} &= \int \frac{ताय}{३अ(य + अ)} + \int \frac{-\frac{य}{३अ} + \frac{२}{३अ}}{य^२ - अय + अ^२} ताय \\ &= \frac{१}{३अ} ला (य + अ) - \frac{१}{३अ} \int \frac{य - २अ}{य^२ - अय + अ^२} ताय \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \text{ला} (य + अ) - \frac{1}{6a^2} \int \frac{2य - अ - 3अ}{य^2 - अय + अ^2} \text{ताय}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \text{ला} (य + अ) - \frac{1}{6a^2} \int \frac{2य - अ}{य^2 - अय + अ^2} \text{ताय}$$

$$- \frac{1}{6a^2} \int \frac{-3अ}{य^2 - अय + अ^2} \text{ताय}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \text{ला} (य + अ) - \frac{1}{6a^2} \text{ला} (य^2 - अय + अ^2) + \frac{3}{6a} \int \frac{\text{ताय}}{य^2 - अय + अ^2}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \text{ला} (य + अ) - \frac{1}{6a^2} \text{ला} (य^2 - अय + अ^2)$$

$$+ \frac{1}{2a} \int \frac{\text{ताय}}{(य - \frac{अ}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \text{ला} (य + अ) - \frac{1}{6a^2} \text{ला} (य^2 - अय + अ^2) + \frac{1}{2a} \int \frac{\text{ताय}}{\text{ल}^2 + \frac{3}{4}a^2}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \text{ला} (य + अ) - \frac{1}{6a^2} \text{ला} (य^2 - अय + अ^2) + \frac{2}{a\sqrt{3}} \frac{1}{2a} \text{स्प}^{-1} \frac{2य - अ}{a\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \text{ला} (य + अ) - \frac{1}{6a^2} \text{ला} (य^2 - अय + अ^2) + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2य - अ}{a\sqrt{3}}$$

वा, $1 = आ_1(य^2 - अय + अ^2) + (खाय + गा)(य + अ)$ इस मे यदि $य = -अ$

तो $1 = आ_1(अ^2 + अ^2 + अ^2) = 3अ^2 आ_1$ $\therefore आ_1 = \frac{1}{3अ^2}$ समीकरणमे

इस का उत्थापन देने से

$$3अ^2 = य^2 - अय + अ^2 + 3अ^2 (खाय + गा) (य + अ)$$

$$\text{समशोधन से } 3अ^2 (खाय + गा) (य + अ) = 2अ^2 + अय - य^2$$

$$\text{दोनों पक्षों में } य + अ \text{ का भाग देने से } 3अ^2 (खाय + गा) = 2अ - य$$

$$\therefore \text{खाय + गा} = \frac{2अ - य}{3अ^2} \text{ इन पर से फिर पूर्वोक्त क्रिया करो ।}$$

अथवा इसी प्रक्रम के (१) समीकरण से यहाँ

$$फ(य) = 1 = \{ (आ_1 + आ_2)य - (आ_1 + आ_2)अ + क(आ_1 - आ_2)\sqrt{-1} \} फि(य)$$

$$= (खाय + गा) (य + अ) = खाय^2 + गाय + अखाय + गाअ$$

$$= खाय^2 + (गा + अखा)य + गाअ$$

$$\begin{aligned} \text{खा}(\text{अय} - \text{अ}^3) + (\text{गा} + \text{अखा})\text{य} + \text{गाअ} &= \text{य}(\text{गा} + 2\text{अखा}) \\ &+ \text{गाअ} - \text{अ}^3\text{खा} \end{aligned}$$

$$(\text{यहाँ खा} = \text{आ}_1 + \text{आ}_2 \text{। गा} = (\text{आ}_1 + \text{आ}_2)\text{अ} + \text{क}(\text{आ}_1 - \text{आ}_2)\sqrt{-1}$$

$$\text{अव य} = \frac{\text{अ} + \text{अ}\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \text{मानने से}$$

$$1 = \frac{(\text{अ} + \text{अ}\sqrt{3}\sqrt{-1})}{2} (\text{गा} + 2\text{अखा}) + \text{गाअ} - \text{अ}^3\text{खा} \text{।}$$

$$= \frac{\text{अ}}{2} (\text{गा} + 2\text{अखा}) + \text{गाअ} - \text{अ}^3\text{खा} + \frac{\text{अ}\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} (\text{गा} + \text{अखा})$$

सम्भाव्य और असम्भाव्य के गुणक को तुल्य करने से

$$1 = \frac{\text{अ}}{2} (\text{गा} + 2\text{अखा}) + \text{गाअ} - \text{अ}^3\text{खा} \text{। गा} + 2\text{अखा} = 0$$

$$1 = \text{गाअ} - \text{अ}^3\text{खा} \quad \text{और गा} = -2\text{अखा}$$

$$1 = \text{गाअ} - \text{अ}^3\text{खा} = -2\text{अ}^2\text{खा} - \text{अ}^3\text{खा} = -3\text{अ}^2\text{खा}$$

$$\therefore \text{खा} = -\frac{1}{3\text{अ}^2} \text{ फिर अब पूर्ववत् क्रिया करो ।}$$

१८। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव मान त वार हो तो पूर्ववत्

$$\begin{aligned} \frac{\text{व}}{\text{भ}} &= \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} = \frac{\text{खा}_\text{तय} + \text{गा}_\text{त}}{(\text{य}^2 - \text{दय} + \text{घ})^\text{त}} + \frac{\text{खा}_\text{त-१य} + \text{गा}_\text{त-१}}{(\text{य}^2 - \text{दय} + \text{घ})^\text{त-१}} + \\ &+ \frac{\text{खा}_\text{य} + \text{गा}_\text{य}}{\text{य}^2 - \text{दय} + \text{घ}} + \frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} \text{ ऐसा मानने से} \end{aligned}$$

$\text{फा}(\text{य}) = (\text{य}^2 - \text{दय} + \text{घ})^\text{त}\text{फि}(\text{य})$ ऐसा हुआ। फिर समच्छेद करने से

$$\text{फ}(\text{य}) = (\text{खा}_\text{तय} + \text{गा}_\text{त}) \text{फि}(\text{य})$$

$$+ (\text{खा}_\text{त-१य} + \text{गा}_\text{त-१}) (\text{य}^2 - \text{दय} + \text{घ}) \text{फि}(\text{य})$$

$$+ \text{फि}(\text{य}) \text{ (१)}$$

अब यहाँ य के स्थान में उसके असम्भव मान का उत्थापन दो

अर्थात् $\text{य}^2 - \text{दय} + \text{घ} = 0$ के मानो तो

(१) का लघुरूप

$$\text{फ}(\text{य}) = (\text{खा}_\text{त} + \text{गा}_\text{त}) \text{फि}(\text{य})$$

यहाँ १७वें प्रक्रम से $\text{खा}_\text{त}$ और $\text{गा}_\text{त}$ का मान निकाल समशोधन करने से

(१) समीकरण का रूप

$$f(y) = (x_n + g_n) f(y)$$

$$= (x_{n-1} + g_{n-1}) (y - 2y + 1) f(y) + \dots \text{ हुआ ।}$$

यह सरूप समीकरण है और यहाँ दहिना पक्ष $y - 2y + 1$ उससे निःशेष होता है इस लिये बायें पक्ष भी निःशेष होगा कल्पना करो कि भाग देने से लब्धि $f_1(y)$ है तो

$$f_1(y) = (x_{n-1} + g_{n-1}) f(y) + (x_{n-2} + g_{n-2}) (y - 2y + 1) f(y) + \dots \quad (2)$$

यहाँ भी यदि $y - 2y + 1 = 0$ तो (2) का रूप

$$f_1(y) = (x_{n-1} + g_{n-1}) f(y) \text{ इस से १७वें प्रक्रम से}$$

x_{n-1} और g_{n-1} निकाल फिर समशोधन और $y - 2y + 1$ का दोनों पक्षों में भाग देने से बायें पक्ष को $f(y)$ मानने से और $y - 2y + 1 = 0$ करने से इसी प्रकार x_{n-2} , g_{n-2} इत्यादि भी व्यक्त हो जायगे ।

(१) उदाहरण $\int \frac{k(y - 2y - 2)}{(y + 1)(y + 1)}$ तब इसका मान जानना है तो

$$\text{यहाँ } \frac{y - 2y - 2}{(y + 1)(y + 1)} = \frac{x_1 y + g_1}{(y + 1)(y + 1)} + \frac{x_2 y + g_2}{(y + 1)(y + 1)} + \frac{f(y)}{(y + 1)(y + 1)}$$

$$\text{तब } y - 2y - 2 = (x_1 y + g_1)(y + 1)$$

$$+ (x_2 y + g_2)(y + 1)(y + 1) + (y + 1)(y + 1)f(y) \quad (3)$$

इस में $y + 1 = 0$ करने से

$$y - 2y - 2 = (x_1 y + g_1)(y + 1)$$

$$= (x_1 y + g_1)(y + 2y + 1)$$

y के स्थान में $-y - 1$ का उत्थापन देने से

$$-y - 1 = (x_1 y + g_1)y$$

$$= x_1 y^2 + g_1 y = -x_1 y - x_1 + g_1 y$$

इस लिये $-y = g_1 - x_1$ और $-1 = -x_1$ $\therefore x_1 = 1$ और

$$-y - 1 = g_1 - x_1 = g_1 - 1 \quad \therefore -1 = g_1$$

(३) इनका उत्थापन देकर समशोधन करने से

$$y - 2y - 2 = (y - 1)(y + 1)^2$$

$$= (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)(\text{य} + \text{य} + 1)(\text{य} + 1) + (\text{य} + \text{य} + 1)\text{फी}(\text{य})$$

दोनों पक्षों में $\text{य} + \text{य} + 1$ का भाग देने से

$$-(3\text{य} + 1) = (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)(\text{य} + 1) + (\text{य} + \text{य} + 1)\text{फी}(\text{य}) \quad (४)$$

फिर इस में $\text{य} + \text{य} + 1 = 0$ मानने से

$$\begin{aligned} -(3\text{य} + 1) &= (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)(\text{य} + 1) = (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)(\text{य} + \text{य} + 1 + \text{य}) \\ &= (\text{खा}_1\text{य} + \text{गा}_1)\text{य} = -\text{खा}_1(\text{य} + 1) + \text{गा}_1\text{य} \end{aligned}$$

इस लिये $-3 = -\text{खा}_1 + \text{गा}_1$ और $-1 = -\text{खा}_1$ $1 = \text{खा}_1$ और

$-2 = \text{गा}_1$ अब (४) में इनका उत्थापन दे समशोधन कर $\text{य} + \text{य} + 1$ का भाग देने से $-(\text{य} - 1) = \text{फी}(\text{य})$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \frac{\text{फी}(\text{य})}{(\text{य} + 1)^2} &= -\frac{\text{य} - 1}{(\text{य} + 1)^2} = -\frac{\text{य} + 1}{(\text{य} + 1)^2} + \frac{2}{(\text{य} + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{\text{य} + 1} + \frac{2}{(\text{य} + 1)^2} \end{aligned}$$

तब

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{य}^3 - 3\text{य} - 2}{(\text{य} + \text{य} + 1)(\text{य} + 1)} \text{ताय} &= \int \frac{3\text{य} - 1}{(\text{य} + \text{य} + 1)^2} \text{ताय} \\ &+ \int \frac{\text{य} - 2}{\text{य} + \text{य} + 1} \text{ताय} + \int \frac{2\text{ताय}}{(\text{य} + 1)} - \int \frac{\text{ताय}}{\text{य} + 1} \end{aligned}$$

यहाँ बारहवें प्रक्रम से सब का मान जान सकते हो पहले खण्ड का यदि मान व्यक्त हो तो । पहले का मान जानने के लिये पहले मानो कि

$\int \frac{\text{तार}}{(\text{र} + \text{अ})^n}$ इस का मान जानना है तो

$$\begin{aligned} \frac{\text{तार}}{(\text{र} + \text{अ})^n} &= \frac{1}{\text{अ}} \cdot \frac{(\text{र} + \text{अ} - \text{र})\text{तार}}{(\text{र} + \text{अ})^n} = \frac{1}{\text{अ}} \frac{\text{तार}}{(\text{र} + \text{अ})^{n-1}} \\ &- \frac{1}{\text{अ}} \cdot \frac{\text{रतार}}{(\text{र} + \text{अ})^n} \end{aligned}$$

परन्तु खण्ड चलानयन से $\frac{1}{\text{अ}} \int \frac{2\text{रतार}}{2(\text{र} + \text{अ})^n}$

$$= -\frac{1}{\text{अ}} \frac{1}{2(n-1)} \frac{\text{र}}{(\text{र} + \text{अ})^{n-1}} + \frac{1}{\text{अ}} \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{\text{तार}}{(\text{र} + \text{अ})^{n-1}}$$

$$\text{इस लिये } \int \frac{\text{तार}}{(\text{र} + \text{अ})^n} = \frac{1}{\text{अ}} \frac{1}{2(n-1)} \frac{\text{र}}{(\text{र} + \text{अ})^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{\text{तार}}{(r^2+a^2)^{n-1}} \cdot (\text{अ})$$

इस (अ) सिद्धान्त को अच्छी तरह से सीखो ।

$$\begin{aligned} \text{ऊपर के उदाहरण में } \frac{2y-1}{(y^2+y+1)^2} &= \frac{2(y-\frac{1}{2})}{(y^2+y+1)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}(2y+1-1-\frac{2}{3})}{(y^2+y+1)^2} = \frac{\frac{2}{3}(2y+1)}{(y^2+y+1)^2} - \frac{\frac{2}{3}}{(y^2+y+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \int \frac{2y-1}{(y^2+y+1)^2} \text{ ताय} \\ &= \frac{2}{3} \int (2y+1) \text{ ताय } (y^2+y+1)^{-2} - \frac{2}{3} \int \frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^2} \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{y^2+y+1} - \frac{2}{3} \int \frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^2} = \frac{\text{ताय}}{\left\{ (y+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right\}^2} = \frac{\text{तार}}{(r^2+a^2)^2}, \text{ यदि } r = y + \frac{1}{2}$$

और $\frac{2}{3} = a^2$

(अ) सिद्धान्त से

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{ताय}}{(y^2+y+1)^2} &= \int \frac{\text{तार}}{(r^2+a^2)^2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{2(r^2+a^2)} - \frac{2y+1}{2(r^2+a^2)} \\ &+ \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{r^2+a^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2y+1}{y^2+y+1} + \frac{2}{3} \int \frac{\text{ताय}}{y^2+y+1} = \frac{1}{3} \frac{2y+1}{y^2+y+1} + \frac{2}{3} \frac{2}{\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{और } \frac{y-2}{y^2+y+1} = \frac{\frac{1}{3}(2y-4)}{y^2+y+1} = \frac{\frac{1}{3}(2y+1-4)}{y^2+y+1} = \frac{\frac{1}{3}(y+1)}{y^2+y+1} - \frac{\frac{2}{3}}{y^2+y+1}$$

इसलिये

$$\begin{aligned} \int \frac{y-2}{y^2+y+1} \text{ताय} &= \frac{1}{3} \int (2y+1) \text{ताय} - (y^2+y+1) - \frac{2}{3} \int \frac{\text{ताय}}{y^2+y+1} \\ &= \frac{1}{3} \text{ला}(y^2+y+1) - \frac{2}{3} \int \frac{\text{तार}}{r^2+a^2} = \frac{1}{3} \text{ला}(y^2+y+1) - \frac{2}{3} \frac{2}{\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$2 \int \frac{\text{ताय}}{(y+1)^2} = \frac{-2}{y+1} \text{ और } \int \frac{\text{ताय}}{y+1} = \text{ला}(y+1) \text{ इन सबको इकट्ठा करने से}$$

$$\int \frac{३य-१}{(य+य+१)^०} ताय$$

$$= -\frac{३}{२(य^०+य+१)} - \frac{५}{६} \frac{२य+१}{य+य+१} - \frac{५}{३} \frac{२}{\sqrt{३}} स्प^{-१} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{य-२}{य^०+य+१} = \frac{१}{३} ला(य^३+य+१) - \frac{५}{३} \frac{२स्प^{-१}}{\sqrt{३}} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{२ताय}{(य+१)^०} = -\frac{२}{य+१}$$

$$\int \frac{ताय}{य+१} = ला(य+१)$$

इस लिये

$$\int \frac{३य-१}{(य+य+१)^०} ताय + \int \frac{य-२}{य^०+य+१} ताय + \int \frac{२ताय}{(य+१)^०} - \int \frac{ताय}{य+१}$$

$$= -\frac{३}{२(य^०+य+१)} - \frac{५}{६} \frac{२य+१}{य+य+१} - \frac{२५}{३} \frac{१}{\sqrt{३}} स्प^{-१} \frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$+ \frac{१}{३} ला(य^३+य+१) - \frac{२}{य+१} - ला(य+१) ।$$

$$\int \frac{तार}{(र^०+अ)^०} इस मे यदि अ स्पप = र तो \frac{अ ताप}{कोज्या प} = तार$$

$$और (र^०+अ) = अ स्पप + अ = अ (छेप) = \frac{अ}{कोज्या प}$$

$$इस लिये \frac{तार}{(र^०+अ)^०} = \int \frac{अ.ताप}{कोज्या^०प \left[\frac{अ}{कोज्या प} \right]^०} = \int \frac{अ ताप कोज्या^०प}{अ^०कोज्या प}$$

$$= \frac{१}{अ^{०न-१}} \int तापकोज्या^{०न-०} प$$

$$= \frac{ज्याप}{मअ^{०न-१}} \left\{ कोज्या^{म-१}प + \frac{म-१}{म-२} कोज्या^{म-२}प + \frac{(म-१)(म-३)}{(म-२)(म-४)} कोज्या^{म-३}प + \dots \right\}$$

$$+ \frac{(म-१)(म-३)(म-५) \dots १}{अ^{०न-०} म(म-२)(म-४) \dots २} प$$

१२वे प्रक्रम के १५ वे उदाहरण की विधि से । यहाँ ०न-२ = म ।

इस तरह से भी $\int \frac{तार}{(र^०+अ)^०}$ इसका मान जान सकते हो ।

१९। ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि किसी अकरणीगत भिन्न सम्वन्ध के चलानयन के लिये जो खण्ड भिन्न किये गये हैं उनका चार प्रकार का रूप होता है

$$(१) \frac{\text{आ,ताय}}{\text{य—अ,}} , (२) \frac{\text{का,ताय}}{(\text{य—क,})^n}$$

$$(३) \frac{(\text{खाय + गा})\text{ताय}}{\text{य—अ,य + अ, + क,}} = \frac{\text{खाय + गा}}{(\text{य—अ,}) + \text{क,}} \text{ताय}$$

(४) $\frac{\text{च,य + ज,}}{\{(\text{य—ग,}) + \text{घ,}\}^y}$ ताय इन में (१), (२), (३) का चलानयन तो पहले कर आये हैं रहा चौथा उसको यदि

$$\begin{aligned} \frac{\text{च,य + ज,}}{\{(\text{य—ग,}) + \text{घ,}\}^y} \text{ताय} &= \frac{\text{च,य—च,ग, + च,ग, + ज,}}{\{(\text{य—ग,}) + \text{घ,}\}^y} \text{ताय} \\ &= \frac{\text{च,}(\text{य—ग,})\text{ताय}}{\{(\text{य—ग,}) + \text{घ,}\}^y} + \frac{\text{च,ग, + ज,}}{\{(\text{य—ग,}) + \text{घ,}\}^y} \text{ताय} \end{aligned}$$

यहा पहले खण्ड का चल पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि

$$\frac{-\text{च,}}{२(\text{य—१}) \{(\text{य—ग,}) + \text{घ,}\}^{y-1}} \text{ यह है}$$

दूसरे खण्ड में यदि $\text{य—ग,} = \text{र}$ तो

$$\frac{\text{च,ग, + ज,}}{\{(\text{य—ग,}) + \text{घ,}\}^y} \text{ताय} = \frac{\text{स्थितार}}{(\text{र + घ,})^y} \text{। इसका मान १८वें प्रक्रम के}$$

(अ) सिद्धान्त से स्पष्ट है, यहाँ $\text{च,ग, + ज,} = \text{स्थि।}$

अब इन चारों मेंटों के चल से अकरणीगत भिन्न सम्वन्ध का चलानयन कर सकते हैं।

२०। ऊपर के प्रकारों के चल से अनेक चलानयन कर सकते हैं। जैसे यदि

$$\left(\frac{\text{फ(य)ताय}}{\text{फा(य)}} \right) \text{ इस का मान जानना हो तो यदि } \text{र} = \text{य} \text{ तो तार} = \text{२यताय}$$

$$\text{इस लिये ताय} = \frac{\text{तार}}{\text{२य}} \text{ और } \left(\frac{\text{फ(य)}}{\text{फा(य)}} \right) = \frac{\text{फ(र)}}{\text{फा(र)}} \text{ अब यहाँ यदि र के मान}$$

सब सम्भव और परस्पर भिन्न हो तो खण्ड भिन्न का कोई मान

$$\frac{\text{फ(अ,)}}{\text{फा(अ,)}} \cdot \frac{?}{\text{र—अ,}} = \frac{\text{फ(अ,)}}{\text{फा(अ,)}} \cdot \frac{?}{\text{य—अ,}} \text{ ऐसा होगा जहा अ,, र का कोई मान है।}$$

$$\text{इस पर तो } \left(\frac{\text{फ(अ,)}}{\text{फा(अ,)}} \right) \frac{\text{ताय}}{\text{य—अ,}} = \frac{\text{फ(अ,)}}{\text{फा(अ,)}} \left(\frac{\text{ताय}}{\text{य—अ,}} \right)$$

यहाँ चाहे अ, धनात्मक वा ऋणात्मक हो १२वें प्रक्रम से $\int \frac{\text{ताय}}{य^२ - अ}$ का मान जान सकते हो ।

यदि र के मान में एक जोड़ा असम्भाव्य राशि हो जिनका मान $अ + क\sqrt{-१}$ और $अ - क\sqrt{-१}$ हो तो इनके वश से खण्ड भिन्न संबंध का मान

$$= \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{(य^२ - अ) + क^२} = \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{य^२ - २अय + ग^२}, \text{ जहाँ } ग^२ = अ^२ + क^२ \text{ । यहाँ यदि}$$

$$अ = ग\text{कोज्या}२इ \text{ तो इस भिन्न का रूप } = \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{य^२ - २गय\text{कोज्या}२इ + ग^२}$$

$$= \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{(य^२ - २य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ + ग)(य + २य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ + ग)}$$

इस लिये पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{\text{खाय} + \text{गा}}{य^२ - २य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ + ग} = \frac{\text{खा}_१य + \text{गा}_१}{य^२ - २य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ + ग}$$

$$+ \frac{\text{खा}_२य + \text{गा}_२}{य^२ + २य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ + ग} \text{ इस पर से पूर्ववत् स्पष्ट है कि}$$

$$\text{खा}_१ = -\text{खा}_२ = \frac{\text{खाग} - \text{गा}}{२ग\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ}, \text{ गा}_१ = \text{गा}_२ = \frac{\text{गा}}{२ग} \text{ इनका उत्थापन ऊपर के}$$

खण्ड भिन्नो में देने से और थोड़ा सा परिवर्तन करने से

$$\int \frac{(\text{खाय} + \text{गा})\text{ताय}}{य^२ - २अय + ग^२} = \frac{\text{खाग} - \text{गा}}{२ग\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ} \text{ ला } \left[\frac{य^२ - २य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ + ग}{य^२ + २य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ + ग} \right]$$

$$+ \frac{\text{खाग} + \text{गा}}{२ग\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ} \text{ स्प } \left[\frac{२य\sqrt{ग}\text{कोज्या}इ}{ग^२ - य} \right]$$

२१ । यदि $\frac{\text{ताय}}{(य-अ)^म(य-क)^न}$ इस का चल जानना हो तो इसे खण्ड भिन्नो के रूप में न ला कर भी नीचे की युक्ति से सहज में चल मान जान सकते हो ।

$$\text{कल्पना करो कि } य-अ = (य-क) र \text{ तो } य = \frac{अ-कर}{१-र}$$

$$य-अ = \frac{(अ-क)र}{१-र}, \text{ य-क} = \frac{अ-क}{१-र} \text{ और ताय} = \frac{(अ-क)\text{तार}}{(१-र)} \text{ ऊपर के मान}$$

में इनका उत्थापन देने से $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})^m(\text{य}-\text{क})^n} = \int \frac{(1-r)^{m+n-1}}{r^m(\text{अ}-\text{क})^{m+n-1}}$ तार
इस का मान अब द्वियुक्पदसिद्धान्त से सहज में जान सकते हो ।

जैसे $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})^2}$ यहाँ $m = 1, n = 2, m+n-2 = 2, m+n-1 = 3$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})^2} &= \int \frac{(1-r)^{m+n-1}}{r^m(\text{अ}-\text{क})^{m+n-1}} \text{ तार} = \int \frac{(1-r)^2}{r(\text{अ}-\text{क})^3} \text{ तार} \\ &= \int \frac{1-2r+r^2}{r(\text{अ}-\text{क})^3} \text{ तार} = \frac{1}{(\text{अ}-\text{क})^3} \left\{ \text{लार}-2\text{र} + \frac{\text{र}^2}{2} \right\} \text{ इसमें र के स्थान में} \end{aligned}$$

$\frac{\text{य}-\text{अ}}{\text{य}-\text{क}}$ का उत्थापन देने से य के रूप में ऊपर का चल सिद्ध हो जायगा ।

यहाँ यदि $\text{अ} = \text{क}$ तो ऊपर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा ।

२२। $\frac{\text{य}^{m+1}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{गय})^n}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ m और n अभिन्न

$$\text{संख्या हैं और } \text{य} = \frac{\text{र अ}}{\text{ग}}$$

मानो कि $\text{अ} + \text{गय}^2 = \text{र}$ तो $\text{तार} = 2\text{गयताय}$. $\text{ताय} = \frac{\text{तार}}{2\text{गय}}$ ।

इन का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \frac{\text{य}^{m+1}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{गय}^2)^n} &= \frac{\text{य}^m \times \text{यताय}}{\text{र}^n} = \frac{\text{य}^m \text{तार}}{2\text{गर}^n} = \frac{(\text{य})^m \text{तार}}{2\text{गर}^n} \\ &= \frac{(\text{र}-\text{अ})^m \text{तार}}{2\text{ग}^{m+1}\text{र}^n} \text{ यह ऐसे रूप में आ गया जिसका चल द्वियुक्पद-} \end{aligned}$$

सिद्धान्त से ला सकते हो ।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि $\frac{\text{फ}(\text{य}^2) \text{यताय}}{(\text{अ}+\text{गय}^2)^n}$ इस का चलानयन भी अत्यन्त सुगम है यदि $\text{फ}(\text{य}^2)$ में य^2 का कोई अभिन्न ही घात हो तो ।

२३। $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^n-1}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ n धन और अभिन्न है

मानो कि $\text{य}^n-1 = 0$ इस समीकरण से य का एक असम्भव मान अ_2 है तो दूसरा असम्भव मान अ_2^{-1} यह होगा यहाँ

$$\text{अ}_2 = \text{कोज्या} \frac{2\text{तग}}{\text{न}} + \text{ज्या} \frac{2\text{तग}}{\text{न}} \sqrt{-1} \text{ है}$$

(चलनकलन का ८८वाँ प्रक्रम देखो वा डेमाइवर का सिद्धान्त) जहाँ त का मान १, २, ३ इत्यादि धन संख्या है ।

यहाँ १४वें प्रक्रम से $y^n - 1$ इस के एक खण्ड भिन्न का मान जब

$$y = a_2 \quad \text{तो} \quad \frac{1}{n a_2^{n-1}} \frac{1}{(y - a_2)} = \frac{a_2}{n a_2^n (y - a_2)}$$

$$= \frac{a_2}{n(y - a_2)} \quad \text{यह होगा और दूसरे का} \quad \frac{a_2^{-1}}{n(y - a_2^{-1})} \quad \text{यह}$$

जहाँ $y = a_2^{-1}$ इन दोनों खण्डभिन्नो का योग करने से

$$\text{योग} = \frac{1}{n} \left[\frac{a_2}{y - a_2} + \frac{a_2^{-1}}{y - a_2^{-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(a_2 + a_2^{-1})y - 2}{y^2 - (a_2 + a_2^{-1})y + 1} \right\} \text{ऐसा हुआ ।}$$

इस में $a_2 + a_2^{-1} = 2$ के स्थान में २कोज्या $\frac{2t\pi}{n}$ का उत्थापन देने से

$$\text{और} \quad \frac{2t\pi}{n} = \pi \text{ मानने से योग} = \frac{2}{n} \frac{y\text{कोज्या}\pi - 1}{y^2 - 2y\text{कोज्या}\pi + 1} \text{ऐसा होगा}$$

जिस का चल १२वे प्रक्रम के १०वे उदाहरण से

$$\frac{\text{कोज्या}\pi}{n} \text{ ला } (1 - 2y\text{कोज्या}\pi + y^2)$$

$$- \frac{2\text{ज्या}\pi}{n} \text{ स्प } \left[\frac{y - \text{कोज्या}\pi}{\text{ज्या}\pi} \right] \text{ऐसा होगा ।}$$

यहाँ न के सम और विपम के वश से दो भेद होंगे ।

(१) मानो कि $n = 2m$ । इस स्थिति में $y^n - 1 = y^{2m} - 1 = 0$ इस में y के दो मान $+1, -1$ ये सम्भव होंगे, इस लिये

$$\int \frac{\text{ताय}}{y^{2m} - 1} = \frac{1}{2m} \text{ ला } \frac{y - 1}{y + 1}$$

$$+ \frac{1}{2m} \text{ से गुणित कोज्या } \frac{t\pi}{m} \text{ ला } (1 - 2y \text{ कोज्या } \frac{t\pi}{m} + y^2)$$

उनके मान जो त के स्थान में १ से ले $m - 1$ तक उत्थापन देने से हो और उस में

$$- \frac{1}{m} \text{ से गुणित ज्या } \frac{t\pi}{m} \text{ स्प } \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{t\pi}{m}}{\text{ज्या } \frac{t\pi}{m}} \right] \text{ उन के मान}$$

जो त के स्थान में १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हो ।

यहाँ त के स्थान में १, २, ... म—१ इन का उत्थापन देने से जो मान हो उन का योग क्रम से यौ कोज्या $\frac{त\pi}{म}$ ला (१—२ य कोज्या $\frac{त\pi}{म} + य^२$) और

यौ ज्या $\frac{त\pi}{म}$ स्प^{-१} $\left[\frac{य-कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\frac{त\pi}{म}} \right]$ मानो तो ऊपर का समीकरण

$$\int \frac{ताय}{य^{२म-१}} = \frac{१}{२म} ला \frac{य-१}{य+१}$$

$$+ \frac{१}{२म} यौ कोज्या \frac{त\pi}{म} ला (१-२य कोज्या \frac{त\pi}{म} + य^२)$$

$$- \frac{१}{म} यौ ज्या \frac{त\pi}{म} स्प^{-१} \left[\frac{य-कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\frac{त\pi}{म}} \right] \dots \dots (१)$$

(२) कल्पना करो कि न = २ म + १ तो

$$\int \frac{ताय}{य^{२म+१}-१} = \frac{ला(य-१)}{२म+१}$$

$$+ \frac{१}{२म+१} यौ कोज्या \frac{२त\pi}{२म+१} ला(१-२यकोज्या \frac{२त\pi}{२म+१} + य२)$$

$$- \frac{१}{२म+१} यौ ज्या \frac{२त\pi}{२म+१} स्प^{-१} \left[\frac{य-कोज्या\frac{२त\pi}{२म+१}}{ज्या\frac{२त\pi}{२म+१}} \right]$$

यहाँ यौ का मान त के स्थान में १, २, ३ ... म का उत्थापन देने से जानो ।

२४। $\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}-१}$ इस का मान जानना हो जहाँ म, न से छोटा

है तो यहाँ भी पहले के ऐसी क्रिया करने से एक खण्ड भिन्न का मान

$$\frac{अ_२^{म-१}}{न अ_२^{न-१} (य-अ_२)} = \frac{अ_२^म}{न(य-अ_२)} यह$$

और दूसरा $\frac{अ_२^{-म}}{न(य-अ_२^{-१})}$ यह होगा यहाँ भी अ_२, अ_२^{-१} दोनों य के

कोई एक जोड़ा असम्भव मान है । इस लिये दोनों खण्ड भिन्नो का

$$\text{योग करने से } \frac{१}{न} \left[\frac{अ_२^म}{य-अ_२} + \frac{अ_२^{-म}}{य-अ_२^{-१}} \right]$$

$$= \frac{१}{न} \frac{य(अ_२^म + अ_२^{-म}) - (अ_२^{म-१} + अ_२^{-(म-१)})}{य^२ - य(अ_२ + अ_२^{-१}) + १}$$

$$= \frac{२}{न} \frac{\text{यकोज्यामप—कोज्या (म—१) ष}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्याष} + १} \text{ यह हुआ ।}$$

जहाँ प = $\frac{२ता}{न}$ । यहाँ त्रिकोणमिति से यदि कोज्या (म—१)प का मान

कोज्यामप कोज्याष + ज्यामष ज्याष इस रूप में ले आओ तो वही मान

$$\frac{२}{न} \frac{\text{यकोज्यामप—कोज्यामपकोज्याप—ज्यामपज्याप}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्याप} + १}$$

$$= \frac{१}{न} \left\{ \frac{(२य—२कोज्याप)कोज्यामप}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्याप} + १} - २ज्यामप \frac{\text{ज्याप}}{(\text{य—कोज्याप})^२ + ज्याप} \right\}$$

ऐसा हुआ इस लिये १२वें प्रक्रम से

$$\int \frac{\text{य}^{म-१}\text{ताय}}{\text{य}^{न-१}} = \frac{१}{न} \text{ यौ कोज्यामप ला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्याप} + १)$$

$$- \frac{३}{न} \text{ यौज्यामप स्प}^{-१} \left\{ \frac{\text{य—कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \right\} + \frac{१}{न} \text{ ला} (\text{य—१}) + \frac{(-१)^{म}}{न} \text{ ला}(\text{य}+१)$$

यदि न सम हो जहाँ यौ का मान त के स्थान में १ से ले $\frac{न}{३} - १$ तक का उत्थापन देने से है ।

$$\int \frac{\text{य}^{म-१}\text{ताय}}{\text{य}^{न-१}} \text{ इस के मान में असम्भव के वश से जो खण्ड चल है}$$

उन को पहले दो खण्डों में लिखा है और सम्भव के दो चल अन्त में हैं क्यो कि न का मान सम होने से $\text{य}^{न-१} = ०$ इस में य का एक मान + १ दूसरा - १ दो सम्भव आते है और भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न(\text{य}-१)} + \frac{(-१)^{म}}{न(\text{य}+१)} + \frac{२}{न} \text{ यौ} \frac{\text{कोज्यामप}(\text{य—कोज्याप)—ज्यामपज्याप}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्याप} + १}$$

और यदि न विषम हो तो $\text{य}^{न-१} = ०$ इस में य का एक ही सम्भाव्य मान + १ होगा, इस लिये भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न} \frac{१}{\text{य}-१} + \frac{२}{न} \text{ यौ} \frac{\text{कोज्यामप}(\text{य—कोज्याप)—ज्यामपज्याप}}{\text{य}^२ - २\text{यकोज्याप} + १} \text{ यह होगा}$$

तब पहले के ऐसा

$$\int \frac{\text{य}^{म-१}\text{ताय}}{\text{य}^{न-१}} = \frac{१}{न} \text{ ला} (\text{य}-१) + \frac{१}{न} \text{ यौकोज्यामपला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्याप} + १)$$

$$- \frac{२}{न} \text{ यौज्यामप स्प}^{-१} \left[\frac{\text{य—कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \right] \text{ यहाँ त के स्थान में}$$

१, से $\frac{n-1}{2}$ तक का उत्थापन देने से यौ का मान जानना ।

$$२५। \int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} \text{ इस का मान जानना हो जहाँ } m \text{ न से छोटा}$$

है तो यदि न सम हो तो $y^n + 1 = 0$ इस में य का कोई सम्भव मान न आवेगा इस लिये एक सम्भव मान यदि अ_२

$$= \text{कोज्या } \frac{\pi}{n} + \text{ज्या } \frac{\pi}{n} \sqrt{-1} \text{ और दूसरा अ_२' } = \frac{1}{\text{कोज्या } \frac{\pi}{n} + \text{ज्या } \frac{\pi}{n} \sqrt{-1}}$$

= कोज्या $\frac{\pi}{n} - \text{ज्या } \frac{\pi}{n} \sqrt{-1}$ मानो तो एक खण्ड भिन्न का मान

$$\frac{a_2^{m-1}}{a_2^{n-1}(y-a_2)} = - \frac{a_2^m}{n(y-a_2)} \text{ यह और दूसरा } - \frac{a_2^{-m}}{n(y-a_2^{-1})}$$

यह हुआ इस लिये कोई दो मानों का योग

$$= - \frac{2}{n} \frac{\text{कोज्यामष}(y-\text{कोज्याष}) - \text{ज्यामषज्याप}}{y^2 - 2y\text{कोज्याप} + 1} \text{ जहाँ } \phi = \frac{\pi}{n}$$

तब पूर्वप्रकार के ऐसा ।

$$\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} = - \frac{1}{n} \text{ यौकोज्यामपला } (y - 2y\text{कोज्याप} + 1)$$

$$+ \frac{1}{n} \text{ यौज्यामप स्प}^{-1} \frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \text{ जहाँ } \phi \text{ के स्थान में } 1, 2, \phi,$$

७. $n-1$ का उत्थापन दे कर यौ का मान जानना होगा ।

और यदि न विषम हो तो $y^n + 1 = 0$ इस में य का एक मान

-1 यह सम्भाव्य होगा इस लिये

$$\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n} \text{ ला}(y + 1)$$

$$- \frac{1}{n} \text{ यौकोज्यामपला}(y - 2y\text{कोज्याप} + 1) + \frac{2}{n} \text{ यौज्यामप स्प}^{-1} \frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}}$$

यह होगा जहाँ न के स्थान में $1, 2, \phi$ $n-2$ का उत्थान देकर यौ का मान जानना है ।

$$२६। \frac{f(y)}{y^n - 1} \text{ इस का मान खण्ड भिन्न में जानना हो जहाँ}$$

$f(y) = g_0 + g_1 y + g_2 y^2 + \dots + g_{m-1} y^{m-1}$ जहाँ न से म छोटा है वा समान ।

तो न के सम मान में $y^n - 1 = 0$ इस में $y = +1, -1$ ये दो

मान सम्भाव्य है और असम्भव मान में कोई एक जोड़े का मान a_2 , a_2^{-1} मानो तो इन दोनों से उत्पन्न खण्ड भिन्न क्रम से

$\frac{a_2 f(a_2)}{n(y-a_2)}$, और $\frac{a_2^{-1} f(a_2^{-1})}{n(y-a_2^{-1})}$ होंगे, इन दोनों का योग

$$= \frac{1}{n} \frac{\{ a_2 f(a_2) + a_2^{-1} f(a_2^{-1}) \} y - \{ f(a_2) + f(a_2^{-1}) \}}{y - (a_2 + a_2^{-1})y + 1}$$

$$\text{परन्तु } a_2 = \text{कोज्या } \frac{2t^n}{n} + \text{ज्या } \frac{2t^n}{n} \sqrt{-1}$$

$$a_2^{-1} = \text{कोज्या } \frac{2t^n}{n} - \text{ज्या } \frac{2t^n}{n} \sqrt{-1}$$

$$f(a_2) = g_0 + g_1 a_2 + g_2 a_2^2 + g_3 a_2^3 + \dots$$

$$a_2 f(a_2) = g_0 a_2 + g_1 a_2^2 + g_2 a_2^3 + g_3 a_2^4 + \dots$$

$$a_2^{-1} f(a_2^{-1}) = g_0 a_2^{-1} + g_1 a_2^{-2} + g_2 a_2^{-3} + g_3 a_2^{-4} + \dots$$

$$\text{इस लिये } a_2 f(a_2) + a_2^{-1} f(a_2^{-1})$$

$$= 2g_0 \text{कोज्या} p + 2g_1 \text{कोज्या} 2p + \dots + 2g_{m-1} \text{कोज्या} mp$$

$$\text{और } f(a_2) + f(a_2^{-1}) = 2g_0 + g_1 \text{कोज्या} p + g_2 \text{कोज्या} 2p +$$

$$+ 2g_{m-1} \text{कोज्या } (m-1)p$$

$$\text{तब } \frac{f(y)}{y^n - 1} = \frac{f(-1)}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{y+1} + \frac{f(1)}{n} \frac{1}{y-1}$$

$$+ \frac{2}{n} \frac{y \{ g_0 \text{कोज्या} p + \dots + g_{m-1} \text{कोज्या} mp \} y}{y^2 - 2y \text{कोज्या} p + 1}$$

$$= \frac{y \{ g_0 + g_1 \text{कोज्या} p + \dots + g_{m-1} \text{कोज्या} (m-1)p \}}{y^2 - 2y \text{कोज्या} p + 1}$$

यहाँ त के स्थान में १, २, $\frac{n-2}{5}$ का उत्थापन देकर यौ का मान जानना ।

यदि न विषम हो तो $y^n - 1 = 0$ इस में य का एक ही + १ मान सम्भाव्य होगा

इस लिये ऊपर के मान में पहला खण्ड छोड़ देना चाहिये और त के स्थान

में १, २, $\frac{n-2}{5}$ का उत्थापन देकर यौ का मान ले आना चाहिये ।

२७ । इसी प्रकार यदि $\frac{f(y)}{y^n + 1}$ इस का रूप खण्ड भिन्नो में लाना हो तो

ऊपर की युक्ति से ला सकते हो विशेष इतना ही है कि a_2 का

मान $\text{कोज्या } \frac{2t^n}{n} + \text{ज्या } \frac{2t^n}{n} \sqrt{-1}$ यह कल्पना करना चाहिये जहाँ त के स्थान

में १, ३, ५, $n-1$ इत्यादि का उत्थापन देना चाहिये यदि न सम हो

और यदि न विषम हो तो २, ३, ५, \dots $n-2$ का ।

२८ । इस प्रक्रम में क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखा कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं ।

(१) उदा० $\int \frac{य^ताय}{(अ-य)^२}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २२वें प्रक्रम से $५ = २म + १$ $म = २$ । $न = २$ । $ग = -१$ और अ के स्थान में अ और $(अ-य)$ के स्थान में र का उत्थापन देने से ।

$$\begin{aligned} \int \frac{य^ताय}{(अ-य)^२} &= \int \frac{(र-अ)^म तार}{२ग^{म+१} र^n} = \int \frac{(र-अ)^२}{२ग^३ र} तार \\ &= \int \frac{र^३ - २रअ + अ^३}{२ग^३ र} तार = \frac{१}{२ग} \int तार - २अ \int \frac{तार}{र} + अ \int तार र^{-२} \\ &= \frac{१}{२ग} \left[र - २अ लार - \frac{अ}{र} \right] \\ &= -\frac{१}{२ग} \left[अ - य - २अ ला(अ-य) - \frac{अ^२}{अ-य} \right] \\ &= \frac{अ}{२(अ-य)} + \frac{य}{२} + अ ला(अ-य) । स्थिराङ्क $\frac{अ}{२}$ को छोड़ देने से$$

यही उत्तर हुआ ।

(२) उदा० $\int \frac{ताय}{य^म-१}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २३वें प्रक्रम के प्रथम समीकरण से

$न = ४$ । $म = २$ और त के स्थान में १ का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \int \frac{ताय}{य^म-१} &= \frac{१}{२म} ला \frac{य-१}{य+१} \\ &+ \frac{१}{३म} यौकोज्या^{\frac{तन}{म}} ला (य^३ - २यकोज्या^{\frac{तन}{म}} + १) \\ &- \frac{१}{३म} यौज्या^{\frac{तन}{म}} स्प^{-१} \left[\frac{य-कोज्या^{\frac{तन}{म}}}{ज्या^{\frac{तन}{म}}} \right] \\ &= \frac{१}{४} ला \frac{य-१}{य+१} + \frac{१}{४} कोज्या^{\frac{न}{३}} ला (य^३ - २कोज्या^{\frac{न}{३}} + १) \\ &- \frac{१}{४} ज्या^{\frac{न}{३}} स्प^{-१} \left[\frac{य-कोज्या^{\frac{न}{३}}}{ज्या^{\frac{न}{३}}} \right] \\ &= \frac{१}{४} ला \frac{य-१}{य+१} - \frac{१}{४} स्प^{-१} य = \int \frac{ताय}{य^२-१} \text{ यही उत्तर हुआ ।} \end{aligned}$$

(३) उदा० $\int \frac{ताय}{य^६-१}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ भी २३वें प्रक्रम से $n = ६$ । $m = ३$ और t के स्थान में १, २, का उत्थापन देने से क्योंकि $२ = m - १$

यौकोज्या $\frac{१}{३}$ ला $(य^२ - २यकोज्या \frac{१}{३} + १)$

= कोज्या $\frac{१}{३}$ ला $(य^२ - २यकोज्या \frac{१}{३} + १)$

+ कोज्या $\frac{२}{३}$ ला $(य^२ - २यकोज्या \frac{२}{३} + १)$

= $\frac{१}{३}$ ला $(य^२ - य + १) - \frac{१}{३}$ ला $(य^२ + य + १)$

और यौज्या $\frac{१}{३}$ स्प^{-१} $\left[\frac{य-कोज्या \frac{१}{३}}{ज्या \frac{१}{३}} \right]$

= ज्या $\frac{१}{३}$ स्प^{-१} $\left[\frac{य-कोज्या \frac{१}{३}}{ज्या \frac{१}{३}} \right] + ज्या \frac{२}{३}$ स्प^{-१} $\left[\frac{य-कोज्या \frac{२}{३}}{ज्या \frac{२}{३}} \right]$

= $\frac{\sqrt{३}}{२}$ स्प^{-१} $\left[\frac{२य-१}{\sqrt{३}} \right] + \frac{\sqrt{३}}{२}$ स्प^{-१} $\left[\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right]$

इन सब का (१) में उत्थापन देने से

$\int \frac{ताय}{य^६-१} = \frac{१}{६}$ ला $\frac{य-१}{य+१} + \frac{१}{६} \left\{ ला(य^२-य+१) - ला(य^२+य+१) \right\}$

$- \frac{१}{२\sqrt{३}} \left\{ स्प^{-१} \left[\frac{२य-१}{\sqrt{३}} \right] + स्प^{-१} \left[\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right] \right\}$ यही उत्तर हुआ ।

(४) उदा० $\int \frac{ताय}{य^३-१}$ इस का क्या मान है ।

यहाँ २३वें प्रक्रम के (२) समीकरण से $n = ३$ । $m = १$ और $t = १$ । तब

$\int \frac{ताय}{य^{m+१}-१} = \frac{ला(य-१)}{२m+१}$

+ $\frac{१}{२m+१}$ यौकोज्या $\frac{२t-१}{२m+१}$ ला $(१-२कोज्या \frac{२t-१}{२m+१} + य^२)$

- $\frac{२}{२m+१}$ यौज्या $\frac{२t-१}{२m+१}$ स्प^{-१} $\left[\frac{य-कोज्या \frac{२t-१}{२m+१}}{ज्या \frac{२t-१}{२m+१}} \right]$

= $\frac{ला(य-१)}{३} + \frac{१}{३}$ कोज्या $\frac{२-१}{३}$ ला $(१-२कोज्या \frac{२-१}{३} + य^२)$

- $\frac{२}{३}$ ज्या $\frac{२-१}{३}$ स्प^{-१} $\left[\frac{य-कोज्या \frac{२-१}{३}}{ज्या \frac{२-१}{३}} \right]$

$$= \frac{1}{3} \text{ला}(य-१) - \frac{1}{6} \text{ला}(१+य+य^२) - \frac{१}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \text{ला} \frac{(य-१)^२}{य^२+य+१} - \frac{१}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right]$$

(५) उदा० $\int \frac{य^३ताय}{य^६-१}$ इसका मान क्या होगा ।

यहाँ २४वे प्रक्रम से $m=५$ । $n=६$ $t=१, २$ । $p=\frac{२त\pi}{n}=\frac{२\pi}{६}, \frac{४\pi}{६}$, तब

$$\int \frac{य^{m-१}ताय}{य^n-१} = \frac{\text{ला}(य-१)}{n} + \frac{(-१)^m}{n} \text{ला}(य+१)$$

$$+ \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला}(य^२-२यकोज्याप+१)$$

$$- \frac{२}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-१} \left\{ \frac{य-कोज्याप}{ज्याप} \right\}$$

$$= \frac{\text{ला}(य-१)}{६} - \frac{\text{ला}(य+१)}{६} + \frac{1}{६} \left\{ \text{कोज्या} \frac{५+२\pi}{६} \text{ला}(य^२-२यकोज्या \frac{२\pi}{६} + १) \right\}$$

$$+ \frac{1}{६} \left\{ \text{कोज्या} \frac{५ \times ४\pi}{६} \text{ला}(य^२-२यकोज्या \frac{४\pi}{६} + १) \right\}$$

$$- \frac{१}{३} \left\{ \text{ज्या} \frac{५ \times २\pi}{६} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{य-कोज्या \frac{२\pi}{६}}{\text{ज्या} \frac{२\pi}{६}} \right] \right\}$$

$$- \frac{१}{३} \left\{ \text{ज्या} \frac{५ \times ४\pi}{६} \text{स्प}^{-१} \left[\frac{य-कोज्या \frac{४\pi}{६}}{\text{ज्या} \frac{४\pi}{६}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{६} \text{ला} \frac{य-१}{य+१} + \frac{1}{३} \text{ला}(य^२-य+१) - \frac{1}{३} \text{ला}(य^२+य+१)$$

$$+ \frac{१}{२\sqrt{३}} \left\{ \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२य-१}{\sqrt{३}} \right] + \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{६} \text{ला} \frac{य-१}{य+१} + \frac{1}{३} \text{ला} \frac{य^२-य+१}{य^२+य+१} + \frac{१}{२\sqrt{३}} \left\{ \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२य-१}{\sqrt{३}} \right] + \text{स्प}^{-१} \left[\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right] \right\}$$

यही उत्तर हुआ ।

(६) उदा० $\int \frac{य^३ताय}{य^५-१}$ इसका क्या मान है ।

यहाँ भी २४ वें प्रक्रम से $m=४$ । $n=५$ । $t=१, २$, $p=\frac{२\pi}{५}, \frac{४\pi}{५}$ इस लिये

$$\begin{aligned}
& \int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n - 1} = \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला}(y^2 - 2y\text{कोज्या} + 1) \\
& \quad - \frac{2}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \right] \\
& = \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{1}{n} \left\{ \text{कोज्या} \frac{2^n}{1} \text{ला}(y^2 - 2y\text{कोज्या} \frac{2^n}{1} + 1) \right. \\
& \quad \left. + \text{कोज्या} \frac{2^{2n}}{1} \text{ला}(y^2 - 2y\text{कोज्या} \frac{2^{2n}}{1} + 1) \right\} \\
& - \frac{2}{n} \left\{ \text{ज्या} \frac{2^n}{1} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} \frac{2^n}{1}}{\text{ज्या} \frac{2^n}{1}} \right] + \text{ज्या} \frac{2^{2n}}{1} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} \frac{2^{2n}}{1}}{\text{ज्या} \frac{2^{2n}}{1}} \right] \right\} \\
& = \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{1}{n} \left\{ \text{ज्या} 1 \text{ला}(y^2 - 2y\text{कोज्या} 1 + 1) \right\} \\
& \quad - \frac{2}{n} \left\{ \text{कोज्या} 3 \text{ला}(y^2 + 2y\text{ज्या} 5 + 1) \right\} \\
& + \frac{2}{n} \left\{ \text{कोज्या} 1 \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} 1}{\text{ज्या} 1} \right] + \text{ज्या} 3 \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y + \text{कोज्या} 3}{\text{ज्या} 3} \right] \right\} \\
& + \frac{\text{ला}(y-1)}{n} + \frac{\text{ज्या} 1}{n} \left\{ \text{ला}(y^2 - 2y\text{कोज्या} 1 + 1) \right\} \\
& - \frac{\text{ज्या} 1}{n} \left\{ 2\text{कोज्या} 1 \text{ला}(y^2 + y\text{ज्या} 5 + 1) \right\} \\
& + \frac{2\text{कोज्या} 1}{n} \left\{ \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} 1}{\text{ज्या} 1} \right] + 2\text{ज्या} 1 \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y + \text{कोज्या} 3}{\text{ज्या} 3} \right] \right\} \\
& = \int \frac{y^m \text{ताय}}{y^n - 1} \text{ यही उत्तर हुआ ।}
\end{aligned}$$

(७) उदा० $\int \frac{y^m \text{ताय}}{y^2 + 1}$ इसका क्या मान है ।

यहाँ २५वे प्रक्रम से $n = 2$, $m = 1$, $t = 1, 3, 5$ और $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

इस लिये $\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} = -\frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला}(y^2 - 2y\text{कोज्याप} + 1)$

$$+ \frac{2}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}} \right] = \int \frac{y^m \text{ताय}}{y^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4} \left\{ \text{कोज्या } \frac{5\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y \text{कोज्या } \frac{\pi}{4} + 1) + \text{कोज्या } \frac{3\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y \text{कोज्या } \frac{\pi}{4} + 1) \right. \\
 &\quad \left. + \text{कोज्या } \frac{2\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y \text{कोज्या } \frac{\pi}{4} + 1) \right\} \\
 &+ -\frac{1}{4} \left\{ \text{ज्या } \frac{5\pi}{4} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{\pi}{4}}{\text{ज्या } \frac{\pi}{4}} \right] + \text{ज्या } \frac{3\pi}{4} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{\pi}{4}}{\text{ज्या } \frac{\pi}{4}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \text{ज्या } \frac{2\pi}{4} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{\pi}{4}}{\text{ज्या } \frac{\pi}{4}} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ला} (y^2 - y\sqrt{3} + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ला} (y^2 + y\sqrt{3} + 1) \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{2y - \sqrt{3}}{1} \right] + \text{स्प}^{-1} y + \frac{1}{2} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{2y + \sqrt{3}}{1} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \text{स्प}^{-1} (2y - \sqrt{3}) + \text{स्प}^{-1} (2y + \sqrt{3}) \right\} \\
 &\quad + \frac{\text{स्प}^{-1} y}{2} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{ला} \frac{y^2 - y\sqrt{3} + 1}{y^2 + y\sqrt{3} + 1} \text{ यही उत्तर हुआ ।}
 \end{aligned}$$

(८) उदा० $\int \frac{y^3 \text{ताय}}{y^2 + 1}$ इसका क्या मान है ।

यहाँ भी २५वें प्रक्रम से $n = 4$ । $m = 3$ । $t = 1, 2$ । $p = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

इस लिये

$$\int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{y^n + 1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n} \text{ला} (y-1) - \frac{1}{n} \text{यौकोज्यामपला} (y^2 - 2y \text{कोज्या} p + 1)$$

$$+ \frac{2}{n} \text{यौज्यामप स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या} p}{\text{ज्या} p} \right] = \int \frac{y^3 \text{ताय}}{1}$$

$$= -\frac{\text{ला} (y-1)}{4} - \frac{1}{4} \left\{ \text{कोज्या } \frac{5\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y \text{कोज्या } \frac{\pi}{4} + 1) \right.$$

$$\left. + \text{कोज्या } \frac{3\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y \text{कोज्या } \frac{3\pi}{4} + 1) \right\}$$

$$+ \frac{2}{4} \left\{ \text{ज्या } \frac{5\pi}{4} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{\pi}{4}}{\text{ज्या } \frac{\pi}{4}} \right] + \text{ज्या } \frac{3\pi}{4} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{y - \text{कोज्या } \frac{3\pi}{4}}{\text{ज्या } \frac{3\pi}{4}} \right] \right\}$$

$$= -\frac{\text{ला} (y-1)}{4} + \frac{1}{4} \left\{ \text{कोज्या } 3\frac{\pi}{4} \text{ला} (y^2 - 2y \text{कोज्या } 3\frac{\pi}{4} + 1) \right.$$

$$\left. - \text{कोज्या } 7\frac{\pi}{4} \text{ला} (y^2 + 2y \text{कोज्या } 7\frac{\pi}{4} + 1) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \text{ज्या } 36^\circ \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{\text{यकोज्या } 36^\circ}{\text{ज्या } 36^\circ} \right] + \text{ज्या } 92^\circ \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{\text{य} + \text{कोज्या } 92^\circ}{\text{ज्या } 92^\circ} \right] \right\} \\
& = - \frac{\text{ला}(\text{य}-1)}{\sqrt{3}} \\
& + \frac{\text{कोज्या } 36^\circ}{\sqrt{3}} \left\{ \text{ला}(\text{य}^{-2} - 2\text{यकोज्या } 36^\circ + 1) - 2\text{ज्या } 36^\circ \text{ला}(\text{य}^2 + 2\text{यकोज्या } 92^\circ + 1) \right\} \\
& + \frac{2\text{ज्या } 36^\circ}{\sqrt{3}} \left\{ \text{स्प}^{-1} \left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या } 36^\circ}{\text{ज्या } 36^\circ} \right] + 2\text{कोज्या } 36^\circ \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{\text{य} + \text{कोज्या } 92^\circ}{\text{ज्या } 92^\circ} \right] \right\}
\end{aligned}$$

यही उत्तर हुआ ।

(९) उदा० $\int \frac{2+y^2}{y^6-1} \text{ ताय}$ इस का क्या मान होगा ।

यहाँ २६वें प्रक्रम से $g_0 = 2$ । $g_1 = 0$ । $g_2 = 1$ । $f(y) = 2 + y^2$ । $n = 6$
और, $t = 1, 2$ । $p = \frac{2}{6}, \frac{4}{6}$ इस लिये

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)}{y^6-1} &= \frac{f(-1)}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{y+1} + \frac{f(1)}{n} \frac{1}{y-1} \\
&+ \frac{2}{3} \frac{\text{यौ}(\text{ग}_0 \text{कोज्या } p + \text{ग}_{m-1} \text{कोज्या } m p)}{y^2 - 2\text{यकोज्या } p + 1} \\
&= \frac{\text{यौ} \{ \text{ग}_0 + \text{ग}_1 \text{कोज्या } p + \text{ग}_{m-1} \text{कोज्या } (m-1)p \}}{y^2 - 2\text{यकोज्या } p + 1} \\
&= -\frac{1}{3} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{y-1} + \frac{1}{3} \frac{(2\text{कोज्या } \frac{2\pi}{6} + \text{कोज्या } \frac{4\pi}{6}) \text{य} - 2 - \text{कोज्या } \frac{4\pi}{6}}{y^2 - 2\text{यकोज्या } \frac{2\pi}{6} + 1} \\
&+ \frac{1}{3} \frac{(2\text{कोज्या } \frac{4\pi}{6} + \text{कोज्या } \frac{2\pi}{6}) \text{य} - 2 - \text{कोज्या } \frac{2\pi}{6}}{y^2 - 2\text{यकोज्या } \frac{4\pi}{6} + 1} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{y+1} + \frac{1}{3} \frac{(1-1)\text{य} - 2 + \frac{1}{2}}{y^2 - \text{य} + 1} + \frac{1}{3} \frac{(-1+1)\text{य} - 2 + \frac{1}{2}}{y^2 + \text{य} + 1} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{y^2 - \text{य} + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{y^2 + \text{य} + 1} = \frac{2+y^2}{y^6-1}
\end{aligned}$$

इस लिये $\int \frac{2+y^2}{y^6-1} \text{ ताय} = \frac{1}{3} \text{ला} \frac{\text{य}-1}{\text{य}+1} - \frac{1}{3} \int \frac{\text{ताय}}{y^2 - \text{य} + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{\text{ताय}}{y^2 + \text{य} + 1}$

$$= \frac{1}{3} \text{ला} \frac{\text{य}-1}{\text{य}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2\text{य}+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{स्प}^{-1} \frac{2\text{य}-1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ ला } \frac{y-1}{y+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\text{स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \text{स्प}^{-1} \frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right]$$

यही उत्तर हुआ ।

इस तरह से विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरणों के रूप के अनुसार जहाँ जिस प्रक्रम का प्रयोजन पड़े उसे अच्छी तरह से समझ कर चलराशि का मान ले आवें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

$$१। \int \frac{2y+3}{y^3+y^2-2y} \text{ ताय} = \frac{1}{6} \text{ ला } \frac{(y-1)^2}{y+2} - \frac{3}{2} \text{ लाय} ।$$

$$२। \int \frac{y^2-3}{y^3-9y+6} \text{ ताय} = \frac{1}{6} \text{ ला } \left\{ (y-2)^2(y+3)^2 \right\} + \text{ला} \left\{ (y-1)^2 \right\}$$

$$३। \int \frac{(2y+1)}{y(y+1)(y+2)} \text{ ताय} = \text{ला} \left\{ \frac{(y+1)\sqrt{y}}{(y+2)^{\frac{3}{2}}} \right\} ।$$

$$४। \int \frac{9y^2 \text{ ताय}}{y^4-y^2-12} = \text{ला} \left[\frac{y-2}{y+2} \right] + \sqrt{3} \text{ स्प}^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{3}} \right) ।$$

$$५। \int \frac{6 \text{ ताय}}{y^3-1} = \text{ला} \frac{(y-1)^2}{y^2+y+1} - 2\sqrt{3} \text{ स्प}^{-1} \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$$

$$६। \int \frac{2y^2 \text{ ताय}}{y^4+9y+12} = y^2-18y+12 \text{ ला } (y+3)-48 \text{ ला } (y+3) ।$$

$$७। \int \frac{8ay^2-12a^3}{y^3-a^3} \text{ ताय} = 10 \text{ स्प}^{-1} \frac{y}{a} - \text{ला} \frac{y-a}{y+a} ।$$

$$८। \int \frac{6y^2 \text{ ताय}}{y^4+y^2-2} = \text{ला} \frac{y-1}{y+1} + 2\sqrt{2} \text{ स्प}^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$९। \int \frac{(12y-6) \text{ ताय}}{y^3-y^2-2y} = 3 \text{ लाय} + 4 \text{ ला}(y-2) - 4 \text{ ला}(y+1) ।$$

$$१०। \int \frac{8 \text{ ताय}}{y(y^2+y^2+y+1)} = \text{ला} y^2 - \text{ला}(y+1)^2 - \text{ला}(y^2+1) - 2 \text{ स्प}^{-1} y ।$$

$$११। \int \frac{8 \text{ ताय}}{(y-1)(y^2+1)} = \text{ला}(y^2+1) - \text{ला}(y-1)^2 - \frac{1}{y-1}$$

$$- \frac{1}{y^2+1} + \text{स्प}^{-1} y ।$$

$$१२। \int \frac{१०० य ताथ}{(१ \times २य)^०(१+य+य+य^२)} = \frac{४०}{१+२य} - ला (१+य)^{१०} \\ - ला(१+य)^० + ला (१ \times २य)^{१०} + २ स्प^{-१} य।$$

$$१३। \int \frac{४य^३ताथ}{य^४+१} = \frac{१}{\sqrt{२}} ला \frac{य^३-य\sqrt{२}+१}{य^३+य\sqrt{२}+१} \\ + \sqrt{२} \left\{ स्प^{-१}(य\sqrt{२}+१) + स्प^{-१}(य\sqrt{२}-१) \right\}$$

$$१४। \int \frac{१२य^३ताथ}{य^६+१} = ला \frac{य^३-य+१}{य^३+२य+१} \\ + २\sqrt{३} \left\{ स्प^{-१}(२य-\sqrt{३}) - स्प^{-१}(२य+\sqrt{३}) \right\}$$

$$१५। \int \frac{८ ताथ}{य^८+य^६-य^४-य^२} = ला \frac{१-य}{१+य^२} + ९ ला (१+य) - ८ लाय \\ + \frac{४}{य^३} - \frac{८}{य} + \frac{२य}{य+१} - २ स्प^{-१}य।$$

$$१६। \int \frac{य^३ताथ}{(अ^२+गय)^३} = -\frac{१}{४ग^२(अ^२+गय)^३} + \frac{अ}{६ग^२(अ^२+गय)^३}।$$

$$१७। \int \frac{य^३ताथ}{(१+य)^३} = \frac{१}{य+१} - \frac{१}{४(य+१)^२} + \frac{१}{३} ला (य+१)।$$

$$१८। \int \frac{(८य-२०)ताथ}{(य+३)(य+१)^३} = \frac{१४}{य+१} + ११ ला \left[\frac{य+१}{य+३} \right]$$

$$१९। \int \frac{(अ^३-क^३)ताथ}{ज्याय(अ+ककोज्याय)} = (अ+क)ला(ज्याय^३) - (अ-क)ला(कोज्याय^३) \\ + कला(अ+ककोज्याय)$$

यहाँ ज्याय = २ मान क्रिया करने में शीघ्र चल ज्ञान होगा ।

$$२०। \int \frac{ताथ}{३ज्याय+ज्या२य} = लाज्याय^३ - \frac{१}{३}लाकोज्याय^३ + \frac{१}{३}ला(३+२कोज्याय)।$$

$$२१। \int \frac{तार}{(१-र^३)^{\frac{१}{३}}} = \frac{१}{६}ला(य^३+य+१) - \frac{१}{३}ला(य-१) - \frac{१}{\sqrt{३}} स्प^{-१} \left(\frac{२य+१}{\sqrt{३}} \right)।$$

यदि $१-र^३ = र^३य$ ।

$$२२। \int \frac{ताथ}{(य+१)(३य^३+३य+१)^{\frac{१}{३}}} = \int \frac{तार}{(१-र^३)^{\frac{१}{३}}} यदि र = \frac{य}{१+य}।$$

$$२३। सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो $\frac{फ(य)}{य^३+१}$$$

$$= \frac{2}{n} \frac{\text{यौ } \{ g_0 \text{ कोज्या } \phi + g_1 \text{ कोज्या } 2\phi + \dots + g_{m-1} \text{ कोज्या } m\phi \}}{y^2 - 2y \text{ कोज्या } \phi + 1}$$

$$\frac{\text{यौ } \{ g_0 + g_1 \text{ कोज्या } \phi + \dots + g_{m-1} \text{ कोज्या } (m-1)\phi \}}{y^2 - 2y \text{ कोज्या } \phi + 1}$$

जहाँ $f(y) = g_0 + g_1 y = m_0 y^0 + \dots + g_{m-1} y^{m-1}$ और $m < n$
 यहाँ ϕ का मान $= \frac{2\pi}{n}$ जहाँ $t = 1, 2, \dots, n-1$ है ।

२४ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{2+y^2}{1+y^2} \text{ ताय} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ला } \frac{y^2 + y\sqrt{3} + 1}{y^2 - y\sqrt{3} + 1}$$

$$+ \frac{2}{3} \{ \text{स्प}^{-1}(2y + \sqrt{3}) + \text{स्प}^{-1}(2y - \sqrt{3}) \} + \frac{1}{3} \text{स्प}^{-1}y$$

२५ । एक महाजन के प्रतिक्षण की आमदनी में, संचित धन के वर्ग में एक घटा कर जो शेष रहे उसका भाग देने से जो लब्ध हो उतनी प्रतिक्षण में उस के गुमाश्ते की आमदनी है तो बताओ जिस समय महाजन के संचित धन का प्रमाण १००००० है उस समय गुमाश्ते के धन का क्या प्रमाण होगा ।

उत्तर, गुमाश्ते को उस समय

०.०००००९९४ इतना ऋण हो गया था ।

इति द्वितीयोध्याय ।



तृतीयाध्याय ।

लघूकरणपरम्परा के विषय में ।

$$२९। कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} = \text{चन}।$$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}-१}} = \text{चन}-१। \text{ इत्यादि मानो ।}$$

और $\frac{१}{\text{य}^२ + \text{अ}^२} = \text{त}$, तो खण्डचलानयन से

$$\text{चन} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} + २\text{न} \int \frac{\text{य}^२\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}+१}}$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{य}^२\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}+१}} = \frac{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}+१}} - \frac{\text{अ}^२\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}+१}}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} - \frac{\text{अ}^२\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}+१}}$$

$$\text{इस लिये } \text{चन} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}}$$

$$+ २\text{न} \left\{ \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} - \text{अ}^२ \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}+१}} \right\}$$

$$= \frac{\text{य}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} + २\text{न} \text{चन} - २\text{न}\text{अ}^२\text{चन}+१$$

पक्षान्तरानयन से

$$२\text{न} \text{अ}^२\text{चन}+१ = \frac{\text{य}}{(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} + (२\text{न}-१) \text{चन}$$

$$\text{इस लिये } \text{चन}+१ = \frac{\text{य}}{२\text{न}\text{अ}^२(\text{य}^२ + \text{अ}^२)^{\text{न}}} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}} \text{चन} = \frac{\text{यत}^{\text{न}}}{२\text{न}\text{अ}} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}} \text{चन}$$

इसमें न के स्थान में न-१ का उत्थापन देने से

$$\text{चन} = \frac{\text{यत}^{\text{न}-१}}{\text{अ}^२(२\text{न}-२)} + \frac{२\text{न}-३}{\text{अ}^२(२\text{न}-२)} \text{चन}-१ \quad \cdot (१)$$

यही (१) समीकरण १८वें प्रक्रम के (१) उदाहरण के (अ) सिद्धान्त में भी सिद्ध हुआ है ।

देखो यहाँ चन का मान चन-१ के अधीन है और चन-१ का मान

(१) इसी में न के स्थान में न-१ का उत्थापन देने से

$$\frac{यत^{n-2}}{अ^2(2n-4)} + \frac{2n-4}{अ^2(2n-4)} चन-2 \text{ यह होगा ।}$$

इसी प्रकार

$$चन-2 = \frac{यत^{n-3}}{अ^2(2n-6)} + \frac{2n-6}{अ^2(2n-6)} चन-3$$

⋮

$$च_1 = \frac{1}{अ} स्प^{-1} \frac{य}{अ}$$

यहाँ जिस प्रकार से $च_n, च_{n-1}, च_{n-2}, \dots$ इत्यादि के मान सिद्ध हुए हैं इसे लघूकरण सिद्धान्त कहते हैं। इसके बल से अनेक चल का ज्ञान हो जाता है। इसके अनेक भेद हैं थोड़ा सा यहां प्रकाश किया जायगा। परन्तु इतना स्मरण रखना चाहिये कि लघूकरण सिद्धान्त से अन्त का चल नहीं सिद्ध होता है उस के लिये पिछले अध्यायों की क्रिया करनी पड़ेगी। जैसे इसी प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि n के स्थान में १ का उत्थापन दो तो

$$च_1 = \frac{यत^{1-1}}{अ^2(2-2)} + \frac{2-2}{अ^2(2-2)} च_0 = \infty \text{ । इस से देखो } च_1 \text{ का मान अनन्त}$$

सिद्ध होता है परन्तु पूर्व कल्पना से $च_1 = \int \frac{ताय}{य^2 + अ^2}$ और यह प्रथमाध्याय

से $\frac{1}{अ} स्प^{-1} \frac{य}{अ}$ इस के तुल्य है।

इस लिये $च_1 = \frac{1}{अ} स्प^{-1} \frac{य}{अ}$ इस का उत्थापन देने से

$$च_2 = \frac{तय}{2अ^2} + \frac{1}{2अ^2} स्प^{-1} \frac{य}{अ}$$

$$च_3 = \frac{त^2य}{4अ^2} + \frac{3तय}{2 \cdot 4अ^2} + \frac{3}{2 \cdot 4अ^2} स्प^{-1} \frac{य}{अ}$$

$$च_4 = \frac{त^3य}{6अ^2} + \frac{5त^2य}{4 \cdot 6अ^2} + \frac{5 \cdot 3तय}{2 \cdot 4 \cdot 6अ^2} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6अ^2} स्प^{-1} \frac{य}{अ}$$

इत्यादि सिद्ध होते चले जायेंगे।

३०। यदि $च_{m,n} = \int \frac{य^m ताय}{(अ^2 + य^2)^n}$ तो खण्डचलानयन से

$$\begin{aligned} \text{च}_{म,न} &= \int y^{म-१} \frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न} = \int y^{म-१}ता, - \frac{१}{२न-२} \frac{१}{(अ^२+य^२)^{न-१}} \} \\ &= - \frac{१}{२न-२} \frac{य^{म-१}}{(अ^२+य^२)^{न-१}} + \frac{म-१}{२न-२} \cdot \int \frac{य^{म-२}ताय}{(अ^२+य^२)^{न-१}} \\ &= - \frac{१}{२न-२} \frac{य^{म-१}}{(अ^२+य^२)^{न-१}} + \frac{म-१}{२न-२} \text{च}_{म-२,न-१} \end{aligned}$$

इस सिद्धान्त से बार बार क्रिया करने से $\text{च}_{म-२,न-१}$ । $\text{च}_{म-४,न-३}$ इत्यादि का मान जान सकते हो । अन्त मे $म$ और $न$ के वश से $\int \frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न}$ ।

इस रूप का चल जानना पड़ेगा यदि $म$ विषम और $न$ से इतना छोटा हो कि $म-२इ=१$ और $न-इ>१$ । अथवा यदि $न$ से $म$ ऐसा बड़ा हो जहाँ बार बार क्रिया करने से अन्त मे $न-इ=१$, $म-२इ>१$ ।

तो अन्त के चल का रूप $\int \frac{य^{न}ताय}{अ^२+य^२}$ ऐसा होगा । इस लिये $\int \frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न}$

$$= \frac{१}{३} \int २ य ताय (अ^२+य^२)^{-न}$$

$$= - \frac{१}{२न-२} \frac{१}{(अ^२+य^२)^{न-१}} \text{ यह पहली स्थिति मे अन्त के चल का}$$

मान होगा । जहाँ $न$ कोई अभिन्न संख्या है । और दूसरी स्थिति के चल

का मान साधारण भाग की रीति से $\int \frac{य^{न}ताय}{अ^२+य^२}$ इस का $\int फ(य)$

$$+ \int \frac{कताय}{अ^२+य^२} \text{ ऐसा रूप बनाकर जहाँ } फ(य) = \{ ग_n य^n + ग_{n-२} य^{n-२} + \dots ग_० \}$$

७वें प्रक्रम से सहज मे जान सकते हो ।

कभी $म$ के सम होने पर $\int \frac{ताय}{(अ^२+य^२)^न}$ ऐसा रूप भी अन्त मे रहेगा

जिस का चल २९वे प्रक्रम से व्यक्त हो जायगा । जैसे

$$\text{यहाँ भी यदि } \frac{१}{अ^२+य^२} = त \text{ तो}$$

$\int य^{त}ताय$, इस का मान $\int य^{त}ताय$, $\int य^{३त}ताय$, $\int य^{५त}ताय$ इसके

$\int य^{७त}ताय$, इस का मान $\int य^{७त}ताय$, $\int य^{९त}ताय$, $\int य^{११त}ताय$,

$\int य^{१३त}ताय$ इस के

और $\int y^r t^s$ ताय इस का मान, $\int y^r t^s$ ताय, $\int y^r t^s$ ताय, $\int y^r t^s$ ताय,
 $\int t^r$ ताय
 इनके अधीन हैं

३१। कल्पना करो कि $t = \text{आय}^{\text{अ}} + \text{काय}^{\text{क}}$ और $\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \int y^{\text{म}} t^{\text{न}}$ ताय
 तो $y^{\text{म}} t^{\text{न}} = y^{\text{म}} (\text{आय}^{\text{अ}} + \text{काय}^{\text{क}}) t^{\text{न}-1} = \text{आय}^{\text{म+अ}} t^{\text{न}-1}$
 + $\text{काय}^{\text{म+क}} t^{\text{न}-1}$ चलज्ञान करने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \text{आच}_{\text{म+अ},\text{न}-1} + \text{काच}_{\text{म+क},\text{न}-1} \quad \dots \quad (१)$$

परन्तु खण्डचलानयन से $\int y^{\text{म+१}} t^{\text{न}} = \frac{y^{\text{म+१}} t^{\text{न}}}{\text{म+१}} - \frac{१}{\text{म+१}} \int y^{\text{म+१}} t^{\text{न}}$ ताय

$$= \frac{y^{\text{म+१}} t^{\text{न}}}{\text{म+१}} - \int \frac{y^{\text{म+१}}}{\text{म+१}} t^{\text{न}-1} (\text{आय}^{\text{अ}-1} + \text{काय}^{\text{क}-1}) \text{ताय}$$

$$= \frac{y^{\text{म+१}} t^{\text{न}}}{\text{म+१}} - \frac{\text{नअ}}{\text{म+१}} \text{आय}^{\text{म+१}} t^{\text{न}-1} \text{ताय} - \frac{\text{नक}}{\text{म+१}} \int \text{काय}^{\text{म+क}} t^{\text{न}-1} \text{ताय}$$

$$= \frac{y^{\text{म+१}} t^{\text{न}}}{\text{म+१}} - \frac{\text{नअ}}{\text{म+१}} \text{आच}_{\text{म+अ},\text{न}-1} - \frac{\text{नक}}{\text{म+१}} \text{काच}_{\text{म+क},\text{न}-1} \quad \dots \quad (२)$$

(१) और (२) से $\text{काच}_{\text{म+क},\text{न}-1}$ को उड़ा देने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{y^{\text{म+१}} t^{\text{न}}}{\text{म+नक+१}} + \frac{\text{नक-नअ}}{\text{म+नक+१}} \text{आच}_{\text{म+अ},\text{न}-1} \quad \dots \quad (३)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त हुआ यदि न धन संख्या हो तो ।

जैसे $\int y^{10} t^3$ ताय इस का मान जानना हो तो यहाँ इसी सिद्धान्त

से तीन बार क्रिया करने से $\int y^{10+अ} t^3$ ताय, $\int y^{10+२अ} t^3$ ताय

इन का मान व्यक्त हो जायगा अन्त में $\int y^{10+३अ} t^3$ ताय यह रह जायगा ।

यदि न का मान ऋण हो तो पहले (३) से छेदगम कर, समशोध-

नादि से $\text{च}_{\text{म+अ},\text{न}-1} = - \frac{y^{\text{म+१}} t^{\text{न}}}{(\text{क-अ})\text{नआ}} + \frac{\text{म+नक+१}}{(\text{क-अ})\text{नआ}} \text{च}_{\text{म},\text{न}}$ ऐसा

समीकरण बना कर इस में म के स्थान में म-अ का और न के स्थान से -(न-१) का उत्थापन देने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{y^{\text{म-अ+१}} t^{-(\text{न}-१)}}{(\text{क-अ})(\text{न}-१)\text{आ}} - \frac{\text{म-अ}-(\text{न}-१)\text{क+१}}{(\text{क-अ})(\text{न}-१)\text{आ}} \text{च}_{\text{म-अ}-(\text{न}-१)} \dots (४)$$

इसी प्रकार (१) और (२) से

$$y^{m+1}t^n = (m+1)अच_{m,n-1} + (m+n+1)कच_{m+1,n-1} \\ + (m+2n+1)गच_{m+2,n-1} \dots \dots (४)$$

(४) में म के स्थान में $m-2$ का और न के स्थान में $n+1$ का उत्थापन देने से और समशोधनादि से

$$च_{m,n} = \frac{y^{m-1}t^{n+1}}{ग(m+2n+1)} - \frac{(m+n)}{ग(m+2n+1)} च_{m-1,n} - \frac{अ(m-1)}{ग(m+2n+1)} च_{m-2,n} \quad (५)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त $च_{m,n}$ का मान जानने के लिये य के उत्तरोत्तर घात हास में उत्पन्न हुआ ।

(५) में म के स्थान में m का और न के स्थान में $n+1$ का उत्थापन देने से

$$च_{-m,n} = - \frac{t^{n+1}}{अ(m-1)y^{m-1}} - \frac{क(m-n-2)}{अ(m-1)} च_{-(m-1),n} \\ - \frac{ग(m-2n-3)}{अ(m-1)} च_{-(m-2),n} \dots \dots (६)$$

यह म के ऋण मान में लघूकरणसिद्धान्त उत्पन्न हुआ ।

३३ । ३१वें प्रक्रम में यदि $t = आय^अ + कायक$ इस में $क = ०$ तो

$t = का + आय^अ$ ऐसा हुआ और (१), (२) इत्यादि समीकरण में क के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$च_{m,n} = आच_{m+अ,n-1} + काच_{m,n-1} \dots \dots (१)$$

$$च_{m,n} = \frac{y^{m+1}t^n}{m+1} - \frac{नअआ}{m+1} च_{m+अ,n-1} \dots \dots (२)$$

$$च_{m,n} = \frac{y^{m+1}t^n}{m+1} - \frac{नअआ}{m+1} च_{m+अ,n-1} \dots \dots (३)$$

$$च_{m,-n} = - \frac{y^{m-अ+1}t^{-(n-1)}}{अआ(n-1)} + \frac{म-अ+1}{अआ(n-1)} च_{m-अ,-(n-1)} \dots \dots (४)$$

$$च_{m,n} = + \frac{y^{m-अ+1}t^{n+1}}{अआ(n+1)} - \frac{म-अ+1}{अआ(n+1)} च_{m-अ,n+1} \dots \dots (५)$$

यदि $n = -n$

$$y^{m+1}t^n = (m+nअ+1)आच_{m+अ,n-1} + (m+1)काच_{m,n-1} \dots \dots (५)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ-१}त^{न+१}}{आ(म+नअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+नअ+१)} काच_{म-अ,न} \quad (६)$$

ऐसे ६ समीकरण उत्पन्न होते हैं इन पर से अनेक चलज्ञान सहज में हो जाते हैं । वे छवो समीकरण यदि वास्तव में विचारो तो ३१वे प्रक्रम के उदाहरण रूप हैं । इन पर से टाडहन्टर (Todhunter) साहब ने चलराशिकलन के ३०वें प्रक्रम में जो क्रिया की है वह भी उत्पन्न हो जाती है ।

यहां (२) से

$$च_{+अ,न-१} = \frac{य^{म-१}त^{न}}{नअथा} - \frac{म+१}{नअथा} च_{म,न} \text{ इसका उत्थापन (१) में देने से}$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{नअ} - \frac{म+१}{नअ} च_{म,न} + काच_{म,न-१},$$

$$\text{इस लिये } च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+नअ+१} + \frac{कानअ}{म+नअ+१} च_{म,न-१} \quad (७)$$

यहां न के स्थान में न+१ का उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)} च_{म,न+१} \quad (८)$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो ।

३४ । इस प्रक्रम में पूर्व समीकरणों की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) $य^n(ग^2-य^2)^{-\frac{1}{2}}$ ताय इसका चल क्या है ।

यहां यदि का = ग^२, आ = -१, अ = २, न = - $\frac{१}{२}$ कल्पना करो तो ३३वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से

$$\begin{aligned} च_{म,न} &= \frac{य^{म-अ-१}त^{न+१}}{आ(म+नअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+नअ+१)} काच_{म-अ,न} \\ &= \frac{य^{म-२}(ग^2-य^2)^{-\frac{1}{2}+१}}{-१(म+२ \times -\frac{१}{२}+१)} - \frac{म-२+१}{-१(म+२ \times \frac{१}{२}+१)} ग^2 \int य^{म-३}(ग^2-य^2)^{-\frac{१}{२}} ताय \\ &= -\frac{य^{म-१}\sqrt{ग^2-य^2}}{म} + \frac{(म-१)ग^2}{म} \int य^{म-३}(ग^2-य^2)^{-\frac{१}{२}} ताय, \text{ ऐसा हुआ ।} \end{aligned}$$

गण्डचलानयन से भी

$$\int य^n(ग^2-य^2)^{-\frac{१}{२}} ताय = -\int य^{म-१}ता (ग^2-य^2)^{+\frac{१}{२}}$$

$$= -y^{m-2} \sqrt{g^2 - y^2} + (m-1) \int y^{m-2} \sqrt{g^2 - y^2} \text{ ताय}$$

$$= -y^{m-2} \sqrt{g^2 - y^2} + (m-1) \int \frac{y^{m-2}(g^2 - y^2) \text{ ताय}}{\sqrt{g^2 - y^2}}$$

$$= -y^{m-2} \sqrt{g^2 - y^2}$$

$$-(m-1) \int y^m \sqrt{2(g^2 - y^2)}^{\frac{1}{2}} \text{ ताय} + (m-1)g^2 \int \frac{y^{m-2}}{\sqrt{g^2 - y^2}} \text{ ताय}$$

इस लिये पक्षान्तरानयन से

$$\int y^m (g^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{y^{m-1} \sqrt{g^2 - y^2}}{m}$$

$$+ \frac{(m-1)g^2}{m} \int y^{m-2} (g^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ ताय}$$

इस तरह से वही सिद्ध हुआ जो पहले (६)वें समीकरण से हुआ था भेद इतनाही है कि पहले प्रकार से लाघव और दूसरे से गौरव है ।

$$(२) \int \frac{\text{ताय}}{y^m (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ इसका मान जानना है ।}$$

यहाँ यदि $m = -m$, $n = -\frac{1}{2}$, $आ = a^2$, $अ = 0$, $का = 1$, $क = 2$ मानो तो ३१वें प्रक्रम के ६वें समीकरण से

$$\text{च}_{m,n} = \frac{y^{m-अ+१} t^{n+१}}{(m+nअ+१)आ} - \frac{m+(n+१)क-अ+१}{(m+nअ+१)आ} \text{ काच}_{m-अ+क,n}$$

$$= \frac{y^{-m+१} t^{-\frac{1}{2}+१}}{(-m+१)a^2} - \frac{-m+(-\frac{1}{2}+१)२+१}{(-m+१)a^2} \text{ च}_{(-m+२,n)}$$

$$= -\frac{\sqrt{t}}{a^2(m-१)y^{m-१}} + \frac{-m+१+१}{a^2(m-१)} \int a^{-m+२}(a^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ ताय}$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{a^2(m-१)y^{m-१}} - \frac{m-२}{a^2(m-१)} \int \frac{\text{ताय}}{y^{m-२} \sqrt{a^2 + y^2}} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

इसी उदाहरण को खण्डचलानयन से भी कर सकते हो । जैसे

$$\int \frac{\text{ताय}}{y^m \sqrt{a^2 + y^2}} = \int \frac{१}{y^{m+१}} \text{ ताय} \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y^{m+१}} + (m+१) \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y^{m+२}} \text{ ताय}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y^{m+१}} + (m+१) \int \frac{a^2 + y^2}{y^{m+२} \sqrt{a^2 + y^2}} \text{ ताय}$$

समशोधनादि से

$$अ^m(m+1) \int \frac{ताय}{य^{m+2}\sqrt{अ^2+य^2}} = -\frac{\sqrt{अ^2+य^2}}{य^{m+1}} - m \int \frac{ताय}{य^m\sqrt{अ+य}}$$

म के स्थान में म-२ का उत्थापन देकर अ^m(m-१)का भाग दे देने से

$$\int \frac{ताय}{य^m\sqrt{अ^2+य^2}} = -\frac{\sqrt{अ^2+य^2}}{अ^m(m-१)य^{m-१}} - \frac{म-२}{अ^m(m-१)} \int \frac{ताय}{य^{m-२}\sqrt{अ+य}}$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

$$(३) \int \frac{य^mताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} \text{ इसका क्या मान है ।}$$

यहाँ $\frac{य^mताय}{\sqrt{२अय-य^२}} = य^{m-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{-\frac{१}{२}} ताय$, इस लिये ३३वें प्रक्रम के (८)वें

समीकरण से (यदि का = २अ, आ = -१, अ = १, क = ०, म = म - $\frac{१}{२}$, न = - $\frac{१}{२}$)

$$च_{म,न} = -\frac{य^{m+१}त^{n+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)} च_{म-\frac{१}{२},न}$$

$$= -\frac{य^{m-\frac{१}{२}+१}त^{-\frac{१}{२}+१}}{२अ(-\frac{१}{२}+१)} + \frac{म-\frac{१}{२}-\frac{१}{२},+१+१}{२अ(-\frac{१}{२}+१)} च_{म-\frac{१}{२},न+१}$$

$$= -\frac{य^{m+\frac{१}{२}}त^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ} च_{म-\frac{१}{२},न+१}$$

$$= -\frac{य^{m+\frac{१}{२}}(२अ-य)^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ} \int य^{m-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\frac{य^m(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}}}{अ} + \frac{म+१}{अ} \int य^{m-१}(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}} ताय \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

वा ३३वें प्रक्रम के ६वें समीकरण में पूर्वोक्त संख्याओं का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = \int य^{m-\frac{१}{२}}(२अ-य)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\frac{य^{m-१}\sqrt{(२अय-य^२)}}{म} + \frac{अ(२म-१)}{म} \int \frac{य^{m-१}ताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} \text{ ऐसा होगा ।}$$

इसे खण्डचलानयन से भी सिद्ध कर सकते हैं जैसे

$$\int \frac{य^mताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} = य^{m-१} \frac{(य-अ+अ)ताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}} = \int -य^{m-१}ता\sqrt{(२अय-य^२)}$$

$$\begin{aligned}
 & + अ \int \frac{\text{ताय } y^{m-1}}{\sqrt{(2अय-y^2)}} \\
 = & - y^{m-1} \sqrt{(2अय-y^2)} + (म-१) \int y^{m-2} \sqrt{(2अय-y^2)} \text{ताय} \\
 & + अ \int \frac{\text{ताय } y^{m-1}}{\sqrt{(2अय-y^2)}} \\
 = & - y^{m-1} \sqrt{(2अय-y^2)} + (म-१) \int \frac{y^{m-2} (2अय-y^2) \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-y^2)}} \\
 & + अ \int \frac{\text{ताय } y^{m-1}}{\sqrt{(2अय-y^2)}} \\
 = & - y^{m-1} \sqrt{(2अय-y^2)} - (म-१) \int \frac{y^m \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-y^2)}} \\
 & + अ(२म-१) \frac{\text{ताय } y^{m-1}}{\sqrt{(2अय-y^2)}}
 \end{aligned}$$

पक्षान्तरानयन से और म का भाग दे देने से

$$\int \frac{y^m \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-y^2)}} = - \frac{y^{m-1} \sqrt{(2अय-y^2)}}{म} + \frac{अ(२म-१)}{म} \int \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{\sqrt{(2अय-y^2)}}$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

(४) $\int \frac{\text{ताय}}{(य+अ)^n}$ इस का क्या मान होगा ।

यहाँ म = ०, न = -न, आ = १, अ = २, का = अ, इन का ३३वें प्रक्रम के (८)वें में उत्थापन देने से

$$\begin{aligned}
 च_{न,न} = च_{०,-न} &= - \frac{y^{m+1} t^{-n+1}}{\text{काअ}(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{\text{काअ}(न+१)} च_{म,न+१} \\
 &= - \frac{y^{०+१} t^{-न+१}}{२अ(-न+१)} + \frac{०+०-२न+२+१}{२अ(-न+१)} च_{०,-न+१} \\
 &= \frac{१}{(य+अ)^{-न+१}} \frac{य}{२अ(न-१)} + \frac{१न-३}{२अ(न-१)} \int \frac{\text{ताय}}{(य+अ)^{-न+१}}
 \end{aligned}$$

देखो १९वें प्रक्रम से भी यही लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है ।

इस तरह हजारों नये नये सिद्धान्त लघूकरणसिद्धान्तों के बल चलानयन के लिये बना सकते हो ।

३५ । लघूकरणसिद्धान्त के बल से त्रिकोणमिति सम्बन्धि फलों के चल का भी ज्ञान गहन में हो जाता है जैसे यदि

\int फ(ज्याय, कोज्याय) ताय इस का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो

कि ज्याय = r ताय = $\frac{\text{तार}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\text{तार}}{\sqrt{1-r^2}}$ क्योंकि

कोज्याय = $\sqrt{1-r^2}$ इन का उत्थापन देने से

$$\int \text{फ(ज्याय, कोज्याय)ताय} = \int \text{फ} \left\{ r, \sqrt{(1-r^2)} \right\} \frac{\text{तार}}{\sqrt{(1-r^2)}} \quad (1)$$

यहाँ यदि फ(ज्याय, कोज्याय) = ज्यायकोज्याय तो

$$\int \text{फ(ज्याय, कोज्याय) ताय} = \int r^d (1-r^2)^{\frac{1}{2}(d-1)} \text{तार} \dots \quad (2)$$

यदि ३३वें प्रक्रम के समीकरणों में का = १, अ = -१, अ = २, म = द, और न = $\frac{1}{2}(d-1)$ कल्पना करो तो

$$\int r^d (1-r^2)^{\frac{1}{2}(d-1)} \text{तार} = \text{च}_{द, \frac{1}{2}(d-1)} = \text{च}_{द, व} \text{ यदि } \frac{1}{2}(d-1) = व$$

$$\text{च}_{द, व} = - \text{च}_{द+२, व-१} + \text{च}_{द, व-१} \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{च}_{द, व} = \frac{r^{द+१} t^व}{द+१} + \frac{२व}{द+१} \text{च}_{द+२, व-१} \quad (4)$$

$$\text{च}_{द-व} = + \frac{r^{द-१} t^{-(व-१)}}{व-१} - \frac{द-१}{व-१} \text{च}_{द-२, -(व-१)} \quad (5)$$

$$\text{च}_{द, व} = - \frac{r^{द-१} t^{व+१}}{२(व+१)} + \frac{द-१}{(व+१)} \text{च}_{द-२, व+१} \quad (6)$$

$$r^{द+१} t^व = - (द+२व+१) \text{च}_{द+२, व-१} + (द+१) \text{च}_{द, व-१} \quad (7)$$

$$\text{च}_{द, व} = - \frac{r^{द-१} t^{व+१}}{द+२व+१} + \frac{द-१}{द+२व+१} \text{च}_{द-२, व} \quad (8)$$

$$\text{च}_{द, व} = \frac{r^{द+१} t^व}{द+२व+१} + \frac{२व}{द+२व+१} \text{च}_{द, व-१} \quad (9)$$

$$\text{च}_{द, व} = - \frac{r^{द+१} t^{व+१}}{२(व+१)} + \frac{द+२व+२+१}{२(व+१)} \text{च}_{द, व+१} \quad (10)$$

$$\text{च}_{द, व} = \frac{r^{द+१} t^{व+१}}{द+१} + \frac{द+२(व+१)+१}{द+१} \text{च}_{द+२, व} \quad \dots \quad (11)$$

यदि ३१वें प्रक्रम के ६वें समीकरण में का, क के स्थान में आ, अ के

उत्थापन दो और आ, अ के स्थान में का, क का तो पिछला सिद्धान्त उत्पन्न होगा ।

(२) मे यदि $ध-१=०$ अर्थात् $ध=१$ मानो तो $व=०$ इनका उत्थापन (८)वें में देने से

$$\begin{aligned} च_{द,०} &= \int ज्या^{द-१} कोज्याय ताय = -\frac{ज्या^{द-१}कोज्या^{१}य}{द+१} + \frac{द-१}{द+१} च_{द-२,०} \\ &= \frac{ज्या^{द-१}कोज्या^{१}य}{द+१} + \frac{द-१}{द+१} \int ज्या^{द-२}कोज्यायताय \end{aligned}$$

इसी प्रकार $\int र^{द}(१-र^२)^{\frac{१}{२}(ध-१)}$ तार इस मे र के स्थान में इसका पहला मान ज्याय रखदो तो $\int र^{द}(१-र^२)^{\frac{१}{२}(ध-१)}$ तार

$= \int ज्या^{द-१} \cdot कोज्या^{ध-१}य कोज्यायताय$ । अब यहाँ यदि $ध=०$ तो $\int ज्या^{द-१} कोज्या^{ध-१}कोज्याय ताय$
 $= \int ज्या^{द-१}यताय$ ऐसा होगा । इस लिये $\frac{१}{२}(ध-१) = व = -\frac{१}{२}$ इनका उत्थापन इसी प्रक्रम के (८)वें समीकरण मे देने से

$$\begin{aligned} च_{द,व} &= \frac{र^{द-१}त^{व+१}}{द+२व+१} + \frac{द-१}{द+२व+१} च_{द-२,व} \\ &= \frac{ज्या^{द-१}कोज्याय}{द} + \frac{द-१}{द} \int ज्या^{द-२}य ताय = \int ज्या^{द-१}य ताय । \end{aligned}$$

देखो ठीक यही खण्डचलानयन १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है । केवल द के स्थान मे न का उत्थापन मात्र देना होगा ।

इय तरह पीछे दिखलाये हुए समीकरणों के बल से सैकड़ों लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हो जाते हैं विद्यार्थियों को चाहिये कि उन का अच्छी तरह से अभ्यास करे ।

३६ । ३१वें प्रक्रम की युक्ति से यदि $त = आय^अ + काय^क + गाय^ग + \dots$ और $च_{म,न} = \int य^मत^नताय$ तो यहाँ भी उसी तरह से $च_{म,न}$ का मान जान सकते हो । जैसे

$$त^न = (आय^अ + काय^क + गाय^ग + \dots) त^{न-१}$$

$$\text{इस लिये, } य^मत^न = (आय^{म+अ} + काय^{म+क} + गाय^{म+ग} + \dots) त^{न-१}$$

$\int y^m t^n \text{ताय} = \text{आ} \int y^{m+a} t^{n-1} \text{ताय} + \text{का} \int y^{m+k} t^{n-1} \text{ताय}$
 $+ \text{गा} \int y^{m+g} t^{n-1} \text{ताय} +$
 अर्थात् $\text{च}_{m,n} = \text{आच}_{m+a,n-1} + \text{काच}_{m+k,n-1} + \text{गाच}_{m+g,n-1} + \dots$ (१)
 और खण्डचलानयन से

$$\begin{aligned}
 \text{च}_{m,n} &= \int y^m t^n \text{ताय} = \frac{y^{m+1} t^n}{m+1} \\
 &- \frac{n y^{m+1} t^{n-1}}{m+1} (\text{अआय}^{a-1} + \text{ककाय}^{k-1} + \text{गगाय}^{g-1} + \dots) \text{ताय} \\
 &= \frac{y^{m+1} t^n}{m+1} - \frac{n \text{अ}}{m+1} \text{आच}_{m+a,n-1} \\
 &- \frac{n \text{क}}{m+1} \text{काच}_{m+k,n-1} - \frac{n \text{ग}}{m+1} \text{गाच}_{m+g,n-1}
 \end{aligned}$$

छेदगम कर पक्षान्तरानयन से

$$\begin{aligned}
 y^{m+1} t^n &= \text{च}_{m,n} (m+1) + n \text{अआच}_{m+a,n-1} + n \text{ककाच}_{m+k,n-1} \\
 &+ n \text{गगाच}_{m+g,n-1} + \dots
 \end{aligned}$$

(१) से $\text{च}_{m,n}$ का उत्थापन देने से और $m+n \text{अ} + 1 = \text{अ}$, $m+n \text{क} + 1 = \text{क}$,
 $m+n \text{ग} + 1 = \text{ग}$ इत्यादि कल्पना करने से

$$y^{m-1} t^n = \text{अ} \text{आच}_{m+a,n-1} + \text{क} \text{काच}_{m+k,n-1} + \text{ग} \text{गाच}_{m+g,n-1} + \dots \quad (२)$$

इस तरह अनेक चमत्कार दिखा सकते हो ।

३७ । लघूकरण सिद्धान्त से दो मानों के भीतर का चलज्ञान बहुत ही सहज
 में हो जाता है अर्थात् इस से सान्तचल मान बहुत ही सुगम हो जाता है ।

जितने पिछले प्रक्रमों में लघूकरण सिद्धान्तों के लिये समीकरणों को दिखाया
 है सबका मूल यदि ध्यान दे कर देखो तो खण्डचलानयन ही है इसलिये खण्ड
 चलानयन को लघूकरण का मूल कह सकते हैं ।

दो सीमाओं के भीतर के चलज्ञान के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

(१) $\int (g^2 - y^2)^{\frac{n}{2}} \text{ताय}$ इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int (g^2 - y^2)^{\frac{n}{2}} \text{ताय} = \frac{y(g^2 - y^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{n g^2}{n+1} \int (g^2 - y^2)^{\frac{n}{2}-1} \text{ताय}, \text{ यह एक }$$

लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ इस में यदि $y=0$ वा $y=g$ तो स्पष्ट है कि
 प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^g (g^2 - y^2)^{\frac{n}{2}} \text{ताय} = \frac{ng^2}{n+1} \int_0^g (g^2 - y^2)^{\frac{n}{2}-1} \text{ताय यह सिद्ध हुआ ।}$$

(२) $\int y^{m-1}(1-y)^{n-1} \text{ताय}$ इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int y^{m-1}(1-y)^{n-1} \text{ताय} = -\frac{(1-y)^n}{n} y^{m-1} + \frac{m-1}{n} \int y^{m-2}(1-y)^n \text{ताय}$$

ऐसा लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न होता है । यहां यदि $y=0$ वा 1 तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1} \text{ताय} = \frac{m-1}{m} \int_0^1 y^{m-2}(1-y)^n \text{ताय}$$

$$\text{और } \int_0^1 y^{m-2}(1-y)^n \text{ताय} = \frac{m-2}{n+1} \int_0^1 y^{m-3}(1-y)^{n+1} \text{ताय}$$

$$\text{इसी तरह } \int_0^1 y^{m-3}(1-y)^{n+1} \text{ताय} = \frac{m-3}{n+2} \int_0^1 y^{m-4}(1-y)^{n+2} \text{ताय}$$

$$\int_0^1 y (1-y)^{n+m-3} = \frac{1}{n+m-2} \int_0^1 (1-y)^{n+m-2} \text{ताय}$$

$$\text{और } \int_0^1 (1-y)^{n+m-2} \text{ताय} = -\frac{1}{n+m-1} (1-y)^{n+m-1}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^1 (1-y)^{n+m-2} \text{ताय} = \frac{1}{n+m-1} \text{ इन सब का उत्थापन}$$

$$\text{देने से } \int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1} \text{ताय} = \frac{(m-1)(m-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n+1)(n+2)\dots (n+m-1)} \text{ यह होगा}$$

$$(३) \int \text{छे}^{\text{ष}} \text{ताय} = \int (1 + \text{स्प}^{\text{ष}})^2 \text{ताय} = \int (1 + 2\text{स्प}^{\text{ष}} + \text{स्प}^{\text{ष}})^2 \text{ताय}$$

$$= \int \text{ताय} + 2 \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताय} + \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताय} = \text{प} + 2 \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताय} + \int \text{स्प}^{\text{ष}} \text{ताय} ।$$

$$\text{परन्तु } \int \text{स्प}^{\text{नष}} \text{ताय} = \int \text{स्प}^{\text{न-२ष}} (\text{छे}^{\text{ष}} - 1) \text{ताय}$$

$$= \int \text{स्प}^{\text{न-२ष}} \text{छे}^{\text{ष}} \text{ताय} - \int \text{स्प}^{\text{न-२ष}} \text{ताय}$$

$$= \int \text{स्प}^{\text{न-२ष}} \text{ताय} - \int \text{स्प}^{\text{न-२ष}} \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{स्प}^{\text{न-२ष}}}{\text{२न-२}} - \int \text{स्प}^{\text{न-२ष}} \text{ताय}$$

$$= \frac{स्प^{२न-१}}{२न-१} - \frac{स्प^{२न-३}}{२न-३} + \int स्प^{२न-५}ताय$$

$$= \frac{स्प^{२न-१}}{२न-१} - \frac{स्प^{२न-३}}{२न-३} + \frac{स्प^{२न-५}}{२न-५} - \dots + \dots - (-१)^नस्पष + (-१)^नप$$

बार बार क्रिया करने से, प्रथमाध्याय का ४६वाँ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखा है उसे देखो ।

$$\text{इस पर से } २ \int स्प^३षताय = २स्पष - २प$$

$$\int स्प^५षताय = \frac{स्प^३ष}{३} - \frac{स्पप}{१} + प$$

इन का उत्थापन देने से

$$\text{छे}^५षताय = प + २ \int स्प^३षताय + \int स्प^५षताय$$

$$= प + २स्पष - २प + \frac{स्प^३ष}{३} - स्पप + प = स्पष + \frac{स्प^३ष}{३}$$

$$\text{इस लिये } \int_०^{\pi} \text{छे}^५षताय = १ + \frac{१}{३} = \frac{४}{३} \quad \text{यह सिद्ध हुआ ।}$$

$$(४) \int य^म(२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय = - \frac{य^{म-१}(२अय-य^२)^{\frac{३}{३}}}{म+२}$$

$$+ \frac{अ(२म+१)}{म+२} \int य^{म-१}(२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय$$

ऐसा होगा यदि ३१वे प्रक्रम में (६)वे में आ = -१, अ = २, का = २अ, क = १ और न = ३ मानो । इस लिये यहाँ स्पष्ट है कि यदि य शून्य वा २अके तुल्य माना जाय तो प्रथम खण्ड शून्यके तुल्य होगा ।

$$\text{तब } \int_०^{२अ} य^म(२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय = \frac{अ(२म+१)}{म+२} \int_०^{२अ} य^{म-१} \int (२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय$$

म के स्थान में म-१ का उत्थापन देने से

$$\int_०^{२अ} य^{म-१}(२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय = \frac{अ(२म-१)}{म+१} \int_०^{२अ} य^{म-२}(२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय$$

यों बार बार क्रिया करने से --

$$\int_०^{२अ} य^{म-(म-१)}(२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय = \int_०^{२अ} य(२अय-य^२)^{\frac{१}{३}}ताय$$

$$= अ \int_0^{2अ} (2अय-य^2)^{\frac{3}{2}} ताय$$

$$\text{परन्तु } \int (2अय-य^2)^{\frac{3}{2}} ताय = \int \{ अ^2 - (अ-य)^2 \}^{\frac{3}{2}} ताय$$

$$= -\frac{अ-य}{2} \sqrt{2अय-य^2} - \frac{अ^2}{2} ज्या^{-1} \frac{अ-य}{अ}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{2अ} (2अय-य^2)^{\frac{3}{2}} ताय = +\frac{अ^2\pi}{8} + \frac{अ^2\pi}{8} = +\frac{अ^2\pi}{2}$$

इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{2अ} य^म(2अ-य^2)^{\frac{3}{2}} ताय = \frac{अ^{म+2} (2म+1) (2म-1) (2म-3) \cdot 2 \cdot \pi}{(म+2)(म+1)म(म-1)(-2) \cdot 2^3}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2म+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (म+2)} \frac{\pi अ^{म+2}}{2} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ताय}{\sqrt{1-ग^2 ज्या^2 य}} \text{ इसका क्या मान होगा यदि } ग < 1$$

$$\text{यहाँ } \frac{ताय}{\sqrt{(1-ग^2 ज्या^2 य)}} = ताय (1-ग^2 ज्या^2 य)^{-\frac{1}{2}} \text{ इसलिये द्वियुक्पद-}$$

$$\text{सिद्धान्त से } \frac{ताय}{\sqrt{(1-ग^2 ज्या^2 य)}}$$

$$= ताय \left(1 + \frac{1}{2} ग^2 ज्या^2 य + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} ग^4 ज्या^4 य + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} ग^6 ज्या^6 य + \dots \right)$$

$$\text{इसलिये } \int \frac{ताय}{\sqrt{(1-ग^2 ज्या^2 य)}} = य + \frac{ग^2}{2} \int ज्या^2 य + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} ग^4 \int ज्या^4 य ताय$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} ग^6 \int ज्या^6 य ताय$$

इस लिये १२ वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण से वा ३५ वें प्रक्रम से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ताय}{\sqrt{(1-ग^2 ज्या^2 य)}} = \frac{\pi}{2} + \frac{ग^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ज्या^2 य ताय$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} ग^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ज्या^4 य ताय + \dots$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 ग^2 + \left[\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right]^2 ग^4 + \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right]^2 ग^6 + \dots \right\}$$

यह सिद्ध हुआ । इस प्रकार से विद्यार्थियों को चाहिये कि अनेक प्रश्नों का उत्तर कर पूर्व प्रक्रमों के सिद्धान्तों से अच्छी तरह परिचय करें ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

$$१। \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^m \text{पकोज्या}^n \text{प}} = \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{m-2} \text{पकोज्या}^n \text{प}} + \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^m \text{पकोज्या}^{n-2} \text{प}}$$

$$२। \int \frac{\text{ताप}}{\text{कोज्या}^n \text{प}} = \frac{\text{ज्याप}}{(n-1)\text{कोज्या}^{n-2} \text{प}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\text{ताप}}{\text{कोज्या}^{n-2} \text{प}}$$

$$३। \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^n \text{प}} = \frac{-\text{कोज्याप}}{(n-1)\text{ज्या}^{n-2} \text{प}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{n-2} \text{प}}$$

$$४। \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्यापकोज्या}^2 \text{प}} = \frac{१}{\text{कोज्याप}} + \text{ला स्प} \frac{\text{प}}{२}$$

$$५। \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्यापकोज्या}^4 \text{प}} = \int \frac{\text{ज्यापताप}}{\text{कोज्या}^4 \text{प}} + \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्यापकोज्या}^2 \text{प}}$$

$$६। \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^3 \text{पकोज्या}^2 \text{प}} = \frac{१}{३\text{ज्या}^2 \text{प}} - \frac{१}{\text{ज्याप}} + \text{ला} \left\{ \text{स्प} \left(\frac{\pi}{६} + \frac{\pi}{३} \right) \right\}$$

$$७। \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^3 \text{प}} = -\frac{\text{कोज्याप}}{२\text{ज्या}^2 \text{प}} + \text{ला} \sqrt{\text{स्प} \frac{\pi}{६}}$$

$$८। \int \frac{\text{ताप}}{\text{स्प}^n \text{प}} = -\frac{१}{(n-1)\text{स्प}^{n-1} \text{प}} - \int \frac{\text{ताप}}{\text{स्प}^{n-2} \text{प}}$$

$$९। \int \text{स्प}^2 \text{पताप} = \frac{\text{स्प}^3 \text{प}}{३} - \text{स्पप} + \text{प}$$

$$१०। \int \frac{\text{ताप}}{\text{स्प}^2 \text{प}} = -\frac{१}{४\text{स्प}^2 \text{प}} + \frac{१}{२\text{स्प} \text{प}} + \text{ला} (\text{ज्याप})$$

$$११। \int \text{ज्या}^3 \text{पकोज्या}^2 \text{पताप} = -\frac{१}{६} \text{कोज्या}^2 \text{प} + \frac{१}{६} \text{कोज्या}^4 \text{प}$$

$$१२। \int \frac{\text{ज्या}^2 \text{पताप}}{\text{कोज्या}^2 \text{प}} = \frac{\text{ज्याप}}{२\text{कोज्या}^2 \text{प}} + \frac{१}{६} \text{ला} \frac{१-\text{ज्याप}}{१+\text{ज्याप}}$$

$$१३। \int_0^{\pi} \text{य}^2 (२अय-य)^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \frac{३३\pi^{\frac{३}{२}}}{१६}$$

$$१४। \int_0^{2\pi} \text{य}^2 (२अय-य)^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \frac{७-\pi^{\frac{३}{२}}}{८}$$

$$१५। \int_0^{2अ} य(२अय-य^२)^{\frac{१}{२}}ताय = \frac{\piअ^३}{२}$$

१६। यदि $च_n = \int \frac{ताय}{(अ + ककोज्याय)^n}$ जहाँ n , धन और अभिन्न है तो सिद्ध करो कि

$$(n-१)(अ^२-क^२)च_n = -\frac{कज्याय}{त^{n-१}} + अ(२n-३)च_{n-१} - (n-२)च_{n-२}$$

(यहाँ $t = अ + ककोज्याय$)

१७। सिद्ध करो कि यदि

$$\int (१ + ककोज्याय)^{-n}ताय = च_n \text{ तो}$$

$$(n-१)(१-क)च_n = -कज्याय(१ + ककोज्याय)^{-n+१} + (२n-३)च_{n-१} - (n-२)च_{n-२}$$

१८। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{ताय}{(अ + ककोज्याय)^n} = २ \int \frac{(अ-ककोज्या२य)^{n-१}ताय}{(अ^२-क^२)^{n-१}}$$

यदि $स्प_३ = स्प_४ \sqrt{\frac{अ+क}{अ-क}}$

१९। सिद्ध करो कि यदि n सम हो तो

$$\int कोज्या^n यताय = ज्याष \left[\frac{कोज्या^{n-१}}{n} + \frac{n-१}{n(n-२)} कोज्या^{n-३} य + \dots \right]$$

$$+ ज्याष \left[\frac{(n-१)(n-३)}{n(n-२)(n-४)} कोज्या^{n-५} य + \dots \right]$$

$$+ \frac{(n-१)(n-३)(n-५) \dots १}{n(n-२)(n-४) \dots २} य \text{ और यदि } n \text{ विषम हो तो}$$

$$\int कोज्या^n यताय = ज्याष \left\{ \frac{कोज्या^{n-१}}{n} + \frac{n-१}{n(n-२)} कोज्या^{n-३} य \right\}$$

$$+ ज्याष \left\{ \frac{(n-१)(n-३)}{n(n-२)(n-४)} कोज्या^{n-५} य + \dots + \frac{(n-१)(n-३)(n-५) \dots २}{n(n-२)(n-४) \dots ३} \right\}$$

२०। सिद्ध करो कि

$$\int ज्या^३ य उज्या^म यताय = \frac{ज्याष उज्या^{m+१} य}{m+२} + \frac{ष}{m+२} \frac{m+१}{m+१} ज्याष$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m(m+1)}{2(m+1)} \left\{ \frac{\text{ज्यापकोज्याष}}{2} + \frac{प}{३} \right\} \\
 & - \frac{m(m+1)(m-1)}{3(m+2)} \left\{ \frac{\text{ज्यापकोज्या}^३ष}{३} + \frac{३\text{ज्याप}}{३} \right\} + \dots \\
 & + (-1)^n \frac{(m+1)(m)(m-n+2)}{n(m+1)} \int \text{कोज्या}^n \text{पताप}
 \end{aligned}$$

२१। सिद्ध करो कि यदि लाय = ला और $\int \left\{ \text{लाय} \right\}^n \text{य}^m \text{ताय} = \text{चन}, m$

$$\text{तो चन}, m = \text{लान} \frac{\text{य}^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1} \text{चन}, m-1$$

२२। सिद्ध करो कि

$$\int \text{य}^m \left\{ \text{लाय} \right\}^2 \text{ताय} = \frac{\text{य}^{m+1}}{m+1} \left\{ (\text{लाय})^2 - \frac{2}{m+1} \text{लाय} + \frac{2}{(m+1)^2} \right\}$$

२३। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
 \int \left\{ \text{लाय} \right\}^4 \text{य}^c \text{ताय} &= \frac{(\text{लाय})^4 \text{य}^c}{c} - \frac{4(\text{लाय})^3 \text{य}^c}{c^2} + \frac{4 \cdot 3(\text{लाय})^2 \text{य}^c}{c^3} \\
 &- \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \text{लाय} \text{य}^c}{c^4} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \text{य}^c}{c^4}
 \end{aligned}$$

२४। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{ज्या}^m \text{य}}{\text{कोज्या}^n \text{य}} \text{ताय} = \frac{\text{ज्या}^{m-1} \text{य}}{(n-1) \text{कोज्या}^{n-1} \text{य}} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\text{ज्या}^{m-2} \text{य}}{\text{कोज्या}^{n-2} \text{य}} \text{ताय}$$

२५। सिद्ध करो कि यदि य = २प तो

$$\int \frac{\text{ज्या}^m \text{य}}{(1 + \text{कोज्याय})^n} \text{ताय} = २^{m-n+1} \int \frac{\text{ज्या}^m \text{पताप}}{\text{कोज्या}^{2n-m} \text{य}}$$

२६। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{इ}^m \text{य}}{\text{य}^n} \text{ताय} = -\frac{\text{इ}^m \text{य}}{(n-1) \text{य}^{n-1}} + \frac{m}{n-1} \int \frac{\text{इ}^m \text{य}}{\text{य}^{n-1}} \text{ताय} ।$$

२७। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{इ}^m \text{य}}{\text{य}} \text{ताय} = \text{लाय} + \text{मय} + \frac{m^2 \text{य}^2}{2 \cdot 2} + \frac{m^3 \text{य}^3}{3 \cdot 3} + \frac{m^4 \text{य}^4}{4 \cdot 4}$$

२८। $\int_0^{2\alpha} \sqrt{(2\alpha y - y^2)} \text{उज्या}^{-1} \frac{\text{य}}{\alpha} \text{ताय} = \alpha^2 - \dots$ इसे सिद्ध करो

२९ । $\int_0^{a\sqrt{1-x^2}} \sqrt{a^2 - y^2} \text{कोज्या}^{-1} \frac{y}{a} \text{ ताय} = a^2 (\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$ इसे सिद्ध करो

३० । सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{2n+1} \text{पताष} = \frac{\text{स्प}^{2n} \text{प}}{2n} - \frac{\text{स्प}^{2n-2} \text{ष}}{2n-2} + \frac{\text{स्प}^{2n-4} \text{ष}}{2n-4} - \frac{\text{स्प}^{2n-6} \text{ष}}{2n-6} \\ + \dots + (-1)^{n+1} \text{ला} \{ \text{कोज्याष} \}$$

३१ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{स्प}^{\frac{1}{2}} \text{ष ताय} = \frac{2}{3} \left\{ \text{ला} (2) - \frac{1}{3} \right\}$$

३२ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{उया}^3 \text{यताय}}{1 + \text{गकोज्याय}} = \frac{\text{कोज्या}^2 \text{य}}{2\text{ग}} - \frac{\text{कोज्याय}}{\text{ग}^2} - \frac{\text{ग}^2 - 1}{\text{ग}^3} \text{ला}(1 + \text{गकोज्याय})$$

३३ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^1 \text{य}^m \left\{ \text{लाय} \right\}^2 \text{ताय} = \frac{2}{(m+1)^2}$$

३४ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\text{ग}^2 \text{ज्या}^3 \text{य ताय}}{1 + \text{गकोज्याय}} = (\text{ग}^2 - 1) \text{ला} (1 + \text{ग})^2 + \text{ग} (2 - \text{ग})$$

३५ । सिद्ध करो कि

$$\int (n+1) (a^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \text{ताय} = y(a^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} + n a^2 \int (a^2 + y^2)^{\frac{n}{2}-1} \text{ताय}$$

३६ । एक लड़का गङ्गाजी के किनारे अ विन्दु पर खड़ा था । उसने ठीक अपने सामने एक मनोहर फूल को जो कि धारा में बहता हुआ चला जाता था देख कर अपने स्थान से गङ्गा में कूद तैर कर फूल लेने के लिये चला । प्रतिक्षण में फूल के बहने के प्रमाण को फूल और अ विन्दु के अन्तर वर्ग से गुणने से जो गुणनफल हो उतना प्रतिक्षण में लड़के के तैरने का प्रमाण है तो बताओ कि जिस समय अ विन्दु के सामने से धारा में वह फूल ९ हाथ बह गया उस समय अ विन्दु से लड़का कितना तैर कर गया होगा । इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि अ विन्दु से धारा का अन्तर १५ हाथ है ।

उ० २२६८

इति तृतीयाध्याय ।

चतुर्थाध्याय ।

प्रकीर्णक ।

३८ । कल्पना करो कि

(१) फ(य) = य तो

फ(अ) = अ, फ(अ + च) = अ + च, फ(अ + २च) = अ + २च + ...

इस लिये

$$\begin{aligned}
 & \text{च फ(अ) + च फ(अ + च) + च फ(अ + २च) + \dots + च फ(अ + न च)} \\
 & = \text{च} \{ \text{अ} + (\text{अ} + \text{च}) + (\text{अ} + २ \text{च}) + \dots + (\text{अ} + \text{न च}) \} \\
 & = \text{च} \{ \text{अ}(\text{n} + १) + \text{च}(१ + २ + ३ + \dots + \text{n}) \} = \text{च} \{ \text{अ}(\text{n} + १) + \frac{\text{चन}}{२} (\text{n} + १) \} \\
 & = \text{च}(\text{n} + १) \left(\frac{२\text{अ} + \text{नच}}{२} \right) = (\text{अ} + \text{अ} + \text{नच}) \frac{\text{च}(\text{n} + १)}{२} = \frac{\text{च}(\text{n} + १)}{२} (\text{अ} + \text{क}) \quad (१)
 \end{aligned}$$

यदि अ + न च = क परन्तु यदि अ + नच = क तो च = $\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$ इस का

उत्थापन देने से (१) का

मान = $\frac{\text{क}-\text{अ}}{२} \left(१ + \frac{१}{\text{n}} \right) (\text{अ} + \text{क})$ इस में यदि च = ० वा न = $\frac{१}{०}$ तोइस का मान = $\frac{\text{क}^२ - \text{अ}^२}{२}$ यह सिद्ध हुआ ।परन्तु जब फ(य) = य \int फ(य)ताय = \int यताय = $\frac{\text{य}^२}{२}$ इस लिये $\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ फ(य)ताय = $\frac{\text{क}^२ - \text{अ}^२}{२}$ (२) प्रक्रम देखो(२) फ(य) = य^२ तो

$$\begin{aligned}
 & \text{च फ(अ) + च फ(अ + च) + च फ(अ + २च) + \dots + च फ(अ + नच)} \\
 & = \text{च अ}^२ + \text{च (अ + च)}^२ + \dots + \text{च (अ + नच)}^२ \\
 & = \text{च} \{ \text{अ}^२ + (\text{अ}^२ + २ \text{अच} + \text{च}^२) + \dots + (\text{अ}^२ + २\text{अनच} + \text{n}^२ \text{च}^२) \} \\
 & = \text{च} \{ \text{अ}^२(\text{n} + १) + २\text{अच}(१ + २ + ३ + \dots + \text{n}) + \text{च}^२ (१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + \text{n}^२) \} \\
 & = \text{च} \left\{ \text{अ}^२(\text{n} + १) + \text{अचन} (\text{n} + १) + \frac{\text{च}^२ \text{n}(\text{n} + १)}{२} \frac{(२\text{n} + १)}{३} \right\} \\
 & = \text{च} (\text{n} + १) \left\{ \text{अ}^२ + \text{अचन} + \text{च}^२ \text{n} \frac{२\text{n} + १}{६} \right\} \\
 & = (\text{क} - \text{अ}) \left(१ + \frac{१}{\text{n}} \right) \left\{ \text{अ}^२ + \text{कअ} - \text{अ}^२ + (\text{क} - \text{अ}) \left(\frac{\text{क} - \text{अ}}{\text{n}} \right) \left(\frac{२\text{n} + १}{६} \right) \right\} \\
 & = (\text{क} - \text{अ}) \left(१ + \frac{१}{\text{n}} \right) \left\{ \text{कअ} + (\text{क} + \text{अ})^२ \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{६\text{n}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$= (क-अ) \left\{ कअ + \frac{(क-अ)^2}{३} \right\} = (क-अ) \left[\frac{क^३ + कअ + अ^३}{३} \right] = \frac{क^३ - अ^३}{३}$$

$$\text{परन्तु फ(य) = य}^३ \cdot \int \text{फ(य) ताय} = \int \text{य}^३ \text{ताय} = \frac{\text{य}^३}{३}$$

इस लिये $\int_{अ}^{क} \text{फ(य) ताय} = \frac{क^३ - अ^३}{३}$, इस तरह से (२) प्रक्रम की परिभाषा

से स्वतन्त्रराशि के दो मानों के भीतर का चलानयन बीजगणित की युक्ति से श्रेणियों के योग पर से कर सकते हैं। परन्तु जहाँ श्रेणियों के योग करने की रीति नहीं जानी जाती वहाँ इस रीति से सान्तचल का मान जानना कठिन है।

जैसे यदि फ(य) = लाय तो

$$\begin{aligned} & चफ(अ) + चफ(अ + च) + चफ(अ + २च) + चफ(अ + ३च) + \dots \\ & + चफ \{ अ + च(न-१) \} = च[ला(अ) + ला(अ + च) + ला(अ + २च) \\ & + ला(अ + ३च) + \dots + ला \{ अ + च(न-१) \}] \end{aligned}$$

यहाँ हम लोग अब लाचार है कि कैसे इस श्रेणी का योग करे परन्तु जब (२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि इस श्रेणी का योग अवश्य

$\int_{अ}^{क} \text{फ(य)ताय} = \int_{अ}^{क} \text{ला (य) ताय}$ यह होगा। इसलिये ऐसे ऐसे स्थानों में सान्तचलानयन से श्रेणी के योग का पता लग सकता है।

जैसे इसी स्थान में जब प्रसिद्ध है कि $\int \text{लायताय} = \text{य लाय} - \text{य तव}$

$$\int_{अ}^{क} \text{लायताय} = ला \left[\frac{क^क}{अ^अ} \right] - (क-अ) \text{ यही ऊपर के श्रेणी का योग होगा।}$$

३९ । इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रम को अच्छी तरह से समझने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

$$(१) \frac{१}{\sqrt{१-य^२}} = \text{फ(य)} \text{ इस में श्रेणी के योग पर से } \int_0^१ \frac{\text{ताय}}{\sqrt{१-य^२}}$$

इसका मान जानना है यहाँ, $चफ(०) + चफ(च) + चफ(२च) + चफ(३च) + \dots + चफ(१)$

$$= \left[\frac{च}{१} + \frac{च}{\sqrt{१-च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१-४च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१-९च^२}} + \dots + \frac{च}{\sqrt{१-१^२}} \right]$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-4}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-9}} + \dots$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-9}} + \dots \text{ क्योंकि यहाँ}$$

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1 \text{ परन्तु चलज्ञान से } \int_0^1 \frac{ताय}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}$$

इस लिये यदि n का मान अनन्त हो तो

$$\int_0^1 \frac{ताय}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-9}} + \dots \text{ यह सिद्ध है।}$$

$$(2) \int_0^1 \frac{ताय}{1+y^2} \text{ इसका मान श्रेणी में जानना है।}$$

(2) प्रक्रम से

$$\int_0^1 \frac{ताय}{1+y^2} = \frac{च}{1} + \frac{च}{1+च^2} + \frac{च}{1+4च^2} + \frac{च}{1+9च^2} + \dots + \frac{च}{1+n^2}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{n})^2} + \dots \right\}$$

$$\text{परन्तु चलानयन के प्रकार से } \int_0^1 \frac{ताय}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}, \text{ इस लिये यदि ऊपर की}$$

श्रेणी में n अनन्त हो तो श्रेणी का योग $\frac{\pi}{4}$ होगा ।

$$(3) च[ज्याअ + ज्या(अ + च) + ज्या(अ + २च) + \dots + ज्या \{ अ + (n-1)च \},$$

इस में यदि n का मान अनन्त हो तो श्रेणी के योग का मान जानना है ।

यहाँ चिकोणमिति की रीति से ऊपर की श्रेणी का योग

$$= \frac{चज्या(अ + \frac{n-1}{2}च)ज्या\frac{nच}{2}}{ज्या\frac{च}{2}} = \frac{चज्या(अ + \frac{क-अ}{2} - \frac{च}{2})ज्या\frac{क-अ}{2}}{ज्या\frac{च}{2}}, \text{ यदि } अ + नच = क$$

$$\text{अत्र यहाँ यदि } च = 0 \text{ तो } \frac{च}{ज्या\frac{च}{2}} = २ \frac{\frac{च}{2}}{ज्या\frac{च}{2}} = २ \text{ इस लिये श्रेणी का योग}$$

$$२ज्या\frac{क+अ}{२} ज्या\frac{क-अ}{२} = कोज्याअ - कोज्याक = \int_अ^क ज्यायताय \text{ यह सिद्ध हुआ।}$$

इसी श्रेणी में यदि n के स्थान में $n+1$ का उत्पादन दे तो श्रेणी का योग

$$= \text{चज्या}\left(a + \frac{n\text{च}}{2}\right)\text{ज्या}\frac{n+1}{2}\text{च} - \text{ज्या}\frac{\text{च}}{2} = \frac{2\text{च}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{2}}\text{ज्या}\left(a + \frac{\text{क}-\text{अ}}{2}\right)\text{ज्या}\left[\frac{\text{क}-\text{अ}}{2} + \frac{\text{च}}{2}\right]$$

$$= 2\text{ज्या}\left(\frac{\text{क}+\text{अ}}{2}\right)\text{ज्या}\frac{\text{क}-\text{अ}}{2} = \text{कोज्याअ} - \text{कोज्याक}, \text{ यदि } \text{च} = 0$$

इसलिये श्रेढी में यदि एक पद बढ़ भी जाय तौ भी योग वही रहेगा ।

४० । २ प्रक्रम से और ३९ प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

$$\int_a^{\text{क}} \text{फ}(y) \text{ताय यह } \text{च}_1\text{फ}(a) + \text{च}_2\text{फ}(y_1) + \dots + \text{च}_n\text{फ}(y_{n-1}) \text{ इस श्रेढी}$$

के योग तुल्य है यदि श्रेढी में n का मान अनन्त कल्पना किया जाय

जहाँ $\text{च}_2 = y_2 - a_1 = 0$, $\text{च}_3 = y_3 - y_2 = 0, \dots$ और $y_{n-1} = \text{क} - \text{च}_n$

मानो कि a , क के भीतर $\text{फ}(y)$ के जितने मान हैं वे सब उत्तरोत्तर घटते वा बढ़ते हैं और उन में सब से बड़ा a और सब से छोटा क है तो सब फलों के स्थान में a और क का उत्थापन देने से a ($\text{च}_1 + \text{च}_2 + \text{च}_3 + \dots + \text{च}_n$)

यह पहली श्रेढी से बड़ा होगा और क ($\text{च}_1 + \text{च}_2 + \text{च}_3 + \dots + \text{च}_n$) यह छोटा ।

परन्तु $\text{च}_1 + \text{च}_2 + \dots + \text{च}_n = \text{क} - a$ इस लिये ऊपर के श्रेढी का मान a ($\text{क} - a$) और क ($\text{क} - a$) के बीच में होगा ।

इस लिये निश्चय है कि श्रेढी का मान $(\text{क} - a) \text{ग}$ इसके तुल्य होगा

जहाँ ग एक ऐसी संख्या है जिसका मान a और क के बीच में है परन्तु $\text{फ}(y)$ को घटते वा बढ़ते माना है इस लिये अवश्य कोई y के मान में यह ग के तुल्य होगा । मानो कि $\text{ग} = \text{फ} \{ a + \text{ष}(\text{क} - a) \}$ जहाँ ष कोई रूपाल्प संख्या है ।

$$\text{इस लिये श्रेढी का योग} = \int_a^{\text{क}} \text{फ}(y) \text{ताय} = (\text{क} - a) \text{फ} \{ a + \text{ष}(\text{क} - a) \}$$

इसी प्रकार $\text{फ}(y) \text{फा}(y) \text{ताय}$ इसमें $\text{फ}(y)$ तो पहले ही के ऐसा समझो और वैसाही $\text{फा}(y)$ को भी समझो तो पूर्व ही की रीति से

$$\int_a^{\text{क}} \text{फ}(y) \text{फा}(y) \text{ताय} = \text{च}_1\text{फ}(a)\text{फा}(a) + \text{च}_2\text{फ}(y_1)\text{फा}(y_1) + \dots +$$

$$\text{च}_n\text{फ}(y_{n-1})\text{फा}(y_{n-1}).$$

यहां भी पूर्व ही की रीति से सिद्ध कर सकते हो कि यह श्रेढी

$\{ \text{च}_1\text{फा}(a) + \text{च}_2\text{फा}(y_1) + \text{च}_3\text{फा}(y_2) + \dots + \text{च}_n\text{फा}(y_{n-1}) \}$ इससे छोटी

और क $\{ \text{च}_1\text{फा}(a) + \text{च}_2\text{फा}(y_1) + \text{च}_3\text{फा}(y_2) + \dots + \text{च}_n\text{फा}(y_{n-1}) \}$ इस से

बड़ी होगी ।

इस लिये यहां भी मानो कि $f(y)$ के गा मान में वास्तव श्रेणी का योग = गा $\{ च_1 f(a) + च_2 f(y_1) + च_3 f(y_2) + \dots + च_n f(y_{n-1}) \}$

$$= गा \int_a^k f(y) \text{ताय} = फ \{ अ + प(क-अ) \} \int_a^k f(y) \text{ताय}$$

$$= \int_a^k f(y) f(y) \text{ताय यह सिद्ध होता है ।}$$

यहां इसका कुछ नियम नहीं कि $\int_a^k f(y) \text{ताय}$ इसके मान में जो

$फ \{ अ + प(क-अ) \}$ इसमें $प$ है वही $\int_a^k f(y) f(y) \text{ताय}$ इसके मान में भी हो इतना अवश्य नियम है कि ऐसे स्थानों में $प$ सर्वत्र रूपाल्प संख्या है ।

४१ । सान्तचलानयन से स्पष्ट है कि यदि $\int f(y) \text{ताय} = फ(a)$ तो

$$\int_a^g f(y) \text{ताय} = फ(g) - फ(a)$$

$$\int_g^k f(y) \text{ताय} = फ(k) - फ(g)$$

इस लिये $\int_a^g f(y) \text{ताय} + \int_g^k f(y) \text{ताय} = फ(k)$

$$- फ(a) = \int_a^k f(y) \text{ताय}, \quad \dots \dots (१)$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध कर सकते हो कि

$$\int_a^k f(y) \text{ताय} = - \int_k^a f(y) \text{ताय} \quad \dots \dots \dots (२)$$

यदि $\int f(y) \text{ताय}$ इस में y के स्थान में $अ-ल$ इस का उत्थापन दें तो $अ-ल = य$, $अ-य = ल$, $-ताय = ताल$,

इस लिये $\int f(अ-य) \text{ताय} = - \int f(ल) \text{ताल}$

$$\text{और } \int_a^k f(अ-य) \text{ताय} = - \int_0^{अ-क} f(ल) \text{ताल} = \int_{अ-क}^0 f(ल) \text{ताल}, \quad (२) \text{ से}$$

मानो कि $\int f(ल) \text{ताल} = फ(ल)$ इस लिये

$$\int_a^k f(ल) \text{ताल} = फ(क) - फ(अ) = \int_a^k f(y) \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये } \int_a^k f(अ-य) \text{ताय} = \int_{अ-क}^0 f(y) \text{ताय} \quad \dots \dots \dots (३)$$

(३) में मानो कि $क = ०$ तो $\int_a^0 f(अ-य) = \int_a^0 f(y) \text{ताय}$

$$\text{इस लिये (२) से } \int_0^{अ} f(अ-य) \text{ताय} = \int_0^{अ} f(y) \text{ताय} \quad \dots \dots (४)$$

इसी प्रकार यदि $y = 2a - x$ तो $dx = -dx$ और $x = 2a - y$

इस लिये $\int f(y) dx = -\int f(2a - x) dx$

और $\int_a^{2a} f(x) dx = -\int_a^0 f(2a - x) dx = \int_0^a f(2a - x) dx$

परन्तु (३) की युक्ति से $\int_0^a f(2a - x) dx = \int_0^a f(2a - y) dy$

इस लिये $\int_a^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(2a - y) dy$

और (१) से $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx$

इस लिये $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(2a - y) dy \dots (4)$

(4) वे में यदि y के 0 और a के बीच सब मानों में $f(y) = f(2a - y)$

तो $\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \dots (5)$

और यदि y के 0 और a के बीच सब मानों में $f(y) = f(2a - y)$

तो $\int_0^{2a} f(x) dx = 0 \dots (6)$

जैसे यदि $f(x) = \cos^m x$ तो $f(\pi - x) = \cos^m(\pi - x) = \cos^m x$
त्रिकोणमिति से

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos^m x dx = \int_0^{\pi} \cos^m x dx \dots (6) \text{ से} \end{aligned}$$

और जब त्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि $\cos(\pi - x) = -\cos x$

इस लिये यदि m विषम संख्या हो और $f(x) = \cos^m x$ तो (6) से

सिद्ध कर सकते हो कि $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \cos^m x dx = 0$

(2) प्रक्रम से यदि $\int_0^{\pi} \cos^m x dx$ इसका मान श्रेणी में लावो तो

$\{ \cos^m x + \cos^{m-2} x + \cos^{m-4} x + \dots + \cos^m(x) \}$ ऐसा होगा
जहाँ $n = \pi$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि $\cos^m x = \cos^m(\pi - x) = \cos^m x$,

ज्या^m२च = ज्या^m(न-२)च = ज्या^m(π -२च) = ज्या^m२च, इसी तरह और भी दिखा सकते हो कि दो दो पद तुल्य आवेंगे इस लिये इस पर से भी सिद्ध कर सकते हो कि $\int_0^{\pi} ज्या^m यताय = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ज्या^m यताय$ ।

इसी तरह से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि $\int_0^{\pi} कोज्या^m यताय = 0$

यदि म विषय हो

यदि अ से क बड़ा हो और य क अ और क के बीच किसी मान में फ(य) सर्वदा धनात्मक हो तो स्पष्ट है कि $\int_a^k फ(य)ताय$ इसका मान जो (१) प्रक्रम से श्रेणी में आता है उस में प्रत्येक पद धनात्मक ही रहेंगे इस लिये श्रेणी का योग अर्थात् $\int_a^k फ(य)ताय$ यह सर्वदा धनात्मक ही होगा ।

४२ । ऊपर के प्रक्रमों में सान्तचल के लिये जो कुछ वर्णन किया गया है वह सब तभी ठीक दिखा सकते हो जब फल अर्थात् जिस का चल ज्ञान करना है, अ और क के बीच स्वतन्त्र राशि के मानों में सान्त हो और यदि अ, और क के बीच किसी स्वतन्त्र राशि के मान में फल अनन्त के तुल्य हो तो ऊपर की विधि से अर्थात् श्रेणी की विधि से सिद्ध होता है कि सान्तचल ज्ञान नहीं हो सकता। ऐसी स्थिति में अवश्य परीक्षा करनी चाहिये ।

जैसे चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{ताय}{(१-य)^२} = \frac{१}{१-य}$ इस लिये

$$\int_0^२ \frac{ताय}{(१-य)^२} = \frac{१}{१-२} - \frac{१}{१-०} = -१-१ = -२ \text{ यह मान आया}$$

परन्तु $\int_0^२ \frac{ताय}{(१-य)^२}$ इस का मान यदि (२) प्रक्रम से श्रेणी में ले आओ

तो च $\left\{ \frac{१}{(१-०)^२} + \frac{१}{(१-०)^२} + \dots \right\}$ ऐसा होगा ।

इस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धनात्मक है इस लिये श्रेणी का योग अर्थात् $\int_0^२ \frac{ताय}{(१-य)^२}$ यह धनात्मक ही होगा। इस कारण पहले सान्तचलानयन से -२ यह मान सिद्ध हुआ अशुद्ध ठहरा। यहां ० और २ के बीच य का मान १ के तुल्य मानो तो $\frac{१}{१-य}$ यह अनन्त के तुल्य होता है।

इसी प्रकार $\int_0^a \frac{ताय}{\sqrt{१-य}} = २-२\sqrt{१-अ}$ यह सान्तचलानयन से

सिद्ध होता है परन्तु यहां यदि $य = १$ तो $\frac{१}{\sqrt{१-य}}$ यह अनन्त के तुल्य

होता है। इस लिये यहां ऐसा कहना पड़ेगा कि $\int_0^a \frac{ताय}{\sqrt{१-य}}$ इसका

मान सान्त होगा यदि $अ < १$ हो तो। और $अ$ का मान जैसा जैसा १ के पास होता जायगा तैसा तैसा $\int_0^a \frac{ताय}{\sqrt{१-य}}$ यह २ के पास पास आवेगा।

४३। (२) प्रक्रम में $\int_a^k फ(य)ताय$ इस के मान में $क$, और $अ$ दोनों

को जो $फ(य)$ के ऐसा सान्त कल्पना किया है वह सर्वदा ठीक नहीं कभी एक कभी दोनो विशेष स्थल में अनन्त के भी समान हो सकते हैं।

जैसे $\int \frac{ताय}{१+य^२} = स्प^{-१}य$ इस लिये $\int_0^a \frac{ताय}{१+य^२} = स्प^{-१}अ$ यहां स्पष्ट है

कि ज्यों ज्यों $अ$ का मान बढ़ता जायगा त्यों त्यों $स्प^{-१}अ$ का मान $\frac{\pi}{३}$ के पास पास होगा इस लिये यदि $अ = \infty$ तो $स्प^{-१}अ = \frac{\pi}{३}$ ऐसा

होगा इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{३}$ यह सिद्ध हुआ।

इसी प्रकार $\int \frac{ताय}{१+य} = ला (१+य)$

इस लिये $\int_0^a \frac{ताय}{१+य} = ला (१+अ)$ यहां भी स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों $अ$ का

मान बढ़ेगा त्यों त्यों $ला (१+अ)$ का भी मान बढ़ेगा इस लिये यदि $अ = \infty$ तो $ला (१+अ) = \infty \cdot \int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य} = \infty$ यह सिद्ध होता है।

४४। कल्पना करो कि $फ(य)$ का मान अनन्त होता है यदि $य = ग$ जहां $ग$, $अ$ और $क$ के बीच में है तो (४२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि यहां $\int_a^k फ(य) ताय$ इसका मान साधारण सान्त चलानयन से ठीक नहीं

आवेगा इस लिये पहले यहां $\int_a^{g-h_1} f(y) \text{ ताय} + \int_{g+h_1}^k f(y) \text{ ताय}$

इस का मान ले आवो इस में h_1 का मान शून्य मानने से (४१) प्रकार के (१) समीकरण से

$$\int_a^k f(y) \text{ ताय} = \int_a^{g-h_1} f(y) \text{ ताय} + \int_{g+h_1}^k f(y) \text{ ताय}$$

यह सिद्ध हो जायगा ।

जैसे यदि $f(y) = \frac{1}{g-y}$ तो $\int f(y) \text{ ताय} = -\text{ला} (g-y)$

$$\text{इस लिये } \int_a^{g-h_1} f(y) \text{ ताय} = -\text{ला} \{ g-(g-h_1) \}$$

$$= -\{ -\text{ला} (g-a) \} = \text{ला} \frac{g-a}{h_1}$$

$$\begin{aligned} \text{इसी तरह } \int_{g+h_1}^k f(y) \text{ ताय} &= \int_{g+h_1}^k \frac{\text{ताय}}{g-y} = -\int_{g+h_1}^k \frac{k}{g+h_1} \frac{\text{ताय}}{y-g} \\ &= -\int \text{ला} \frac{k-g}{h_1} \text{ इस लिये दोनों का योग} = \text{ला} \frac{g-a}{h_1} - \text{ला} \frac{k-g}{h_1} \\ &= \text{ला} \frac{g-a}{k-g} = \int_a^k \frac{\text{ताय}}{g-y} \text{ क्योंकि यहाँ } h_1 = 0 \text{ मानने से भी } \text{ला} \frac{g-a}{k-g} \end{aligned}$$

मे कुछ विकार न होगा ।

ऐसे मान को कासी (Cauchy) साहब ने $\int_a^k f(y) \text{ ताय}$ इसका मुख्य मान यह नाम रखा है ।

४५। $\int \frac{\text{ताय}}{a^2+y^2}$ इस का मान सिद्ध है कि $\frac{1}{a} \text{ स्प}^{-1} \frac{y}{a}$ यह होगा

इस लिये \int यहां यदि $y = \text{स्प} \text{ तो ताय} = \text{छे}^{\text{पताप}}$ तब

$$\int \frac{\text{ताय}}{a^2+y^2} = \int \frac{\text{छे}^{\text{पताप}}}{a^2+\text{स्प}^2} = \frac{1}{a} \text{ स्प}^{-1} \left[\frac{\text{स्प}^2}{a} \right]$$

यहां यदि $p = 0$ और π हो तो $\int_0^{\pi} \frac{\text{छे}^{\text{पताप}}}{a^2+\text{स्प}^2}$ इस का मान

$$\frac{1}{a} \text{ स्प}^{-1} \left(\frac{\text{स्प}^2}{a} \right) - \frac{1}{a} \text{ स्प}^{-1} \left(\frac{\text{स्प}^0}{a} \right) = \text{स्प}^{-1}(0) - \text{स्प}^{-1}(0)$$

देखो यहाँ दोनों खण्डों का रूप एक ही है इस लिये बहुधा भ्रान्ति से जो लोग कि सान्तचलानयन में निपुण नहीं हैं दोनों मानों को समान मान उत्तर शून्य के तुल्य कहेंगे जो कि वास्तव में अशुद्ध है क्योंकि यदि सान्तचल का रूप (२) प्रक्रम से श्रेणी में ले आओ तो

$$\frac{च}{अ^२} + \frac{चछेच}{अ^२ + स्प^२च} + \frac{चछे२च}{अ^२ + स्प^२च} + \dots + \frac{चछे^{(न-१)च}}{अ^२ + स्प^{२(न-१)च}}$$

यह होगा जिस में स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धन हैं इस लिये श्रेणी का योग अर्थात् $\int_0^{\pi} \frac{छे^{पताप}}{अ^२ + स्प^२प}$ यह कोई धनात्मक संख्या है । यही ४१वें प्रक्रम के अन्त्य वाक्य से भी सिद्ध कर सकते हो कि यहाँ सान्तचल का मान अवश्य धनात्मक संख्या होगी ।

इस लिये यहाँ पर विचार करना चाहिये कि वास्तव में ϕ के ० और π मान में $स्प^{-१} \left(\frac{स्पप}{अ} \right)$ का क्या मान होगा । कल्पना करो कि ०, $\phi_१$, $\phi_२$, $\phi_३$, ... ϕ_n , π यह एक श्रेणी है जहाँ उत्तरोत्तर अधिक पद हैं और

$$\frac{छे^{प}}{अ^२ + स्प^२प} = र \quad \text{तो (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{छे^{पताप}}{अ^२ + स्प^२प} = \int_0^{\pi} रताप = \int_0^{\phi_१} रताप + \int_{\phi_१}^{\phi_२} रताप + \int_{\phi_२}^{\phi_३} रताप + \dots$$

$$+ \int_{\phi_{n-१}}^{\phi_n} रताप + \int_{\phi_n}^{\pi} रताप$$

यहाँ स्पष्ट है कि n का मान अधिक करने से ϕ_n और $\phi_{n+१}$ के अन्तर को चाहे जितना छोटा कर सकते हो इस लिये

$$\int_{\phi_n}^{\phi_{n+१}} रताप = स्प^{-१} \left[\frac{स्प\phi_{n+१}}{अ} \right] - स्प^{-१} \left[\frac{स्प\phi_n}{अ} \right] \text{ यह अवश्य शून्य के तुल्य हो सकता है यदि } \phi_{n+१} - \phi_n = ०$$

इस पर से सिद्ध होता है कि ज्यों ज्यों ϕ का मान बढ़ेगा त्यों त्यों $स्प^{-१} \left(\frac{स्प\phi}{अ} \right)$ इस का भी मान बढ़ता जायगा इस लिये ϕ के ० मान से π मान तक एक बार यह भी बढ़ कर $\frac{n\pi}{२}$ इस मान के पार हो जायगा । जहाँ n कोई विषम संख्या है इस लिये यदि ϕ के शून्य मान में

$\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान n मानो तो p के n मान में $\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान $(n+1)$ अवश्य मानना पड़ेगा इस लिये

$$\int_0^n \frac{\text{छेपताप}}{\text{अ}^2 + \text{स्प}^2 p}$$

$$= \frac{1}{\text{अ}} \left\{ \text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{स्प}^n}{\text{अ}}\right] - \text{स्प}^{-1}\left[\frac{\text{स्प}^0}{\text{अ}}\right] \right\} = \frac{1}{\text{अ}} \left\{ \text{स्प}^{-1}(0) - \text{स्प}^{-1}(0) \right\}$$

$$= \frac{1}{\text{अ}} \left\{ (n+1) \pi - n \pi \right\} = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ यह संज्ञा उत्तर होगा ।}$$

अथवा $\frac{1}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}\right)$ इस में मानो कि $\text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}\right) = \text{षा}$

∴ $\text{स्पषा} = \frac{1}{\text{अ}} \text{स्पप}$ अब चलनकलन के (३०४) प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\text{यदि } m = n = \frac{1}{\text{अ}} \text{ और } m = \frac{\text{अ}-1}{\text{अ}+1} \text{ तो}$$

$$\text{षा} = \text{ष} - \text{मज्यारष} + \frac{\text{म}^2}{2} \text{ज्या४ष} - \frac{\text{म}^3}{3} \text{ज्या६ष} + \dots \text{ ऐसा होगा}$$

इस का उत्थापन चल मान में देने से

$$\int \frac{\text{छेपताप}}{\text{अ}^2 + \text{स्प}^2 p} = \frac{1}{\text{अ}} \left(\text{ष} - \text{मज्यारष} + \frac{\text{म}^2}{2} \text{ज्या४ष} - \frac{\text{म}^3}{3} \text{ज्या६ष} + \dots \right) \text{ ऐसा हुआ}$$

इस में p का मान शून्य और n मानो तो स्पष्ट है कि

$$\frac{1}{\text{अ}} \frac{\text{छेपताप}}{\text{अ}^2 + \text{स्प}^2 p} = \frac{1}{\text{अ}} \left(\pi - \text{मज्यार}\pi + \frac{\text{म}^2}{2} \text{ज्या४}\pi - \frac{\text{म}^3}{3} \text{ज्या६}\pi + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{\text{अ}} \left(0 - \text{मज्या}0 + \frac{\text{म}^2}{2} \text{ज्या}0 - \frac{\text{म}^3}{3} \text{ज्या}0 + \dots \right)$$

$$= \frac{\pi}{\text{अ}} - 0 = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ यह वड़े लाघव से सिद्ध हुआ ।}$$

पहली क्रिया जो दिखलाई गई है उसे टाडहण्टर (Todhunter) साहब ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) के ४६वें प्रक्रम में लिखा है।

और दूसरी क्रिया से $\frac{1}{\text{अ}} \text{स्प}^{-1}\left(\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान जो दिखलाया है वह मेरी कल्पना है।

इसी प्रकार दोनों सीमाओं के भीतर वास्तव में क्या मान है इसकी परीक्षा के लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि बड़ी सावधानी से क्रिया करें क्योंकि ऐसे स्थानों में बहुधा संशयात्मक मान पड़ जाते हैं जिनका ठीक विचार न करने में

तुरन्त मान मे अशुद्धि हो जाती है ।

इस विषय पर एक और उदाहरण दिखाते हैं ।

चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{ताय}{\sqrt{अ^2-य^2}} = ज्या^{-1} \frac{य}{अ}$, इस लिये

$$\int_{-अ}^{अ} \frac{ताय^{-१}}{\sqrt{अ^2-य^2}} = ज्या^{-१}(+१) - ज्या^{-१}(-१) यह सशयात्मक हुआ ;$$

क्योंकि त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि

ज्या $\{ (\text{धम} + १) \frac{\pi}{२} \} = +१$ और ज्या $\{ (\text{धन} - १) \frac{\pi}{२} \} = -१$ जहाँ म और न कोई अभिन्न संख्या है । इस लिये म और न का भिन्न-भिन्न मान मानने से अनेक मान आ सकते हैं ।

इस संशय को दूर करने के लिये विचारो कि—अ से बढ़ते बढ़ते जब य, +अ के तुल्य होगा तो निश्चय है कि एक वार शून्य के तुल्य होगा इस लिये ज्या^{-१}(-१) यह बढ़ते बढ़ते जब ज्या^{-१}(+१) इसके तुल्य होगा तो अवश्य इस का एक ही मान ज्या^{-१}(०) यह होगा इस लिये यदि ज्या^{-१}(-१) का मान $(\text{धन} - १) \frac{\pi}{२}$ यह मानो तो अवश्य ज्या^{-१}(०) का मान $(\text{धन} - १) \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{२}$ यह और ज्या^{-१}(+१) का मान

$$(\text{धन} - १) \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{२} + \frac{\pi}{२} = (\text{धन} - १) \frac{\pi}{२} + \pi \text{ यह होगा । इस लिये}$$

$$ज्या^{-१}(+१) - ज्या^{-१}(-१) = (\text{धन} - १) \frac{\pi}{२} + \pi - (\text{धन} - १) \frac{\pi}{२} = \pi \text{ यह}$$

निश्चय मान हुआ । अथवा पहले ज्या^{-१} $\frac{य}{अ}$ इस का मान चलनकलन के (२०) वें

प्रक्रम के (३) उदाहरण से श्रेढी के रूप में

$$ज्या^{-१} \frac{य}{अ} = \frac{य}{अ} + \frac{१}{१.२} \frac{य^३}{३अ^३} + \frac{१.३}{२.४} \frac{य^५}{५अ^५} + \frac{१.३.५}{२.४.६} \frac{य^७}{७अ^७} + \dots \text{ यह ले आवो}$$

इस में य = अ, और य = -अ, यह मान कर

$$ज्या^{-१}(+१) = १ + \frac{१}{१.२} \frac{१}{३} + \frac{१.३}{२.४} \frac{१}{५} + \dots$$

$$ज्या^{-१}(-१) = -१ - \frac{१}{१.२} \frac{१}{३} - \frac{१.३}{२.४} \frac{१}{५} - \dots = -ज्या^{-१}(+१) \text{ इस लिये}$$

$$ज्या^{-१}(+१) - ज्या^{-१}(-१) = २ज्या^{-१}(+१) = २\pi = \pi \text{ यह सिद्ध हुआ । परन्तु}$$

इस बात का यहाँ अवश्य ध्यान रखना चाहिये कि ज्या पर से इस श्रेढी द्वारा जो

चाप का मान आता है वह सर्वदा $\frac{\pi}{२}$ इस से अल्प इस लिये यहाँ भी पहले के

ऐसा इस एक मान को लेकर विचार करना चाहिये ।

४६। जब ४० वे प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$\int_a^k f(y) \text{ ताय} = \text{च}_1 f(a) + \text{च}_2 f(y_1) + \dots + \text{च}_n f(y_{n-1}) \dots (1)$$

$$\int_a^k f_a(y) \text{ ताय} = \text{च}_1 f_a(a) + \text{च}_2 f_a(y_1) + \dots + \text{च}_n f_a(y_{n-1}) \dots (2)$$

और $\int_a^k f_i(y) \text{ ताय} = \text{च}_1 f_i(a) + \text{च}_2 f_i(y_1) + \dots + \text{च}_n f_i(y_{n-1}) \dots (3)$

होगे इस लिये $f(a), f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_{n-1})$ प्रत्येक क्रम से यदि $f_a(a), f_a(y_1), f_a(y_2), \dots, f_a(y_{n-1})$

और $f_i(a), f_i(y_1), f_i(y_2), \dots, f_i(y_{n-1})$ इन के प्रत्येक पद के भीतर हो अर्थात् $f_a(a)$ और $f_i(a)$ के बीच में $f(a), f_a(y_1)$ और $f_i(y_1)$ के बीच में $f(y_1)$ इत्यादि हो तो स्पष्ट है कि दूसरे और तीसरे के प्रत्येक पदों के योग अर्थात् $\int_a^k f_a(y) \text{ ताय}$ और $\int_a^k f_i(y) \text{ ताय}$ के बीच में $\int_a^k f(y) \text{ ताय}$

यह होगा ।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि $f(y)$ यह $f_a(y)$ और $f_i(y)$ के बीच में हो y के a और k के बीच किसी मान में तो

$$\int_a^k f(y) \text{ ताय} \text{ यह भी } \int_a^k f_a(y) \text{ ताय} \text{ और } \int_a^k f_i(y) \text{ ताय} \text{ के बीच में होगा।}$$

जैसे त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि $\text{ज्या}^{2n+1} y$ यह सर्वदा $\text{ज्या}^{2n} y$ और $\text{ज्या}^{2n+2} y$ के बीच में रहता है अर्थात् $\text{ज्या}^{2n} y > \text{ज्या}^{2n+1} y > \text{ज्या}^{2n+2} y$ तो

$$\text{ऊपर के सिद्धान्त से } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n} y \text{ ताय} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n+1} y \text{ ताय}$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n+2} y \text{ ताय} \text{ यह होगा।}$$

४७। यदि $f(y), y$ के स्थान में a और a से बड़ी संख्या का उत्पादन देने से उत्तरोत्तर न्यून होता जाय तो

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots \text{ अनन्त यह श्रेणी और } \int_a^\infty f(y) \text{ ताय}$$

यह दोनों सान्त अथवा दोनों अनन्त होंगे ।

क्योंकि (४०) वें प्रक्रम मे $k = a + 1$ ऐसा मानो तो सिद्ध होगा कि

$$k - a) f(a) = f(a) \int_a^{a+1} f(y) \text{ ताय } \int (k - a) f(a + 1) = f(a + 1) \\ f(a + 2)$$

इसी तरह $f(a + 1) \int_a^{a+1} f(y) \text{ ताय } \int$

$$\dots \\ f \{ a + (n - 1) \} \int_{a+(n-1)}^{a+n} f(y) \text{ ताय } \int f(a + n)$$

तीनों का योग कर न को अनन्त मानने से (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$f(a) + f(a + 1) + f(a + 2) + \dots \int_a^\infty f(y) \text{ ताय } \int f(a + 1)$$

+ $f(a + 2) + f(a + 3) + \dots$ यह सिद्ध हुआ ।

इसलिये यदि श्रेणी सान्त होगी तो $\int_a^\infty f(y) \text{ ताय } \int$ यह सान्त और श्रेणी

के अनन्त में अनन्त होगा ।

४८ । यदि लाय = ला, ला { ला(य) } = ला^२(य), ला [ला { ला(य) }] = ला^३(य) इत्यादि कल्पना करो तो चलनकलन से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\{ \text{ला}^{d+1}(य) \}^{1-t}}{1-t} \right] = \frac{1}{\text{यला}(य) \text{ला}^2(य) \dots \text{ला}^d(य) \{ \text{ला}^{d+1}(य) \}^t \text{ताय}}$$

इस लिये यदि $f(y) \text{ ताय } = \frac{1}{\text{यला}(य) \text{ला}^2(य) \text{ला}^3(य) \dots \text{ला}^d(य) \{ \text{ला}^{d+1}(य) \}^t}$

तो $\int f(y) \text{ ताय } = \frac{\{ \text{ला}^{d+1}(य) \}^{1-t}}{1-t}$ यदि त रूप के तुल्य न हो और यदि त

रूप के तुल्य हो तो $\int f(y) \text{ ताय } = \text{ला}^{d+2}(य)$ होगा ।

और $\int_a^\infty f(y) \text{ ताय } = - \frac{\{ \text{ला}^{d+1}(अ) \}^{1-t}}{1-t}$ यदि $t > 1$ और यदि $t = 1$ वा

$t < 1$ तो $\int_a^\infty f(y) \text{ ताय } = \infty$ इस लिये (४७) वें प्रक्रम से

$f(y) = \frac{1}{\text{यला}(य) \text{ला}^2(य) \dots \text{ला}^d(य) \{ \text{ला}^{d+1}(य) \}^t}$ इस में य के स्थान में $a, a + 1, a + 2,$ इत्यादि का उत्थापन देने से जो श्रेणी होगी वह सान्त

होगी अर्थात् उसके उत्तरोत्तर पास के दो पदों का सम्बन्ध एक से अल्प हो जायगा । चाहे पद की संख्या कितनी ही हो ।

४९ । कल्पना करो कि जिस में अनन्त पद हैं वैसी एक

$$\frac{१}{फा(न)} + \frac{१}{फा(न+१)} + \frac{१}{फा(न+२)} + \frac{१}{फा(न+३)} + \dots$$
 यह श्रेणी है

किसी एक पद का मान $\frac{१}{फा(य)}$ ऐसा समझो । अब यहाँ इस बात का फल लगाना है कि इस श्रेणी का मान सान्त होगा वा अनन्त । यदि श्रेणी का मान अनन्त होगा तब तो स्पष्ट ही है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों $\frac{१}{फा(य)}$ भी बढ़ता जायगा । इस लिये यदि श्रेणी का मान सान्त होगा तो निश्चय है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों फा(य) भी बढ़ता जायगा ।

कल्पना करो कि न से आगे अनन्त तक चाहे जितना य बढ़ता जाय परन्तु $\frac{१}{फा(य)}$ इस का मान सर्वदा $\frac{ग}{य^त}$ इस से छोटा है जहां ग और त कोई स्थिर संख्या और $त > १$ है । ऐसी स्थिति में ४७ वे प्रक्रम से स्पष्ट है कि उद्दिष्ट श्रेणी का मान $\frac{ग}{न^त} + \frac{ग}{(न+१)^त} + \frac{ग}{(न+२)^त} + \dots$ इस श्रेणी से अल्प होगा इस लिये स्वयं भी सान्त होगा ।

$$\text{यदि } \frac{१}{फा(य)} < \frac{ग}{य^त} \quad य^त < ग \text{ फा(य)}$$

और $त ला (य) < ला \{ गफा(य) \}$ लघुरिक्थ लेने से

इस लिये $त < \frac{ला \{ गफा(य) \}}{लाय}$ इस में यदि $य = \infty$ तो हर और अंश

दोनों अनन्त होते हैं इस लिये चलनकलन के ५वें अध्याय से

$\frac{ला \{ गफा(य) \}}{लाय}$ इस का मान $\frac{यफा(य)}{फा(य)}$ यह होगा । इस लिये इस में

य के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक से अधिक हो तो त का ऐसा मान मान सकते हैं जो कि एक से अधिक अर्थात् सर्वदा $य^त < ग फा(य)$ हो । और इसी तरह यदि लुप्तभिन्न का मान एक से न्यून हो तो त का मान ऐसा छोटा मान सकते हैं जिस में सर्वदा $य^त > ग फा(य)$ हो ऐसी स्थिति में श्रेणी का मान अनन्त होगा !

इस पर से यह सिद्ध होता है कि किसी श्रेणी में यदि y के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से $\frac{y f_1(y)}{f(y)}$ इस का मान एक से अधिक हो तो श्रेणी का मान सान्त और अल्प हो तो श्रेणी का मान अनन्त होगा ।

परन्तु यदि $\frac{y f_1(y)}{f(y)}$ इस का मान एक के बराबर हो तो (४८)वें प्रक्रम से

$$\int f(y) \text{ ताय} = \frac{g y^{1-t}}{1-t} \text{ इस लिये } \int_n^\infty f(y) \text{ ताय} = \infty \text{ ऐसी स्थिति}$$

में अब यह नहीं कह सकते कि उद्दिष्ट श्रेणी का मान सान्त होगा वा अनन्त ।

अब मानो कि n से लेकर अनन्त तक y के मान में $\frac{1}{f(y)}$ यह

$\frac{g}{y \{ \text{लाय} \}^t}$ इससे छोटा रहता है जहां g और t स्थिराङ्क और $t > 1$

तो (४८)वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि श्रेणी का मान सान्त होगा । परन्तु

$$\frac{1}{f(y)} < \frac{g}{y \{ \text{लाय} \}^t} \quad \{ \text{लाय} \}^t < \frac{g f_1(y)}{y} \text{ लघुरिक्थ लेने से}$$

$$t \text{ ला}^t(y) < \text{ला} \frac{g f_1(y)}{y} \cdot t < \frac{\text{ला} \frac{g f_1(y)}{y}}{\text{ला}^t(y)} = \frac{\text{ला} g f_1(y) - \text{ला}(y)}{\text{ला}^t(y)}$$

यहां भी y के अनन्त मान में यह लुप्तभिन्न हुआ जिस का मान चलनकलन के

$$३६वें प्रक्रम से \text{ला}(y) \left\{ \frac{y f_1(y)}{f(y)} - 1 \right\} \text{ यह होगा}$$

इस लिये इस का मान यदि एक से अधिक हो तो श्रेणी का मान सान्त और एक से न्यून में अनन्त होगा ।

इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक के बराबर हो तो फिर पहले के ऐसा

अनिश्चय होगा । तब $\frac{1}{f(y)}$ इस का मान $\frac{g}{y \text{ला}(y) \{ \text{ला}^t(y) \}^t}$ इस से

छोटा कल्पना कर पहले ऐसी क्रिया करो तो लुप्तभिन्न का मान

$$\text{ला}^t(y) \left[\text{ला}(y) \left\{ \frac{y f_1(y)}{f(y)} - 1 \right\} \right] \text{ ऐसा होगा}$$

$$\text{इस में यदि } \frac{y f_1(y)}{f(y)} \text{ ता, } \text{ला}(y) \left\{ \frac{y f_1(y)}{f(y)} - 1 \right\} = \text{ता,}$$

$ला'(य) [ला(य) \left\{ \frac{यफा'(य)}{फा(य)} - १ \right\}] = ता_२$ इत्यादि मानो तो

साधारण यह क्रिया उत्पन्न होती है

$$ता_१ = ला(य)(ता_० - १), ता_२ = ला'(य)(ता_१ - १), ता_३ = ला''(य)(ता_२ - १)$$

$ता_m = ला^{(m)}(य) \{ ता_{m-१} - १ \}$ । इस लिये इस सिद्धान्त पर से $ता_०, ता_१, ता_२$ इत्यादि के मान बनाते चले जावो जिस का मान एक से भिन्न हो उस पर से उद्दिष्ट श्रेढी का मान सान्त वा अनन्त है इस का विचार कर सकने हो ।

यदि $\frac{१}{फा(य)} = फि(य)$ तो $फा(य) = \frac{१}{फि(य)}$ इस का उत्थापन $ता_०$ में देने से

$ता_० = \frac{यफा(य)}{फा(य)} = - \frac{यफि'(य)}{फि(य)}$ ऐसा होगा फिर आगे $ता_१, ता_२$ इत्यादि का मान पूर्ववत् जान सकते हो ।

चलनकलन से— $\frac{यफि'(य)}{फि(य)} = य \left\{ \frac{फि(य)}{फि(य+१)} - १ \right\}$ यह भी सिद्ध कर सकते

हो जब $य = \infty$ क्योंकि ऐसी दशा में $\frac{फि'(य+१)}{फि(य+१)} = \frac{फि'(य)}{फि(य)}$ जहां $१ < १$ ।

इस प्रकार से श्रेढी का मान सान्त वा अनन्त होगा यह सब डिमार्गन (Demorgan) साहव ने अपने चलनकलन और चलराशिकलन (Differential and Integral Calculus) के २०८—२१० प्र० में लिखा है । इस में यह कुछ नियम नहीं कि लुप्तभिन्न ही के प्रकार से मान ले आवो चाहिये कि जिस प्रकार से लाघव हो वह क्रिया करो ।

जैसे जिस श्रेढी का न संख्यक पद $\left(\frac{१}{न}\right)^{अ+क}$ यह है उस का मान कैसा होगा यह जानना है यहां

$$\left(\frac{१}{य}\right)^{अ+क} = \frac{१}{१} = \frac{१}{फा(य)}, \text{ यदि } फि(य) = \left(\frac{१}{य}\right)^{अ+क}$$

इस लिये लघुरिक्थ लेने से

$$ला \left\{ फि(य) \right\} = \left(अ + \frac{क}{य} \right) ला \left(\frac{१}{य} \right) = - \left(अ + \frac{क}{य} \right) ला(य)$$

तात्कालिक सञ्बन्ध निकालने से

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = - \left[\frac{a}{y} + \frac{k}{y^2} \right] + \frac{\text{कलाय}}{y^2}$$

इस लिये

$$\text{ता}_0 = - \frac{y f'(y)}{f(y)} = \left(a + \frac{k}{y} \right) - \frac{\text{कलाय}}{y} \text{ इस में यदि } y = \infty \text{ तो}$$

$$\frac{k}{y} = 0, \text{ और } \frac{\text{कलाय}}{y} = k \frac{1}{y} = 0 \text{ लुप्तभिन्न के आनयन से ।}$$

इस लिये $\text{ता}_0 = a$ । इस लिये यदि $a > 1$ तो श्रेढ़ी का मान

सान्त और यदि $a < 1$ तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा ।

५० । कल्पना करो कि

$$f(x) = f(x-l) + l f'(x-l) + \frac{l^2}{2} f''(x-l) + \dots + \frac{l^n}{n} f^{(n)}(x-l), \dots (1)$$

ल के चश से तात्कालिक सम्वन्ध निकालने से

$$f'(x) = f'(x-l) + f'(x-l) - l f''(x-l) + l f''(x-l) - \frac{l^2}{2} f'''(x-l)$$

$$\dots + \frac{l^{n-2}}{(n-2)} f^{(n)}(x-l) - \frac{l^n}{n} f^{(n+1)}(x-l)$$

$$= - \frac{l^n}{n} f^{(n+1)}(x-l)$$

ल के ० और च के बीच मान में दोनो के सान्त चल मान

$$f(x) - f(0) = - \frac{1}{n} \int_0^x l^n f^{(n+1)}(x-l) \text{ताल}$$

परन्तु (१) मे ल के स्थान मे ० और च का उत्थापन देने से

$$f(x) - f(0) = f(x-c) + c f'(x-c) + \frac{c^2}{2} f''(x-c) +$$

$$+ \frac{c^n}{n} f^{(n)}(x-c) - f(x)$$

$$= - \frac{1}{n} \int_0^x l^n f^{(n+1)}(x-l) \text{ताल}$$

य के स्थान में $a + c$ का उत्थापन देकर पक्षान्तरानयन से

$$f(a+c) = f(a) + c f'(a) + \frac{c^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{c^n}{n} f^{(n)}(a)$$

$$+ \frac{1}{n} \int_0^c l^n f^{n+1}(y-l) \text{ताल}$$

इस लिये $f(x+c)$ इस का चलनकलन में टेलर के सिद्धान्त से जो श्रेणी में मान आवेगा उस में n पद के अनन्तर $n+1$, $n+2$, इत्यादि जो पद होंगे

उनका योग $\frac{1}{n} \int_0^c l^n f^{n+1}(y-l) \text{ताल}$ इस सान्तचल के तुल्य होगा

जिस का मान (४०) के प्रक्रम से $\frac{1}{n} p^n c^{n+1} f^{n+1}(x+c-pc)$ ऐसा वा,

$$\frac{1}{n} f^{n+1}(x+c-pc) \int_0^c l^n \text{ताल} = \frac{1}{n} f^{n+1} \{x+c(1-p)\} \int_0^c l^n \text{ताल}$$

$$= \frac{1}{n} f^{n+1}(x+cp_1) \int_0^c l^n \text{ताल} \text{ ऐसा होगा [जहां } p_1 = 1 - p = \text{कोई एक}$$

से न्यून संख्या है] = $\frac{c^{n+1}}{n+1} f^{n+1}(x+cp_1)$ ऐसा होगा

५१। जब चलनकलन से सिद्ध है कि फल का वा फल में स्थिराङ्क युत वा रहित का तात्कालिक सम्बन्ध एक ही होता है इस लिये एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का यदि कई एक प्रकार से चलानयन करो तो स्पष्ट है कि वे सब तुल्य होंगे वा उनका अन्तर कोई स्थिराङ्क के तुल्य होगा ।

$$\text{जैसे } \int \frac{\text{ताय}}{(1-y)} = \int \text{ताय} (1-y)^{-2} = - \int - \text{ताय} (1-y)^{-2} = \frac{1}{1-y}$$

यह प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से सिद्ध हुआ । और इसी में यदि

$$y = \frac{1}{r} \text{ ऐसा मानो तो ताय} = - \frac{\text{तार}}{r} \text{ और } (1-y) = \left(\frac{r-1}{r}\right) \text{ इस लिये}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{(1-y)} = - \int \frac{\text{तार}}{(r-1)} = \frac{1}{r-1} = \frac{y}{1-y} \text{ प्रथमाध्याय के तीसरे}$$

सूत्र से । इस लिये दोनों का अन्तर = $\frac{y}{1-y} \circ \frac{1}{1-y} = 1 = \text{स्थिराङ्क के हुआ ।}$

ऐसे ही सब जगह जानना चाहिये ।

इसी जगह यदि $\int_0^c \frac{\text{ताय}}{(1-y)}$ इस का मान जानना हो तो स्पष्ट है कि दोनों

पर से एक ही आवेगा क्योंकि $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(y)$ वा, $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(y) + \text{स्थि}$ ऐसा मानो तो पहले से $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(k) - \text{फा}(x)$

और दूसरे मान से भी फा(क) + स्थि — { फा(अ) + स्थि } = फा(क) — फा(अ) वही हुआ।

एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का भिन्न भिन्न रूप में चलानयन कर और उन पर से दो सीमाओ के भीतर दो सान्त चलानयन कर अनेक चमत्कृत समता उत्पन्न कर सकते हो। जैसे खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int_0^1 y^m (1-y)^n \text{ताय} = \frac{y^{m+1} (1-y)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1} \int_0^1 y^{m+1} (1-y)^{n-1} \text{ताय}$$

इस लिये $\int_0^1 y^m (1-y)^n \text{ताय} = \frac{n}{m+1} \int_0^1 y^{m+1} (1-y)^{n-1} \text{ताय}$

वार वार यही क्रिया करने से

$$\int_0^1 y^m (1-y)^n \text{ताय} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{(m+1)(m+2) \dots (m+n+1)} \quad (१)$$

और द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$y^m (1-y)^n = y^m \left\{ 1 - ny + \frac{n(n-1)}{2} y^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} y^3 + \dots \right\}$$

$$= y^m - ny^{m+1} + \frac{n(n-1)}{2} y^{m+2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} y^{m+3} + \dots$$

इस लिये प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से

$$\int y^m (1-y)^n \text{ताय} = \frac{y^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+2} y^{m+2} + \frac{n(n-1)}{2(m+3)} y^{m+3}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3(m+4)} y^{m+4} + \dots$$

और $\int_0^1 y^m (1-y)^n \text{ताय} = \frac{1}{m+1} - \frac{n}{1} \frac{1}{m+2} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{m+3}$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \frac{1}{m+4} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{m+n+1} \dots (२)$$

इस लिये यहाँ ऊपर की युक्ति से निश्चय है कि (१) और (२) का दहिना पक्ष परस्पर तुल्य है।

५२। खण्ड चलानयन से सिद्ध है कि

$$\int f(y) \text{ताय} = yf(y) - \int yf'(y) \text{ताय}$$

$$\int yf'(y) \text{ताय} = \frac{y^2}{2} f'(y) - \frac{1}{2} \int y^2 f''(y) \text{ताय}$$

$$\int y^n f'(y) \text{ ताय} = \frac{y^{n+1}}{n+1} f'(y) - \int y^n f''(y) \text{ ताय}$$

इन सब का एक एक में उत्थापन देने से

$$\int f(y) \text{ ताय} = y f(y) - \frac{y^2}{2} f'(y) + \frac{y^3}{3} f''(y) - \frac{y^4}{4} f'''(y) + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n f^{(n-1)}(y) + \frac{(-1)^n}{n} \int y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$$

इस लिये

$$\int_0^a f(y) \text{ ताय} = a f(a) - \frac{a^2}{2} f'(a) + \frac{a^3}{3} f''(a) - \frac{a^4}{4} f'''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} a^n}{n} f^{(n-1)}(a) + \frac{(-1)^n}{n} \int_0^a y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$$

इस प्रकार से सान्तचल ज्ञान के लिये यह जो श्रेणी उत्पन्न हुई है उसे वर्नली (Bernoulli) साहब ने निकाला है इस लिये उन के आदरार्थ इस को वर्नली की श्रेणी (Bernoulli's Series) कहते हैं।

यह जहाँ $f(y)$ का रूप y^{n-1} इस तरह का हो वहाँ पर बड़े काम की है क्योंकि ऐसी जगह पर

$f^{(n)}(y) = \frac{d^n (y^{n-1})}{\text{ताय}^n}$ यह शून्य के तुल्य होगा। अथवा जहाँ पर $\int f(y) \text{ ताय}$ इसकी अपेक्षा $\int y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$ इस का मान सहज में निकलता हो वहाँ पर भी यह बड़े काम की है।

जहाँ पर $\int_0^a y^n f^{(n)}(y) \text{ ताय}$ इसका मान बहुत थोड़ा हो वहाँ पर भी स्वल्पान्तर से $\int_0^a f(y) \text{ ताय}$ इसके आसन्न मान का ज्ञान इस से सहज में हो सकता है।

५३। जब कि सिद्ध है कि $\int f(y) \text{ ताय}$ यह y के उस फल को बताता है जिसका तात्कालिक सम्बन्ध $f(y)$ है तब स्पष्ट है कि एक फल ऐसा भी होगा जिसका तात्कालिक सम्बन्ध $\int f(y) \text{ ताय}$ यह हो। अर्थात् यदि $\int f(y) \text{ ताय} = F(y)$ मानो तो $\int F(y) \text{ ताय}$ यह भी एक मान जान सकते हो जिसका तात्कालिक सम्बन्ध $F(y)$ के समान होगा। ऐसे ही बार बार चलजान कर सकते हो।

इसको $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(y)$ । $\int \text{फा}(y) \text{ताय} = \int \int f(y) \text{ताय ताय} = \text{फ}(y)$ ।
 $\int \text{फि}(y) \text{ताय} = \int \int \text{फा}(y) \text{ताय ताय} = \int \int \int f(y) \text{ताय ताय ताय}$
 इस तरह से लिखते हैं । $\int \int \int f(y) \text{ताय ताय ताय}$ यह प्रकाश करता है कि $\int f(y) \text{ताय}$ इसके मान को ताय से गुणने से जो हो उसके चल मान को फिर ताय से गुणकर गुणित फल का चल है ।

जैसे $\int \text{ताय} = y + ग,$

$$\int (y + ग_०) \text{ताय} = \int \int \text{ताय ताय} = \frac{y^2}{2} + ग_० y + ग_०$$

$$\int \left(\frac{y^2}{2} + ग_० y + ग_० \right) \text{ताय} = \int \int (y + ग_०) \text{ताय ताय} = \int \int \int \text{ताय ताय ताय}$$

$$= \frac{y^3}{6} + \frac{ग_० y^2}{2} + ग_० y + ग_० \text{ जहां } ग_०, ग_० \text{ इत्यादि स्थिराङ्क है ।}$$

इसी तरह यहां न बार चलज्ञान करे तो स्पष्ट है कि उस का मान $आ_० y^n + आ_१ y^{n-1} + आ_२ y^{n-2} + \dots + आ_n$ ऐसा होगा जहां $आ_०, आ_n,$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

५४ । यदि $\int च \text{ताय} = च_१, \int च_१ \text{ताय} = च_२, \int च_२ \text{ताय} = च_३$ इत्यादि मानो जहां $च, च_१,$ इत्यादि y के फल हैं और $\frac{\text{ताज}}{\text{ताय}} = ज, \frac{\text{ता}^2 \text{ज}}{\text{ताय}^2} = ज_०,$ इत्यादि जहां $ज y$ का कोई फल है तो खण्डचलानयन से

$$\int चज \text{ताय} = च_१ ज - \int च_१ ज_१ \text{ताय} = च_१ ज_१ - च_२ ज_१ + \int च_२ ज_२ \text{ताय}$$

$$= च_१ ज_१ - च_२ ज_१ + च_३ ज_० - च_२ ज_३ + \dots + (-1)^{n-1} च_n ज_{n-1}$$

$+ (-1)^n \int च_n ज_n \text{ताय}$ इसी श्रेढ़ी में यदि $च = १$ और $ज = \text{फ}(y)$ मानो तो वर्नली की श्रेढ़ी उत्पन्न हो जायगी इस लिये इस श्रेढ़ी को वर्नली के श्रेढ़ी का मूल कह सकते हैं । यह श्रेढ़ी भी बहुत स्थानों में बड़े काम की है ।

जैसे इस श्रेढ़ी में यदि $च = इ^y$ मानो तो स्पष्ट है कि $च_१, च_२$ इत्यादि सब परस्पर तुल्य होंगे इस लिये

$$\int इ^y ज \text{ताय} = इ^y \{ ज - ज_१ + ज_० - ज_३ + \dots + (-1)^{n-1} ज_{n-1} \}$$

$$+ (-1)^n \int इ^y ज_n \text{ताय}$$

इस में $ज$ के स्थान में भिन्न भिन्न फल का उत्पादन देने से हजारों उदाहरण पना सकते हो ।

५५। यदि $च_1 = \int च ताय$, $च_2 = \int च_1 ताय$, $च_3 = \int च_2 ताय$ इत्यादि मान तो खण्डचलानयन से

$$च_3 = \int च_2 ताय = यच_2 - \int य \frac{ताच_2}{ताय} ताय = य \int च ताय - \int य च ताय$$

$$च_3 = \int च_2 ताय = \int \{ य \int च ताय - \int य च ताय \} ताय$$

यहां भी खण्डचलानयन से

$$च_3 = \frac{य^2}{2} \int च ताय - \int \frac{य^2}{2} च ताय - य \int य च ताय + \int य^2 च ताय$$

$$= \frac{य^2}{2} \int च ताय - य \int य च ताय + \frac{1}{2} \int य^2 च ताय$$

इसी प्रकार से बार बार करते जाओ तो अन्त में

$$\begin{aligned} \underline{च}_{n+1} | \underline{न} &= य^n \int च ताय - न य^{n-1} \int य च ताय + \int \frac{n(n-1)}{2} य^{n-2} \int य^2 च ताय \\ &+ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (न-3+1) य^{n-3} \int य^3 च ताय \\ &+ (-1)^{\frac{n}{2}} \int य^n च ताय \end{aligned}$$

यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा ।

इस की सत्यता के लिये मानो कि किसी n के मान में यह सिद्धान्त सत्य है तो $च_{n+2} = \int च_{n+1} ताय$ और $\underline{च}_{n+2} = \int \underline{च}_{n+1} ताय$
 $= \int \{ य^n ताय \int च ताय \} - \int \{ न य^{n-1} ताय \int य च ताय \}$
 $+ \int \left\{ \frac{n(n-1)}{2} य^{n-2} ताय \int य^2 च ताय \right\}$ प्रत्येक $\left\{ \right\}$ अन्तर्गत का खण्डचलानयन से मान ले आने से

$$\begin{aligned} \underline{च}_{n+2} | \underline{न} &= \frac{य^{n+1}}{n+1} \int च ताय - \frac{1}{n+1} \int य^{n+1} च ताय - य^n \int य च ताय + \int य^{n+1} च ताय \\ &+ \frac{n}{2} य^{n-1} \int य^2 च ताय - \frac{n}{2} \int य^{n+1} च ताय + \end{aligned}$$

$n+1$ से दोनों पक्षों को गुणकर दहिने पक्ष को यथा क्रम लिखने से $\underline{च}_{n+2} | \underline{न} = य^{n+1} \int च ताय - (n+1) य^n \int य च ताय$

$$+ \frac{n(n+1)}{2} य^{n-1} \int य^2 च ताय -$$

वा, $\underline{च}_{n+2} | \underline{न} = य^n \int च ताय - न य^{n-1} \int य च ताय$

$$+ \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} \int y^{\text{चतुर्थताय}} -$$

इस लिये यदि यह सिद्धान्त किसी न मान में सत्य हो तो $n+1$ में भी सत्य होगा परन्तु यदि $n=2$ तो च_३ के मान से स्पष्ट है कि यह सिद्धान्त सत्य है इसलिये n के सब मान में यह सिद्धान्त सत्य ठहरा ।

५६। \int ज्या^नयताय वा \int कोज्या^नयताय के मान के लिये यदि चलन-कलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से ज्या^नय वा कोज्या^नय का रूप ज्या और कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो तो बहुत ही सुगमता चलानयन में होगी । जैसे चलनकलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध है कि

$$\angle \text{ज्या}^n \text{य} = \text{कोज्या}^{\text{४य}} - \text{४कोज्या}^{\text{२य}} + ३$$

इस लिये

$$\angle \int \text{ज्या}^n \text{यताय} = \int \text{कोज्या}^{\text{४य}} \text{ताय} - ४ \int \text{कोज्या}^{\text{२य}} \text{ताय} + \int ३ \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{\text{४य}}}{४} - २ \text{ज्या}^{\text{२य}} + ३य$$

$$\therefore \int \text{ज्या}^n \text{यताय} = \frac{\text{ज्या}^{\text{४य}}}{३२} - \frac{\text{ज्या}^{\text{२य}}}{४} + \frac{३य}{८} \text{ यह पहले लघूकरणसिद्धान्त}$$

की अपेक्षा बड़े लाघव से सिद्ध हुआ ।

इस प्रकार और भी बहुत उपाय से जिस में सुगमता हो वैसी क्रिया करनी चाहिये ।

५७। इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को जिस में बोध हो इस लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखाते हैं ।

$$(१) \left(\frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{२}{२n}\right)^n + \left(\frac{३}{२n}\right)^n + \dots \quad २ \text{ न पद तक जो यह श्रेढी है}$$

इस में $\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२n}\right)^n + \dots \quad n \text{ पद तक जो यह श्रेढी है इसका भाग देने से क्या लब्धि होगी यदि } n = \infty$ ।

यहां प्रश्नानुसार n के अनन्त मान में

$$\frac{\left(\frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{२}{२n}\right)^n + \left(\frac{३}{२n}\right)^n + \dots \quad २ \text{ न पद तक}}{\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२n}\right)^n + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२n}\right)^n + \left(\frac{१}{२} + \frac{३}{२n}\right)^n + \dots \quad n \text{ पद तक}} \text{ इसका मान जानना है}$$

अंश और हर को $\frac{१}{२n}$ से गुण देने से

$$\text{अंश} = \frac{1}{2^n} \left\{ \left(\frac{1}{2^n} \right)^n + \left(\frac{2}{2^n} \right)^n + \left(\frac{3}{2^n} \right)^n + \dots \text{ २ न पद तक } \right\}$$

$$\text{हर} = \frac{1}{2^n} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^n} \right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^n} \right)^n + \dots \text{ २ न पद तक } \right\}$$

४०वे प्रक्रम के समीकरण के साथ अंश और हर दोनों की तुलना करो तो अंश में $\frac{1}{2^n} = \text{च}$, $\text{अ} = ०$, $\text{क} = ० + २\text{नच} = १$ और $\text{फ(य)} = (\text{य})^n$

$$\text{इस लिये अंश का मान} = \int_0^1 \text{फ(य)}\text{ताय} = \int_0^1 \text{य}^n \text{ताय} = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{और हर में पहला पद फ(अ)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \right)^n \quad \text{अ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{और } \frac{1}{2^n} = \text{च} \quad \text{क-अ} = \text{चन} = \frac{1}{2} \quad \text{और क} = \frac{1}{2} + \text{अ} = १ + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{और फ(य)} = (\text{य})^n \quad \text{इस लिये } \int \text{फ(य)}\text{ताय} = \int (\text{य})^n \text{ताय} = \frac{(\text{य})^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये हर} &= \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}}^{1 + \frac{1}{2^n}} \text{फ(य)}\text{ताय} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \quad \text{यदि } n = \infty \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये ऊपर के भिन्न का मान} = \frac{\text{अं}}{\text{ह}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

यही उत्तर हुआ ।

(२) सिद्ध करो कि यदि $\text{फ(य)} = \text{फ(अ + य)}$ तो

$$\int_0^{m\text{अ}} \text{फ(य)}\text{ताय} = m \int_0^{\text{अ}} \text{फ(य)}\text{ताय}$$

यहाँ $\int_0^{m\text{अ}} \text{फ(य)}\text{ताय}$ इसका मान यदि २ प्रक्रम से श्रेणी में लावो तो

$$\frac{1}{n} \left\{ \text{फ}(०) + \text{फ}\left(\frac{m\text{अ}}{n}\right) + \text{फ}\left(\frac{2m\text{अ}}{n}\right) + \dots + \text{फ}\left[\frac{m\text{अ}(n-1)}{n}\right] \right\} \text{ ऐसा होगा.} \quad (१)$$

परन्तु प्रश्न से $\text{फ(य)} = \text{फ(अ + य)}$ $\text{फ}(०) = \text{फ}(अ)$, $\text{फ}\left(\frac{m\text{अ}}{n}\right) = \text{फ}\left(अ + \left(\frac{m\text{अ}}{n}\right)\right)$,
उत्थादि । इनका उत्थापन देने से (१) का मान

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \left\{ \text{अ} + \text{फ}\left(अ + \frac{1\text{अ}}{n}\right) + \text{फ}\left(अ + \frac{2\text{अ}}{n}\right) + \dots + \text{फ}\left[अ + \frac{m\text{अ}(n-1)}{n}\right] \right\} \\ &= \int_0^{\text{अ}} \text{फ(य)}\text{ताय यह हुआ।} \end{aligned}$$

इसी गति में फ(य) पर से

$$\int_a^{m\Delta + a} f(y) \text{ ताय} = \frac{m\Delta}{n} \left\{ f(a) + f\left(a + \frac{m\Delta}{n}\right) + f\left(a + \frac{2m\Delta}{n}\right) + \dots \right. \\ \left. + f\left[a + \frac{m\Delta(n-1)}{n}\right] \right\} \dots (2)$$

यहाँ भी जब $f(y) = f(y + a)$ ' $f(a) = f(2a)$,

$f\left(a + \frac{m\Delta}{n}\right) = f\left(2a + \frac{m\Delta}{n}\right)$, इ० इन का उत्थापन (२) में देने से (२) का मान

$$\frac{m\Delta}{n} \left\{ f(2a) + f\left(2a + \frac{m\Delta}{n}\right) + \dots + f\left[2a + \frac{m\Delta(n-1)}{n}\right] \right\} \\ = \int_{2a}^{m\Delta + 2a} f(y) \text{ ताय यह हुआ}$$

इस पर से सिद्ध हुआ कि

$$\int_0^{m\Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_a^{m\Delta + a} f(y) \text{ ताय} = \int_{2a}^{m\Delta + 2a} f(y) \text{ ताय इत्यादि ।}$$

m के एक स्थान में १, का उत्थापन देने से

$$\int_0^a f(y) \text{ ताय} = \int_a^{2a} f(y) \text{ ताय} = \int_{2a}^{3a} f(y) \text{ ताय} = \dots = \int_0^a \frac{m\Delta}{m-1} f(y) \text{ ताय} (3)$$

अब ४१ वे प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_0^{m\Delta} f(y) \text{ ताय} = \int_0^a f(y) \text{ ताय} + \int_a^{2a} f(y) \text{ ताय}$$

$$+ \int_{2a}^{3a} f(y) \text{ ताय} + \dots + \int_{(m-1)a}^{ma} f(y) \text{ ताय} = m \int_0^a f(y) \text{ ताय}$$

(३) से सिद्ध हुआ ।

अथवा जब $f(y) = f(a + y)$ इस लिये $f(0) = f(a)$ और $f(a) = f(2a)$

इस लिये y के ० और a के बीच मानों में जो $\int_0^a f(y) \text{ ताय}$ इस का मान होगा वही y के औ २ अर a के बीच मानों में भी

$\int_a^{2a} f(y) \text{ ताय}$ इस का मान होगा यों आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि

$$\int_a^{2a} f(y) \text{ ताय} = \int_{2a}^{3a} f(y) \text{ ताय}, \text{ इत्यादि । इस पर से ४१वें प्रक्रम के}$$

(२) समीकरण से पहले के ऐसा उत्तर निकाल सकते हो ।

(३) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx$ इस का मान क्या होगा ?

यहाँ ४१ वे प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos x \, dx$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos x) \sin x \, dx = 2r$$

यदि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = r$,

$$2r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin x \cos x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \cos x \sin x - \cos x \} \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx - \frac{1}{2} \pi \cos x$$

$\sin x$ के स्थान में x का उत्पादन देने से सिद्ध कर सकते हो

$$\text{कि } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx$$

४१वे प्रक्रम के (६) समीकरण से

$$\text{इस लिये } 2r = r - \frac{1}{2} \pi \cos x \quad r = -\frac{1}{2} \pi \cos x = \frac{1}{2} \pi \cos x$$

(४) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x}$ इस का क्या मान होगा ।

इस का मान r , मान कर ४१वे प्रक्रम के (५)वे समीकरण से

$$r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} + \frac{(\frac{\pi}{2} - x) \sin x \cos x}{1 + \cos x} \right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} + \frac{x \sin x \cos x}{1 + \cos x} \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{1 + \cos x} \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \cos x} \, dx$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \cos x} \, dx \quad (\text{यदि } r = \cos x)$$

$$\text{परन्तु } \int \frac{\text{तार}}{1+r^2} = \text{स्प}^{-2}r = \text{स्प}^{-1} \text{ (कोज्याय)}$$

इस लिये जब $y = 0$ तो कोज्याय = १ और स्प^{-1} (कोज्याय) = $\frac{\pi}{4}$

और जब $y = \frac{\pi}{2}$ तो कोज्याय = ० और स्प^{-1} (कोज्याय) = ०

$$\text{इस लिये } -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{तार}}{1+r^2} = -\pi(0 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4} \text{ यह उत्तर हुआ।}$$

$$(५) \int_0^1 \frac{\text{ला}(1+y)}{1+y^2} \text{ ताय इस का क्या मान होगा।}$$

यहां यदि $\text{स्प}r = y$ तो $\text{ताय} = \frac{y}{r}$ तार = $(1 + \text{स्प}^2r)$ तार

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ला}(1+y)}{1+y^2} \text{ ताय} = \frac{\text{ला}(1+\text{स्प}r)}{1+\text{स्प}^2r} (1+\text{स्प}^2r) \text{ तार} = \text{ला}(1+\text{स्प}r) \text{ तार}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\text{ला}(1+y)}{1+y^2} \text{ ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{ला}(1+\text{स्प}r) \text{ तार} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{ला} \left\{ 1 + \text{स्प}\left(\frac{\pi}{4} - r\right) \right\} \text{ तार}$$

$$\text{४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से। परन्तु } \text{स्प}\left(\frac{\pi}{4} - r\right) = \frac{1 - \text{स्प}r}{1 + \text{स्प}r}$$

$$\text{इस लिये } 1 + \text{स्प}\left(\frac{\pi}{4} - r\right) = \frac{2}{1 + \text{स्प}r} \text{ और } \text{ला} \left\{ 1 + \text{स्प}\left(\frac{\pi}{4} - r\right) \right\} = \text{ला} 2 - \text{ला}(1 + \text{स्प}r)$$

इसका उत्थापन देने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{ला}(1 + \text{स्प}r) \text{ तार} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \text{ला} 2 \text{ तार} - \text{ला}(1 + \text{स्प}r) \text{ तार} \right\}$$

पक्षान्तरानयन से

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{ला}(1 + \text{स्प}r) \text{ तार} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{तार} \text{ ला} 2 = \frac{\pi}{4} \text{ ला} 2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{ला}(1 + \text{स्प}r) \text{ तार} = \frac{\pi}{8} \text{ ला} 2।$$

यहां देखो इस प्रकार से कैसे लाघव से उत्तर निकला है।

यहां यदि $\text{ला}(1+y)$ का रूप $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$ ऐसा बना कर

इस में साधारण बीजगणित की रीति से $1+y^2$ का भाग दो तो

$$\frac{\text{ला}(1+y)}{1+y^2} = y - \frac{y^3}{2} - \frac{2}{3} y^5 + \frac{y^7}{4} + \frac{13}{15} y^9 \dots \text{ऐसा होगा}$$

इस में y के गुणक १ को गु_१, और y^3 के गुणक $-\frac{1}{2}$ को

गु_२ y^{n-2} के गुणक को गु _{$n-2$} मानो तो y^n का गुणक

$-\left(\frac{1}{n} + \text{गु}_{n-2}\right)$ यह होगा यदि n सम हो। और विषम हो तो

$\left(\frac{1}{n} - \text{गु}_{n-2}\right)$ यह गुणक होगा।

यदि $\frac{\text{ला}(1+y)}{1+y^2}$ इसमें ऊपर के श्रेणी का उत्थापन देकर चलमान निकालो तो

$$\int \frac{\text{ला}(1+y)\text{ताय}}{1+y^2} = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{y^4}{2} - \frac{2}{3} \frac{y^6}{4} + \frac{1}{4} \frac{y^8}{5} + \frac{13}{15} \frac{y^{10}}{6} \dots \text{ऐसा होगा}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^1 \frac{\text{ला}(1+y)\text{ताय}}{1+y^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{5} + \frac{13}{15} \frac{1}{6} \dots$$

$$\text{इस लिये } \int_0^1 \frac{\text{ला}x}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{5} + \frac{13}{15} \frac{1}{6} \dots$$

ऐसा यह अत्यन्त चमत्कार सिद्ध होता है।

(६) $\int_0^\pi p^n \text{लाज्याप ताय}$ इसका मान $\int_0^\pi p^n \text{लाज्याप ताय}$ इस का

फल होगा यह सिद्ध करो। यदि $n > 2$ ।

यहां ४१ वे प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^\pi p^n \text{लाज्याप ताय} = \int_0^\pi (\pi - p)^n \text{लाज्याप ताय} = \int_0^\pi \pi^n \left(1 - \frac{p}{\pi}\right)^n \text{लाज्याप ताय}$$

$$= \pi^n \int_0^\pi \left\{ 1 - n \frac{p}{\pi} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{p^2}{\pi^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \frac{p^3}{\pi^3} + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{p^n}{\pi^n} \right\} \text{लाज्याप ताय}$$

$$= \pi^n \int_0^\pi \left\{ 1 - n \frac{p}{\pi} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{p^2}{\pi^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \frac{p^3}{\pi^3} + \dots \right\} \text{लाज्याप ताय}$$

$$+ \int_0^\pi (-1)^n p^n \text{लाज्याप ताय}$$

समशोधन से

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi x^n \cos x \, dx - \int_0^\pi (-1)^n x^n \cos x \, dx \\ &= \pi^n \int_0^\pi \cos x \, dx - n \pi^{n-1} \int_0^\pi x \cos x \, dx \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{2} \pi^{n-2} \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx \dots \\ & \quad + (-1)^{n-1} \int_0^\pi x^{n-1} \cos x \, dx \dots \quad (1) \end{aligned}$$

(१) इस में n के स्थान में २ का उत्थापन देने से

$$0 = \pi^2 \int_0^\pi \cos x \, dx - 2\pi \int_0^\pi x \cos x \, dx \text{ ऐसा होगा}$$

इस लिये

$$2\pi \int_0^\pi x \cos x \, dx = \pi^2 \int_0^\pi \cos x \, dx$$

$$\therefore \int_0^\pi x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos x \, dx$$

परन्तु ४१वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से और इस प्रक्रम के (३)

$$\text{उदाहरण से } \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos x \, dx = \frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^\pi x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

$$\text{यदि } \int_0^\pi \cos x \, dx = \pi \cos \frac{\pi}{2} = \text{च}_1 \text{ तो}$$

$$\int_0^\pi x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ च}_1$$

इन का उत्थापन (१) में देने से और n के स्थान में ३ मानने से

$$2 \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx = \pi^3 \text{ च}_1 - \frac{3}{2} \pi^2 \text{ च}_1 + 3\pi \int_0^\pi x \cos x \, dx$$

इस प्रकार से बार बार उत्थापन देने से

$$\int_0^\pi x^n \cos x \, dx = f(\text{च}_2) \text{ ऐसा हो जायगा जहाँ}$$

$$\text{च}_2 = \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx \text{ ।}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१ । सिद्ध करो कि यदि $f(x) = f(-x)$ तो

$$\int_{-a}^a f(y) \text{ताय} = 2 \int_0^a f(y) \text{ताय} \quad \int_{-a}^0 f(y) \text{ताय} = \int_0^+ a f(y) \text{ताय} ।$$

$$\text{और } \int_0^{-a} f(y) = - \int_0^+ a f(y) \text{ताय}$$

२। यदि $f(y) = -f(-y)$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_{-a}^+ a f(y) \text{ताय} = 0 \quad \int_{-a}^0 f(y) \text{ताय} = - \int_0^+ a f(y) \text{ताय} ।$$

$$\text{और } \int_0^{-a} f(y) \text{ताय} = \int_0^+ a f(y) ।$$

३। यदि $f(y) = f(-y)$ और $f(a) = -f(-a)$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_{-a}^+ a \{ f(y) + f(-y) \} \text{ताय} = \int_{-a}^+ a f(y) \text{ताय} = \int_{-a}^+ a \{ f(y) - f(-y) \} \text{ताय} ।$$

४। सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \text{ताय} = \sqrt{\pi} \quad \text{और} \quad \int_{-a}^+ a \text{ज्याय}^2 = 0$$

५। सिद्ध करो कि

$$\int_{-a}^+ a \frac{\text{कोज्यायताय}}{1+y^2} = \int_{-a}^+ a \frac{\text{कोज्याय}^2 \text{ताय}}{(1+y^2)(\text{कोज्याय}-\text{ज्याय})}$$

६। सिद्ध करो कि

$$\int_a^k f(y) \text{ताय} = \frac{k-a}{2g} \int_{-a}^+ a f\left(\frac{k+a}{2} + \frac{k-a}{2g}y\right) \text{ताय}$$

७। सिद्ध करो कि

$$\int_a^k f(y) \text{ताय} = \frac{k-a}{g-b} \int_{-a}^+ a f\left(\frac{a+g-b}{g-b} + \frac{k-a}{g-b}y\right) \text{ताय}$$

८। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(1+n\text{कोज्याय}) \text{ताय} = \text{यला} \frac{n}{2na} + 2n\text{ज्याय} - \frac{2}{2}n\text{ज्याय}^2 \\ + \frac{2}{3}n\text{ज्याय}^3 - \frac{2}{4}n\text{ज्याय}^4 +$$

$$\text{जहां } na = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$$

९। सिद्ध करो कि

$$\int_0^- \text{ला}(1+n\text{कोज्याय}) \text{ताय} = -\text{ला} \frac{n^2}{2(1-\sqrt{1-n^2})}$$

१०। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(1 + 2\text{मकोज्याय} + \text{म}^2)\text{ताय}$$

$$= 2(\text{मज्याय} - \frac{\text{म}^2}{2^2} \text{ज्या२य} + \frac{\text{म}^3}{2^3} \text{ज्या३य} - \frac{\text{म}^4}{2^4} \text{ज्या४य} + \dots)$$

वा, $\int \text{ला}(1 + 2\text{मकोज्याय} + \text{म}^2)\text{ताय}$

$$= 2\text{यलामं} + 2 \left\{ \frac{\text{ज्याय}}{\text{म}} - \frac{\text{ज्या२य}}{2^2\text{म}^2} + \frac{\text{ज्या३य}}{3^2\text{म}^3} - \frac{\text{ज्या४य}}{4^2\text{म}^4} + \dots \right\}$$

११। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(1 + \text{नकोज्याय})\text{ताय} = 2\text{य लाकोज्या} \frac{\text{प}}{२}$$

$$+ 2(\text{स्प} \frac{\text{प}}{२} \text{ज्याय} - \frac{१}{2^2} \text{स्प}^2 \frac{\text{प}}{२} \text{ज्या२य} + \dots)$$

यदि $\text{न} = \text{ज्याष}$

१२। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\pi}{३} \text{ला}(1 + \text{न}_0 \text{ज्या}^३\text{य})\text{ताय} = \frac{\pi}{४} \text{ला} \left\{ (1 + \text{न}_0)(1 + \text{न}_1)^{\frac{१}{३}}(1 + \text{न}_2)^{\frac{१}{४}}(1 + \text{न}_3)^{\frac{१}{५}} \dots \right\}$$

जहाँ $\text{न}_{\text{द}+१} = \frac{\text{न}_{\text{द}}^2}{४(\text{न}_{\text{द}} + १)}$

यहाँ ४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से $\int \frac{\pi}{३} \text{ला}(1 + \text{न}_0 \text{ज्या}^३\text{य})\text{ताय}$

$= \int \frac{\pi}{३} \text{ला}(1 + \text{नकोज्या}^३\text{य})\text{ताय}$ फिर इन दोनों को जोड़ कर एक नियम परम्परा बनावो ।

१३। १२वें और ९वें प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\left\{ \frac{1+(1+\text{न}_0)}{२} \right\}^४ = (1 + \text{न}_0)(1 + \text{न}_1)^{\frac{१}{३}}(1 + \text{न}_2)^{\frac{१}{४}}(1 + \text{न}_3)^{\frac{१}{५}} \dots$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\left\{ \text{फ}(\text{अ})\text{फ}(\text{अ} + \frac{\text{ग}}{\text{न}})\text{फ}(\text{अ} + \frac{२\text{ग}}{\text{न}}) \dots \text{फ}(\text{अ} + \frac{-(\text{न}-१)\text{ग}}{\text{न}}) \right\}^{\frac{१}{\text{न}}} < \frac{१}{\text{न}} \int_{\text{अ}}^{\text{अ}+\text{ग}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय}$$

यदि न का मान अनन्त हो तो ।

१५। प्रथमाध्याय के ३३वें प्रश्न से पहले यह सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{कय}} \text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}} \text{कोज्या}(\text{अय}-\text{ष})}{(\text{अ}^2 + \text{क}^2)^{\frac{१}{२}}} + \text{स्थि}, \text{ जहाँ स्पष} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

फिर इस पर से यह सिद्ध करो कि $\text{इ}^{\text{कय}} \text{कोज्याअयताय}$ इस के चल का चल फिर उस के चल का चल यों न वार तक जो चल होगा उस का प्रमाण

$$\frac{\int k^x \text{कोज्या}(अय-नष)}{(अ^2 + क^2)^{\frac{n}{2}}} + गा + गा_1य + गा_2य^2 + गा_3य^3 + \dots$$

+ गा_{n-1}य^{n-1} यह होगा ।

जहां गा, गा₁, गा₂ इत्यादि स्थिराङ्क हैं ।

१६। ८वें से सिद्ध करो कि

$$\text{लाज्याय} = \text{ला}^{\frac{1}{2}} - \text{कोज्या}^2य - \frac{1}{2}\text{कोज्या}^4य - \frac{1}{24}\text{कोज्या}^6य - \dots$$

$$\text{लाकोज्याय} = \text{ला}^{\frac{1}{2}} + \text{कोज्या}^2य - \frac{1}{2}\text{कोज्या}^4य + \frac{1}{24}\text{कोज्या}^6य - \dots$$

१७। सिद्ध करो कि यदि किसी श्रेणी का न संख्यक पद

$$\frac{t(t+a)(t+2a)}{d(d+a)(d+2a)} \quad \frac{(t+na)}{(d+na)}$$

यदि $d > t + a$ और यदि $d < t + a$ तो श्रेणी का मान अनन्त होगा ।

१८। सिद्ध करो कि किसी श्रेणी के $n+1$ संख्यक पद में n संख्यक पद का भाग देने से यदि लब्धि

$$\frac{य^t + आय^{t-1} + काय^{t-2} + \dots}{य^t + अय^{t-1} + कय^{t-2} + \dots}$$

यह हो तो यदि $a > का + 1$ तो श्रेणी का मान सान्त और यदि $a < का + 1$ तो अनन्त होगा ।

१९। यदि $आ = \int_0^k च^2ताय$, $का = \int_0^k चजताय$ और $गा = \int_0^k ज^2ताय$ तो सिद्ध करो कि $आ \times गा > का^2$ ।

बीजगणित का $(अ_1^2 + अ_2^2 + \dots + अ_n^2) (क_1^2 + क_2^2 + \dots + क_n^2)$

$> (अ_1 क_1 + अ_2 क_2 + \dots + अ_n क_n)^2$ यह सिद्धान्त देखो ।

२०। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty} \text{ला कोस्पय ताय} = 0$$

$$२१। सिद्ध करो कि \int_0^{\infty} \frac{२ अकताय}{य^y + य(अ^2 + क) + अ^2 क^2} = \frac{\pi}{अ^2 + क}$$

$$२२। सिद्ध करो कि \int_0^{\infty} \frac{(१-क^2य) ताय}{\sqrt{(अ^2-य)}} = \frac{\pi}{2} \left[१ - \frac{अ^2 क^2}{२} \right]$$

२३ । सिद्ध करो कि यदि n का मान अनन्त हो तो

$$\frac{1}{n^4} \left\{ 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 \right\} = \frac{1}{5}$$

२४ । सिद्ध करो कि यदि n का मान अनन्त हो तो

$$\frac{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^3} = \frac{2}{5}$$

२५ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{\pi}{8}$

२६ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{24} \sin 4x + \frac{1}{72} \sin 6x + \dots \right)$$

२७ । सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{24} \sin 4x + \frac{1}{72} \sin 6x - \frac{1}{288} \sin 8x + \dots \right)$$

२८ । सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{8}$

२९ । सिद्ध करो कि $\frac{1}{a^k} + \frac{1}{a^{2k}} + \frac{1}{a^{3k}} + \dots$ अनन्त

इस श्रेणी का मान सान्त होगा यदि $a > 1$ और k का मान चाहे जो हो ।

३० । $(a-1) + (a^2-1) + (a^3-1) + (a^4-1) + \dots + (a^n-1)$

यह सान्त होगा यदि $n = \infty$ उ० नहीं ।

३१ । सिद्ध करो कि

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \dots \text{ यह सर्वदा सान्त होगा ।}$$

३२ । सिद्ध करो कि $\int e^{-y} \{ f(y) + f'(y) \} dy = e^{-y} f(y)$

३३ । सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{(1+y)^2} = \frac{1}{2}$

३४ । सिद्ध करो कि यदि

$f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$ अनन्त यह सान्त हो तो $\int f(y) dy$ इस का मान भी यदि श्रेणी में ले आवें तो उस श्रेणी का मान भी सान्त होगा ।

३५ । यदि e^{ky} का n बार चल निकालें तो सिद्ध करो कि उसका

$$\text{मान} = \frac{e^{ky}}{kn} + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots + A_{n-1} y + A_n$$

जहाँ आ_१, आ_२, इत्यादि स्थिराङ्क है ।

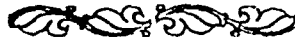
३६। एक आदमी अपने (अ) स्थान से पूर्व को चला । दूसरा जिस का (क) स्थान अ से ठीक उत्तर की ओर एक मील पर था वहाँ से उसके मिलने के लिये चला । पहले की प्रतिक्षण की गति को उस के और अ स्थान के सैक अन्तर के लघुखिच से गुण देने और उस के और क स्थान के अन्तरवर्ग का भाग देने से जो लब्ध हो उतना प्रतिक्षण में दूसरा चलता था तो बताओ कि जब पहला अपने स्थान से एक मील गया उस समय दूसरा अपने स्थान से कितना गया होगा ।

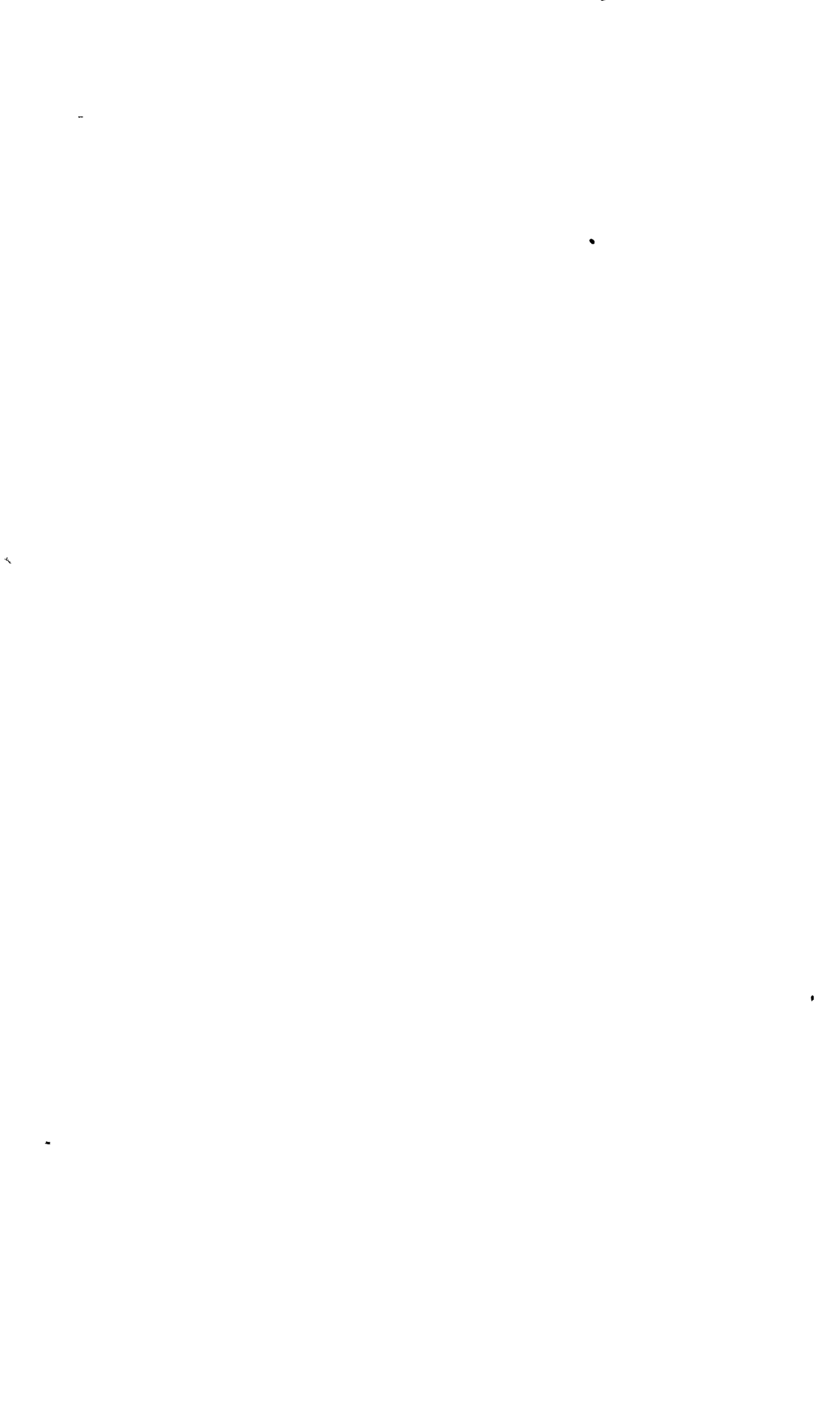
$$उ० \frac{\pi}{2} ला (२) = \frac{२००}{३६००} मील$$

३७। अ स्थान से साथ ही घोड़ दौड़ में क, ख, और ग घोड़े दौड़े । किसी क्षण में अ स्थान से जितनी मील दूरी पर क होता था उस से और उस के वर्ग से उस के उस क्षण की गति को गुण दो तो वह क्रम से ख और ग की उस क्षण की गति होती है तो बताओ कि क और ख, फिर अ स्थान से क और ख, क और ग, और ख और ग कितनी कितनी दूरी पर मिलेंगे ।

$$उ० \quad ख, ग \frac{३}{४} । क, ग, \sqrt{३} = १\frac{३}{४} \text{ और क, ख, } \\ २ \text{ मील दूरी पर मिलेंगे ।}$$

इति चतुर्थाध्याय ।





म० म० सुधाकरद्विवेदिविरचितं

चलराशिकलनम्

पञ्चमाध्यायतोऽवशिष्टभागः

THE
CHALARĀSIKALANA

BY
M. M. Sudhakara Dwivedi

PART II

Edited

BY
PANDIT BALDEVA MISHRA
JYAUTISHACHARYA JYAUTISH TIRTH
SARASVATI BHAVANA
BENARES

1943

मुद्रक—

माधव विष्णु पराङ्कर,
ज्ञानमण्डल यंत्रालय, काशी । १९९९

पुनर्निवेदनम् ।

ग्रन्थस्यास्य प्रथमभागस्य प्रकाशनावसरे मया निवेदितं यद्ग्रन्थान्ते विशेष-
प्रपञ्चः प्रदर्शितो भविष्यति । परञ्च महादुस्तरेऽस्मिन्महायुद्धकाले पत्रप्राप्त्यभावा-
द्विशेषलेखनादिदानीं विरम्यते । यूरोपीयगणिते 'लिमिट' शब्देनाव्यक्तस्य यन्मानं
कल्प्यते तत्रास्मिन्ग्रन्थे एकधैव तन्मानं शून्यं मत्वा गणितं प्रदर्शितम् । एवं
स्वरूपाणां लेखनेऽपि किञ्चिद्वैशिष्ट्यमस्ति । सर्वमिदं कालान्तरे चलराशिकलन-
परिशिष्टरूपेण प्रकाशितं भविष्यतीत्याशासे ।

अत्र विशेषत इदं कथनीयमस्ति यद्गणितविद्याप्रचाराय विद्यारसिकैः
काशिकराजकीयसंस्कृतविद्यालयाध्यक्षैः श्रीमद्भिर्डाक्टरमङ्गलदेवशास्त्रिवर्यैर्यया
शुभेच्छयैतादृशदुर्लभपुस्तकप्रकाशनाय यतितं तत्रास्माकं दौर्भाग्यात्प्रायो मूलच्छेद
एव दृश्यते गणितविषयकपरोक्षाया अपाकरणात् । तथापि दृढमाशासे यद्विश्वेश्वर-
कृपया तादृशो गणितप्रकर्षकालः समागमिष्यति यदा पुनरपि बह्वादरेण ग्रन्थरत्नमिदं
काशिकराजकीयसंस्कृतपरीक्षासु पाठ्यरूपेण स्वीकरिष्यते इति निगदति

काश्यां सरस्वतीभवने
१-३-४३ }

बलदेवमिश्रो
ज्यौतिषाचार्यः

पञ्चमाध्याय ५ ।

प्रक्रम	पृष्ठ
५८। द्विगुणचल का वर्णन	१२१
५९। $\frac{\text{ताँस}}{\text{तायतार}}$ इससे स का पता लगाना	१२१
६०। स के मान में दो विधि पर से विशेष	... १२१—१२२
६१। $\int \int f(y, r)$ ताय तार का अर्थ	.. १२२—१२३
६२। ६० प्रक्रम से सान्त द्विगुणचलानयन	१२३—१२४
६३। ६२ वें प्रक्रम के सिद्धान्त को २ प्रक्रम से सिद्ध करना	१२४—१२६
६४। $\int f(y, r)$ तार में विशेष	... १२६
६५। यदि $f(y, r) = f_a(y) \times f_r(r)$ तो इसके सान्तद्विगुणचल में विशेष	. १२६—१२७
६६। त्रिगुणचलानयन	१२७
६७। क्रिया समेत कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	१२७—१३२
६८। चलराशिकलन में कुछ विशेष	... १३२—१३३

षष्ठाध्याय ६ ।

६९। वक्रक्षेत्रों के चापानयन में विधि	... १३४
७०। परवलय (Parabola) का चाप जानना	... १३४—१३५
७१। चक्रालद (Cycloid) का चाप जानना	... १३५
७२। $r = \frac{m}{n}$ इस वक्र का चापानयन	.. १३५—१३६
७३। कातन्वली (Catenary) का चापानयन	.. १३६
७४। $y^{\frac{2}{3}} + r^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ इस वक्र का चापानयन	१३६
७५। ६९ वे प्रक्रम से विशेष	.. १३७—१३८
७६। लाघुरिकथिक वक्र (Logarithmic Curve) का चापानयन	... १३८
७७। दीर्घवृत्त का चापानयन	.. १३९—१४०
७८। अतिपरवलय का चापानयन	... १४०—१४१

७९।	आर्किमिडिज के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes)	१४१—१४२
८०।	श्रु = अ(१ + कोज्याप) इस वक्र का चापानयन	१४२
८१।	लाघुरिकथिक सर्पिल का चापानयन	१४२
८२।	अपचक्रालद (Epicycloid) का चापानयन	१४२—१४३
८३।	अतिचक्रालद (Hypocycloid) का चापानयन	१४३—१४४
८४।	स्पर्शरेखा पर मूलबिन्दु से पड़े लम्ब और य अक्ष से उत्पन्न कोण इन दोनों के वश से वक्र का चापानयन	१४४—१४८
८५।	८४ प्रक्रम की व्याप्ति के लिये दो उदाहरण	१४८—१५१
८६।	अतिपरवलय के चापानयन में ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc)	१५१—१५३
८७।	डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Digraives)	१५३—१५४
८८।	एकनाभिक अतिपरवलय और दीर्घवृत्त में विशेष	१५४—१५५
८९।	डिकार्टेस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन	१५५—१५६
९०।	वक्र के अनवलृत से चलज्ञान के बिना चापानयन	१५६—१५७
९१।	भुज, कोटि के रूप में यदि चाप विदित हो तो अनवलृत का समीकरण	१५७—१५९
९२।	अक्षीय भुजयुग्म के रूप में जो चाप है उससे अनवलृत का अक्षीय भुजयुग्म सम्बन्धी समीकरण का ज्ञान ..	१५९—१६०
९३।	वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतबिन्दु की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण जो हो उसके फलरूप में चापानयन	१६०—१६१
९४।	चापस्पर्शिकसमीकरण से वक्र का समीकरण जानना ...	१६२—१६५
९५।	चापस्पर्शिकसमीकरण से वक्रजातीयवृत्त का व्यासार्द्ध जानना	१६५
९६।	चापस्पर्शिकसमीकरण से अवलृत का समीकरण जानना	१६६—१६७
९७।	चाप पर से वक्र के भुज, कोटि का ज्ञान	१६७—१६८
९८।	आकाशीय वक्र का चापानयन	१६८—१७०
९९।	$\frac{\text{ताना}}{\text{तज्ज}}$ के मान का ज्ञानयन	१७०—१७१

प्रक्रम		पृष्ठ
१००।	आकाशीय वक्र में अक्षीय भुजयुग्म से विशेष	... १७१
१०१।	अन्तरिक्षीय वक्र की स्पर्श रेखा पर मूलविन्दु से पड़े लम्ब से चापानयन, और अभ्यास के लिये प्रश्न	१७१—१७५

सप्तमाध्याय ७।

१०२।	वक्र के फलानयन की विधि	१७६
१०३।	वृत्त का फलानयन	१७६—१७७
१०४।	दीर्घवृत्त का फलानयन	१७७
१०५।	परवलय का फलानयन	.. १७७
१०६।	$r = ay^n$ इस वक्र का फलानयन	. १७७
१०७।	अतिपरवलय का फलानयन	१७७—१७८
१०८।	चक्रालद का फलानयन	१७८—१७९
१०९।	कातन्वली का फलानयन	.. १७९
११०।	$\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{2m+1}} + \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{2}{2n+1}} = 1$ इस वक्र का फलानयन	१७९—१८०
१११।	फलानयन में सीमा के विचार में विशेष	. १८०—१८२
११२।	सम्पूर्ण वक्र के फलानयन में विशेष	१८२—१८३
११३।	दो कोटियों के भीतर फलानयन में विशेष	१८३
११४।	दो वक्रों के चाप और उनके कोट्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन	. १८४—१८५
११५।	दो वक्रों से सीमित क्षेत्र का फलानयन	.. १८५
११६।	११४-११५ प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये एक उदाहरण	१८५—१८८
११७।	अक्षीय भुजयुग्म से वक्र का फलानयन	... १८८—१८९
११८।	समास्रिक सर्पिल (Equiangular Spiral) का फलानयन	. १८९
११९।	अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन	१९०
१२०।	$\theta = a(\psi + \text{ज्या}\psi)$ इस वक्र का फलानयन	. १९०
१२१।	$\theta = 2a \frac{\text{कोज्या}\psi - \sqrt{(\text{कोज्या}2\psi)}}{\text{ज्या}\psi}$ इस वक्र का फलानयन	१९०—१९१
१२२।	$\theta = a\psi^n$ इस वक्र का फलानयन	. १९१—१९३

प्रक्रम	पृष्ठ
१२३। इलामूलक का फलानयन	१९३
१२४। दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन .	१९३—१९५
१२५। १२४ वे प्रक्रम में विशेष .	१९५
१२६। १२४ - १२५ प्रक्रमों के लिये उदाहरण ..	१९६—१९८
१२७। १२६ वे प्रक्रम में विशेष	१९८—१९९
१२८। आर्किमिडिज़ के सर्पिल के फलानयन में १२४ वे प्रक्रम की युक्ति	१९९—२००
१२९। अक्षीय समीकरण से अपचक्रालद् का फलानयन	२००—२०१
१३०। वक्रों के साजात्य अवयवों के फलों का संबन्ध	२०१—२०३
१३१। वक्रचाप और अवलूतचाप से बने क्षेत्र का फलानयन	२०३
१३२। कातन्वली उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इनसे बने क्षेत्र का फलानयन	२०३—२०४
१३३। पाददल का लक्षण	२०४
१३४। मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओं पर दो लम्ब डाले जायं तो पाददल का चाप और इन दोनों लम्बों से बने क्षेत्र का फलानयन	२०४—२०५
१३५। अय ^२ + कय ^२ + गर ^२ + घय + चर + फ=० इस पर से पता लगाना कि कौन वक्र है	२०५—२०८
१३६। १३४ प्रक्रम में विशेष	२०८
१३७। एक निर्दिष्टरेखा के दोनों अग्र दो वक्र के परिधि पर घूमने से निर्दिष्टरेखास्थ निर्दिष्ट विन्दु के घूमने से जो वक्र होगा उसका फलानयन	२०९—२१०
१३८। स्वल्यान्तर से वक्रों का फलानयन	२१०—२१४
१३९। फलानयन में प्रकारान्तर ..	२१४
१४०। फलसाधन के लिये यन्त्र (Planimeters) और अभ्यास के लिये प्रश्न	२१४—२२३

अष्टमाध्याय ८ ।

१४१। पृष्ठफलानयन विधि .	२२४—२२५
१४२। गुरु का पृष्ठफल ..	२२५

प्रक्रम	पृष्ठ
१४३। शङ्कु के पृष्ठफल का प्रकारान्तर	२२५
१४४। गोल का पृष्ठफलानयन	... २२६—२२७
१४५। वृहज्जास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका पृष्ठफलानयन	. २२७—२२८
१४६। परवलय का चाप य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफलानयन	.. २२८
१४७। कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन	.. २२८—२३०
१४८। पृष्ठफल में विशेष	. २३०—२३१
१४९। $\theta = \alpha (1 + \text{कोज्या}\alpha)$ इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो वक्र हो उसका पृष्ठफलानयन	... २३१
१५०। स्पर्शधरातल का साधन	.. २३१—२३४
१५१। परिणतक्षेत्र का फलानयन	.. २३४—२३५
१५२। स्पर्शधरातल से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल	... २३५—२३८
१५३। घनक्षेत्र के पृष्ठ में विशेष	२३८—२३९
१५४। स्पर्शधरातल से पृष्ठफलानयन में विशेष	२३९
१५५। पृष्ठ के अक्षीय समीकरण से पृष्ठफलानयन	२४०
१५६। घनफलानयनविधि	२४०—२४१
१५७। समसूची का घनफलानयन	. २४१
१५८। गोल का घनफलानयन	२४१
१५९। परवलय के य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन	. २४१—२४२
१६०। य अक्ष के चारो ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन	.. २४२—२४३
१६१। र अक्ष के चारो ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन	... २४३
१६२। परवलय के र अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन	. २४३
१६३। दो घनक्षेत्र और दो धरातलो के भीतर घनक्षेत्र खण्ड का घनफलानयन	. २४३—२४४

प्रक्रम	पृष्ठ
१६३। १६३वे प्रक्रम में विशेष	.. २४४—२४५
१६४। घनफल में विशेष	२४५
१६५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का पृष्ठफलानयन	. २४५
१६६। किसी सूचीक्षेत्र का घनफलानयन	२४५—२४६
१६७। शङ्कु, अतिपरवलयिक और दो लम्बरूपी धरातल के भीतर घनक्षेत्र का घनफलानयन	... २४६
१६८। १६७ वें प्रक्रम का विशेष	२४६—२४७
१६९। स्वप्नान्तर से घनफलानयन	... २४७
१७०। द्विगुणचलानयन से घनफल	२४७—२४८
१७१। विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	. २४८
१७२। व्याप्ति दिखाने के लिये प्रकार	. २४८—२४९
१७३। घनफलानयन में विशेष	... २४९
१७४। घनफलानयन में विशेष	२४९—२५०
१७५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का घनफलानयन	... २५०
१७६। एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	.. २५०—२५१
१७७। दूसरे एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	२५१
१७८। प्रकारान्तर से घनफलानयन	.. २५१—२५२
१७९। जिस पृष्ठ का ल = अ इ - $\frac{शु^2}{ग}$ यह समीकरण है उस के और यर अक्ष के भीतर के घनक्षेत्र का पृष्ठफलानयन	२५२
१८०। घनफलसाधन में विशेष	... २५२—२५३
१८१। नलक के खण्ड का घनफलानयन	... २५३
१८२। १७८ वे प्रक्रम में विशेष	.. २५३—२५४
१८३। एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	... २५४
१८४। $शु = अ (१ + कोज्याप)$ इस वक्र के स्थिर रेखा के चारों ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफलानयन	२५४—२५५
१८५। दो विशिष्टघनक्षेत्रों के घनफल में सवन्ध, और अभ्यास के लिये प्रश्न	... २५५—२६३

प्रक्रम

पृष्ठ

नवमाध्याय ९ ।

१८६।	सान्तचल का वर्णन	...	२६४
१८७।	\int_0^{π} ज्यामय ज्यानय ताय का मान	...	२६४—२६५
१८८।	\int_0^{π} ज्यामय को ज्यानय ताय का मान	..	२६५—२६७
१८९।	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{फ(य)}{फा(य)}$ ताय का मान	.	२६७—२६९
१९०।	१८९ वें प्रक्रम का एक चमत्कृत उदाहरण	..	२६९—२७०
१९१।	$\int_0^{\infty} \frac{य^{२म}}{१-य^{२न}}$ ताय का मान	.	२७०—२७१
१९२।	१९०—१९१ प्रक्रमों में विशेष	..	२७१—२७२
१९३।	सान्तचलानयन की विधि से तात्कालिकसंबन्ध ज्ञान	...	२७२—२७३
१९४।	$स = \int_a^k फ(य,ग)$ ताय यहां ग को स्वतन्त्र मान		
	$\frac{तास}{ताग}$ का मान जानना		२७३—२७५
१९५।	१९४ वें प्रक्रम में विशेष		२७५—२७६
१९६।	$\frac{तास}{ताग}$ का मान क्षेत्र की रीति से	..	२७६—२७७
१९७।	कुछ उदाहरण	...	२७७—२७९
१९८।	फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Frullant)		२७९—२८१
१९९।	यूलर के चल (Eulerian Integrals)	.	२८१—२८२
२००।	यूलर के पहले चल में विशेष	...	२८२
२०१।	यूलर के दूसरे चल में विशेष	...	२८१—२८३
२०२।	यूलर के दूसरे चल में दूसरा विशेष	.	२८३
२०३।	यूलर के दोनों चलों में संबन्ध	.	२८३—२८४
२०४।	$\frac{\{ गा (न) \}^२}{\{ गा (न - म) \} \{ गा (न + म) \}}$ का मान	...	२८४—२८५

प्रक्रम	पृष्ठ
२०५। गा (१—म) गा (म) का मान	२८५
२०६। गा(१ - $\frac{१}{n}$) गा (१ - $\frac{१}{n}$) • गा ($\frac{१}{n}$) का मान .	२८५—२८६
२०७। गास (Gauss) का सिद्धान्त .	२८६
२०८। २०७ प्रक्रम में विशेष .	२८७—२८९
२०९। २०८ प्रक्रम में विशेष	२८९—२९०
२१०। ला (१ + य) का मान थ्रेडी में . ..	२९०
२११। गा (१ + य) का न्यूनतम मान	२९०—२९१
२१२। $\int_0^{\infty} z^{-अ^२} z^२$ ताय का मान गाढफल में .	२९१—२९२
२१३। $\iiint \cdot य^२-१^२ म-१^२ ल^२-१^२$ तालतारताय का मान गाढफल के रूप में	२९२
२१४। $\iiint \cdot अ^२-१^२ क^२-१^२ ख^२-१^२$ ताख, ताक, ताअ, का मान गाढफल के रूप में	२९२—२९३
२१५। एक अनेक गुणचल को एक चल में ले आना .	२९३—२९४
२१६। एक त्रिगुणचल को एक चल में ले आना	२९४
२१७। एक द्विगुणचल को एक चल में ले आना	२९४—२९५
२१८। $\int_0^{\infty} z^{-अ^२} z^२$ कोज्या२रय ताय का मान ...	२९५—२९६
२१९। $\int_0^{\infty} z^{-जय} \frac{ज्या रय}{य}$ ताय का मान	२९६—२९७
२२०। $\int_0^{\infty} z^{-(य^२ + अ)} \frac{अ}{य^२}$ ताय का मान	२९७—२९८
२२१। $\int_0^१ य^म(लाय)^न$ ताय इसका मान ...	२९८
२२२। $\int_0^१ \frac{लाय ताय}{१-य}$ का मान	२९८
२२३। मान्तचलानयन के लिये एक सिद्धान्त .	२९९

प्रक्रम		पृष्ठ
२२४।	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ay} - e^{-ky}}{y} \text{ कोज्या अ, य ताय का मान}$	२९९
२२५।	$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ay} - e^{-ky}}{y} \text{ कोज्या अ, य ताय का मान}$	२९९—३००
२२६।	$\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या अ, य}}{y} \text{ ताय, } \int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्या अ, य}}{1+y^2} \text{ ताय}$ के मान	३००—३०१
२२७।	$\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या गय}}{y(1+y^2)} \text{ ताय का मान}$	३०१
२२८।	कोज्या (∞), ज्या (∞) के मान	३०२—३०३
२२९।	सान्तचलानयन में विशेष	३०३—३०४
२३०।	२२९ वें प्रक्रम में विशेष	३०४
२३१।	२२९ वें प्रक्रम में दूसरा विशेष	३०४—३०५
२३२।	२३१ वें प्रक्रम में विशेष	३०५
२३३।	$\frac{1-a^2}{1-2\text{अकोज्याय}+a^2}$ का मान श्रेढी मे	३०५
२३४।	$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \frac{\text{ताय}}{1-2\text{अकोज्यागय}+a^2}$ का मान	३०५—३०६
२३५।	$\int_0^{\infty} \text{ला } (1-2\text{अकोज्या गय}+a^2) \frac{\text{ताय}}{1+y^2}$ का मान	३०६
२३६।	$\int_0^{\infty} \frac{y \text{ ज्या गय ताय}}{1-2\text{अकोज्यागय}+y^2}$ का मान	३०६
२३७।	टेलर के सिद्धान्त से सान्तचलानयन	३०६—३०७
२३८।	असम्भाव्यसंख्या से सान्तचलानयन	३०७—३०८
२३९।	दैर्घवृत्तीय चल से विशेष	३०८—३१०
२४०।	२३९ वे प्रक्रम मे विशेष	३१०
२४१।	दैर्घवृत्तीय चल से और विशेष	३१०—३१२
२४२।	प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीय चल मे संबन्ध	३१२—३१४
२४३।	प्रथम और तृतीय दैर्घवृत्तीयचल में संबन्ध	३१४

प्रक्रम	पृष्ठ
२४४। फ(य) का मध्यम मान सान्तचल से	. ३१४—३१६
२४५। लागा (१ + य) का मान जानने के लिये सारणी	३१६—३२२
२४६। यूलर के दूसरे चल में विशेष और अभ्यास के लिये प्रश्न	३२२—३३२

दशमाध्याय १० ।

२४७। क्रम को बदल कर चलानयन	. ३३३
२४८। २४७ प्रक्रम का एक और उदाहरण	३३३—३३४
२४९। $\int \int$ शाताग ताग को व और श के रूप में बदलना	३३४—३३७
२५०। कुछ उदाहरण	३३७—३४१
२५१। द्विगुणचल का परिवर्तन क्षेत्रीति से	. ३४१—३४३
२५२। त्रिगुणचल को नये तीन चल के रूप में बदलना	३४३—३४५
२५३। ऊपर के प्रक्रमों के कुछ उदाहरण	. ३४५—३४६
२५४। चलराशिकलन से त्रिकोणमितिफलो को श्रेढी में ले आना	३४६—३४८
२५५। २३३ वे प्रक्रम में विशेष	.. ३४८—३५०
२५६। २५५ वे प्रक्रम में विशेष	३५०—३५१
२५७। ऊपर के प्रक्रमों के कुछ उदाहरण	३५१—३५५
२५८। २५६ वे प्रक्रम में विशेष	.. ३५५
२५९। २५६ वे प्रक्रम में और विशेष	. ३५६
२६०। ज्या और कोटिज्या के रूप में एक श्रेढी बनाना जिस का योग ग के तुल्य हो	. ३५६—३५७
२६१। कोटिज्या के रूप में दूसरी श्रेढी जिसका योग निर्दिष्ट-संख्या के तुल्य हो । और अभ्यास के लिये प्रश्न	३५७—३५८
२६२। चलनसमीकरण के लक्षण	३५८
२६३। $मा + \frac{तार}{ताय} = ०$ इसमें य, र का मान जानना	. ३५८—३६०
२६४। $\frac{तार}{ताय} + पाय = वा$ में र का मान जानना	.. ३६०—३६१

प्रक्रम		पृष्ठ
२६५।	२६४ वे प्रक्रम में विशेष	२६१
२६६।	चलनसमीकरण में विशेष	२६१—२६३
२६७।	चलनसमीकरण संबन्धि कुछ उदाहरण	२६३—२६८
२६८।	महत्तम और न्यूनतम में विशेष और वैशेषिककलन का लक्षण	२६८—२६९
२६९।	तावैर = वैतार को सिद्ध करना	... २६९
२७०।	\int^n इस का अर्थ	२७०
२७१।	२६८-२७० प्रक्रमों में विशेष	.. २७०
२७२।	वै \int स वा \int वैस का मान जानना	२७०—२७२
२७३।	\int शाताय का वैशेषिक जानना	२७२—२७४
२७४।	स = फ(य, र, ल) इस में वैशा का मान जानना	२७४
२७५।	वैशेषिक पर से महत्तम और न्यूनतम मान	... २७४—२८१
२७६।	साम्बन्धिक महत्तम और न्यूनतम, उनके कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	.. २८१—२८९

इति विशेषवर्णन ।



विषयसूचनिका (Contents)

अध्याय	पृष्ठ
१ चलराशिकलन का अभिप्राय और साधारण चलानयन	१—३४
२ अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन (Rational Fractions)	३५—६५
३ लघूकरणपरम्परा (Formulae of Reduction)	६६—८५
४ प्रकीर्णक (Miscellaneous Remarks)	८६—१२०
५ द्विगुणचल (Double Integration)	१२१—१३३
६ वक्रक्षेत्रों का चापानयन (Lengths of Curves)	१३४—१७५
७ वक्र का फलानयन (Areas of Plane Curves)	१७६—२२३
८ वक्र के पृष्ठ और घनफलानयन (Areas of Surfaces and volumes of solids)	२२४—२६३
९ सान्तचलानयन (Definite Integrals)	२६४—३३२
१० क्रमपरिवर्तन (Change of the variables in a multiple Integral)	३३३
११ वैशेषिकलन (The calculus of variations)	४१९—४४



पञ्चमाध्याय ।

दो वा अनेक चलराशियों के वश से चलानयन ।

वा द्विगुण चल ।

५८। पिछले अध्यायो मे उन चलानयनो का वर्णन है जिन मे एक ही चल है अर्थात् जब तात्कालिक सम्बन्ध फ(य) इस चाल का है तब इस के चलानयन का वर्णन हो चुका । परन्तु चलनकलन से जहाँ दो चलराशि वा अनेक चलराशि के फल हों वहाँ सिद्ध है कि

$$स = फ(य,र) \text{ तो } \frac{\text{ताँस}}{\text{तायतार}} = फा(य,र) \text{ वा } स = फ(य,र,ल) \text{ तो}$$

$$\frac{\text{ताँस}}{\text{तायतारताल}} = फा(य,र,ल) \text{ इस लिये अब इस अध्याय का मुख्य उद्देश्य}$$

यह है कि फा(य,र) वा फा(य,र,ल) परसे स के मान को लेआनेका नियम जानना ।

५९। चलनकलन के (६)वे अध्याय से प्रसिद्ध है कि

$$\frac{\text{ताँस}}{\text{ताय तार}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{तास}}{\text{तार}} \right] = \frac{\text{तास}_१}{\text{ताय}} = फ(य,र)$$

इस लिये $स_१ = \int फ(य,र)ताय$ यह ठीक पिछले अध्यायों से सिद्ध हो जायगा यदि फल मे र को स्थिर मान लो । मानो कि

$$\int फ(य,र) ताय = फा(य,र) \text{ इस लिये } \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = फा(य,र)$$

स = \int फा(य,र) तार यह भी पिछले अध्यायो से प्रसिद्ध हो जायगा यदि इस मे य को स्थिर मानो ।

यह भी विचारो तो जिस तरह से $\frac{\text{ताँस}}{\text{तायतार}}$ इस का मान चलनकलन से आता है ठीक उस के विपरीत क्रिया से यहाँ स आता है ।

$$६०। चलनकलन के (६)वे अध्याय से सिद्ध है कि $\frac{\text{ताँस}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ताँस}}{\text{तारताय}}$$$

इस लिये

स = \int फा(य,र)तार = $\int \{ \int$ फ(य,र)ताय $\}$ तारवा, स = $\int \{$ फ(य,र)तार $\}$ ताय
 इस तरह से दो रीति स के जानने के लिये उत्पन्न होती है कि फ(य,र)
 मे पहले र को स्थिर मान ताय के वश से चल ज्ञान करो फिर इस चल
 मे य को स्थिर मान तार के वश से नया चल निकालो तो स का मान
 होगा । वा पहले य को स्थिर मान तार के वश से चल निकालो फिर
 इस मे र को स्थिर मान ताय के वश से चलज्ञान करो तो यही स का
 मान होगा ।

इस प्रकार से स का दो मान आया । कल्पना करोकि एक मान श, दूसार श_२
 है तो विपरीत क्रिया से

$$\frac{\text{ता}^{\text{श}_1}}{\text{ताय तार}} = \text{फ (य,र)} = \frac{\text{ता}^{\text{श}_2}}{\text{तार ताय}} \text{ अन्तर करने से}$$

$$0 = \frac{\text{ता}^{\text{श}_1}}{\text{ताय तार}} - \frac{\text{ता}^{\text{श}_2}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{ताश}_1}{\text{तार}} - \frac{\text{ताश}_2}{\text{तार}} \right] = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{ताश}_1 - \text{ताश}_2}{\text{तार}} \right]$$

यदि श_१—श_२ = श_३ इस लिये $\frac{\text{ताश}_3}{\text{तार}}$ यह य का कोई फल नहीं हो सकता

सेवाय स्थिराङ्क के च्योकि $\frac{\text{ता(स्थि)}}{\text{ताय}}$ यही शून्य के समान होता है इस

लिये $\frac{\text{ताश}_3}{\text{तार}} = \text{फि (र)} \therefore \text{श}_3 = \int \text{फि (र) तार} + \text{स्थि}$ इस मे भी स्थिराङ्क य का

कोई फल होगा च्योकि फि (र) मे य को स्थिर माना है । मानो कि स्थि = फी(य)

इस लिये श_३ = श_१—श_२ = $\int \text{फि (र) तार} + \text{फी (य)} = \text{फा(र)} + \text{फी (य)}$

$$\text{यदि } \int \text{फि (र) तार} = \text{फा (र)}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि दोनो विधियों से जो दो प्रकार के स उत्पन्न
 होते हैं उनका अन्तर दो फलो के योग तुल्य है जिन मे एक केवल य का और
 दूसरा केवल र का फल है ।

६१ । पिछले प्रक्रम मे जो स = $\int \{ \int$ फ(य,र)ताय $\}$ तार यह है इस मे
 यदि $\{ \}$ इस को उड़ा दे तो $\int \int$ फ(य,र)तायतार ऐसा होगा । अब
 यदि $\int \int$ फ(य,र)तायतार इस का अर्थ ऐसा समझे कि पहले ताय के वश
 से चल निकाल फिर तार के वश से निकाला है तो $\{ \}$ इस के देने का कुछ
 आवश्यक नहीं । इसी प्रकार $\int \int$ फ(य,र)तारताय इस से यह समझो कि

पहले तार के वश से फिर ताय के वश से चल निकाला गया है। इसी तरह $\int \int \int f(y, r, l)$ तायतारताल इस से समझना चाहिये कि पहले ताय, तब तार, और फिर ताल के वश से चल का मान अपेक्षित है अर्थात् फल के पास जो ता रहे उस के वश से पहले फिर ज्यों ज्यों दूर में ता है क्रम से उन के वश से चल निकालना है।

मैंने लाघव के लिये बार बार अनेक कोष्ठ न लिखकर यह संकेत मान लिया है इस में कुछ विशेष नहीं चाहे उलटेही रीति से तु.प उसी अर्थ को प्रकाश कर सकते हो अर्थात् जो ता सब से दूर हो उसी के वश से पहले फिर यथासन्नो के वश से।

जैसे यदि $f(y, r) = अय^२r + कर^३y$ तो

$$\begin{aligned} \int \int f(y, r) \text{ ताय तार} &= \int \int (अय^२r + कर^३y) \text{ तायतार} \\ &= \int \left[\frac{अय^२r}{३} + \frac{कर^३y^३}{२} \right] \text{ तार} \\ &= \frac{अय^३r^२}{६} + \frac{कर^३y^३}{६} = \frac{य^२r^२}{६} (अय + कर) \text{ यह पहला स का मान हुआ।} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \int \int f(y, r) \text{ तार ताय} &= \int \int (अय^२r + कर^३y) \text{ तारताय} \\ &= \int \left[\frac{अय^२r^२}{२} + \frac{कर^३y}{३} \right] \text{ ताय} \\ &= \frac{अय^३r^२}{६} + \frac{कर^३y^३}{६} = \frac{य^२r^२}{६} (अय + कर) \text{ यह दूसरा स हुआ।} \end{aligned}$$

यहाँ पर स्थिराङ्कों को छोड़ दिया है।

६२। जब साठवें प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\int \int f(y, r) \text{ तारताय} - \int \int f(y, r) \text{ तायतार} = \text{फि}(y) + \text{फी}(r)$$

इस लिये $\int \int f(y, r) \text{ तारताय} = \int \int f(y, r) \text{ तायतार} + \text{फि}(y) + \text{फी}(r)$ (१)

यहाँ यदि $\int f(y, r) \text{ ताय} = \text{फा}_१(y, r)$ और $\int f(y, r) \text{ तार} = \text{फा}_२(y, r)$

तो $\int \int f(y, r) \text{ ताय तार} = \int \text{फा}_१(y, r) \text{ तार} = \text{फा}_३(y, r)$

और $\int \int f(y, r) \text{ तारताय} = \int \text{फा}_२(y, r) \text{ ताय} = \text{फा}_३(y, r)$

इस लिये $\int_{ग}^घ} \int_{अ}^क} f(y, r) \text{ तारताय} = \int_{ग}^घ} \{ \text{फा}_२(y, क) - \text{फा}_२(y, अ) \} \text{ ताय}$

वा $\int_{ग}^घ} \int_{अ}^क} f(y, r) \text{ तारताय} = \int_{ग}^घ} \text{फा}_२(y, क) \text{ ताय} - \int_{ग}^घ} \text{फा}_२(y, अ) \text{ ताय}$

$$= \text{फा}_३(घ, क) - \text{फा}_३(ग, क) - \text{फा}_३(घ, अ) + \text{फा}_३(ग, अ), \dots \dots (२)$$

$$\begin{aligned}
 \text{इसी तरह } \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ(य,र)} \text{ तायतार} &= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \{ \text{फा(घ,र)} - \text{फा(ग,र)} \} \text{ तार} \\
 &= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फा(घ,र)} \text{ तार} - \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फा(ग,र)} \text{ तार} \\
 &= \text{फा}_2(\text{घ,क}) - \text{फा}_2(\text{घ,अ}) - \text{फा}_2(\text{ग,क}) + \text{फा}_2(\text{ग,अ}) \quad (३)
 \end{aligned}$$

परंतु (१) से

$$\text{फा}_3(\text{य,र}) = \text{फा}_2(\text{य,र}) + \text{फि(य)} + \text{फी(र)}$$

$$\text{इस लिये, फा}_3(\text{घ,क}) = \text{फा}_2(\text{घ,क}) + \text{फि(घ)} + \text{फी(क)}$$

$$\text{फा}_3(\text{ग,क}) = \text{फा}_2(\text{ग,क}) + \text{फि(ग)} + \text{फी(क)}$$

$$\text{फा}_3(\text{घ,अ}) = \text{फा}_2(\text{घ,अ}) + \text{फि(घ)} + \text{फी(अ)}$$

$$\text{फा}_3(\text{ग,अ}) = \text{फा}_2(\text{ग,अ}) + \text{फि(ग)} + \text{फी(अ)}$$

इन का उत्थापन (२) में देने से

$$\begin{aligned}
 \{ \text{फा}_3(\text{घ,क}) + \text{फा}_3(\text{ग,अ}) \} - \{ \text{फा}_3(\text{ग,क}) + \text{फा}_3(\text{घ,अ}) \} \\
 = \{ \text{फा}_2(\text{घ,क}) + \text{फा}_2(\text{ग,अ}) \} - \{ \text{फा}_2(\text{घ,अ}) + \text{फा}_2(\text{ग,क}) \}
 \end{aligned}$$

अर्थात् (२) और (३) तुल्य हुए । इस लिये इस पर से

$$\int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य,र)} \text{ तार ताय} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ(य,र)} \text{ तायतार}$$

यह सिद्ध हुआ ।

६३ । ऊपर के प्रक्रम से जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ उसे (२) प्रक्रम के ऐसा श्रेढी द्वारा भी प्रकाश कर सकते हैं ।

मानो फ(य,र) में य के मान, अ से लेकर क तक बीच में

$$\text{अ, य}_1, \text{य}_2, \dots, \text{य}_{\text{न}-1}, \text{क हैं ।}$$

$$\text{जहाँ य}_1 - \text{अ} = \text{च}_1, \text{य}_2 - \text{य}_1 = \text{च}_2, \dots, \text{क} - \text{य}_{\text{न}-1} = \text{च}_{\text{न}} ।$$

और र के मान ग से लेकर घ तक बीच में

$$\text{ग, र}_1, \text{र}_2, \dots, \text{र}_{\text{म}-1}, \text{घ हैं}$$

$$\text{जहाँ र}_1 - \text{ग} = \text{ज}_1, \text{र}_2 - \text{र}_1 = \text{ज}_2, \dots, \text{घ} - \text{र}_{\text{म}-1} = \text{ज}_{\text{म}} ।$$

अब यहाँ यह इच्छा है कि चतुर्जटफ(य_{त-1}, र_{द-1}) इस में द के स्थान में १, २, ३, ... म का और त के स्थान में १, २, ३, ... न का उत्थापन देने से जो श्रेढियाँ उत्पन्न होंगी उन का योग जाने । यहाँ न और म का मान अनन्त है ।

लाघव के लिये कल्पना करो कि श्रेढियों का कोई पद बनाने के लिये च ज फ(य,र) यह एक मुद्रा अर्थात् साँचा है जहाँ च, ज, और य, र के

स्थान में जिस पद का मान जानना होगा उस की संख्या रख देना होगा और $y_0 = अ$, $r_0 = ग$ ऐसा समझना । इस साँचे में च के स्थान में Δ य और ज के स्थान में Δ र को रख दें जैसा कि चलनकलन में प्रासिद्ध है तो साँचे का रूप Δ य Δ र फ(य, र) ऐसा होगा ।

जैसे किसी खेलौने के साँचे में मिट्टी, लोहा चाँदी, सोना इत्यादि के रखने से जितनी मूर्तियाँ बनेगी सब के मोल और रंग में तो फ़र्क परन्तु रूप एकसा होगा इसी तरह इस साँचे से जितने पद बनेगे सब के रंग और मोल अर्थात् मान तो भिन्न भिन्न परन्तु रूप एकसा होगा ।

साँचे में त के स्थान में १, द के स्थान में १, २, ३ . . . म का उत्थापन देने से

$$च_१ \{ ज_१ फ(अ, ग) + ज_२ फ(अ, र_१) + ज_३ फ(अ, र_२) + \dots + ज_m फ(अ, र_{m-१}) \} \dots (१) \text{ श्रेढी}$$

त के स्थान में २ का और द के स्थान में १, २, . . . म का उत्थापन देने से

$$च_२ \{ ज_१ फ(य_१, ग) + ज_२ फ(य_१, र_१) + ज_३ फ(य_१, र_२) + \dots + ज_m फ(य_१, र_{m-१}) \} \dots (२) \text{ श्रेढी}$$

$$\text{इसी तरह } च_३ \{ ज_१ फ(य_२, ग) + ज_२ फ(य_२, र_१) + ज_३ फ(य_२, र_२) + \dots + ज_m फ(य_२, र_{m-१}) \} \dots (३) \text{ श्रेढी}$$

$$\vdots$$

$$च_{t+१} \{ ज_१ फ(य_t, ग) + ज_२ फ(य_t, र_१) + ज_३ फ(य_t, र_२) + \dots + ज_m फ(य_t, र_{m-१}) \} \dots (t+१) \text{ श्रेढी}$$

$$\vdots$$

$$च_n \{ ज_१ फ(य_{n-१}, ग) + ज_२ फ(य_{n-१}, र_१) + ज_३ फ(य_{n-१}, र_२) + \dots + ज_m फ(य_{n-१}, र_{m-१}) \} \dots (n) \text{ श्रेढी}$$

इन में यदि $m = \infty$ तो $\{ \}$ कोष्ठकान्तर्गत $(t+१)$ श्रेढी का योग (२) प्रक्रम से $\int_{ग}^{\text{फ}} \text{फ}(य_t, र)$ तार यह होगा । कल्पना करो कि यह फा $(य_t)$ के समान है तो त के स्थान में ०, १, २, $n-१$ का उत्थापन देने से क्रम से ऊपर के श्रेढियों का मान ।

$\left. \begin{array}{l} च_१ फा(अ) \\ च_२ फा(य_१) \\ च_३ फा(य_२) \\ \vdots \\ च_n फा(य_{n-१}) \end{array} \right\}$ इन का योग अब (२) ही प्रक्रम से सिद्ध है कि यदि $n = \infty$ तो $\int_{अ}^{\text{फ}} \text{फा}(य) ताय$ यह अर्थात् $\int_{अ}^{\text{र}} \int_{ग}^{\text{फ}} \text{फ}(य, र)$ तारताय यह होगा ।
 इसी तरह यदि हर एक श्रेढियों का $\{ \}$ कोष्ठकान्तर्गत ऊर्ध्वाधर एक एक पदों का पहले योग करो तो

$\int_{\alpha}^{\beta} f(y, g) \text{ ताय} = f_{\alpha}(g), f_{\alpha}(r_1)$ इत्यादि होगा फिर सब पदों का योग अर्थात् श्रेढ़ियों का योग = $\int_{\alpha}^{\beta} f_{\alpha}(r) + \int_{\alpha}^{\beta} f_{\alpha}(r_1) + \int_{\alpha}^{\beta} f_{\alpha}(r_2) + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} f_{\alpha}(r_{m-1}) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\alpha}(r) \text{ तार} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(y, r) \text{ तायतार}$

परन्तु श्रेढ़ियों के तिर्यक् पदों का योग कर वा ऊर्ध्वाधर पदों का योग कर फिर उन को जोड़ने से श्रेढ़ियों का योग तो एक ही होगा इस लिये

$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(y, r) \text{ तारताय} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(y, r) \text{ तायतार}$ यह सिद्ध हुआ ।

६४। जब निश्चय है कि $\int f(y, r) \text{ तार}$ इस में y स्थिर मान है तो

$\int_{\alpha}^{\beta} f_2(y) f(y, r) \text{ तार}$ इस का भी मान जान सकते हैं फिर इस पर से $f_1(y)$

$\int_{\alpha}^{\beta} f_2(y) f(y, r) \text{ तायतार}$ इस का मान आजायगा ।

यहाँ भी यदि (६३)वें प्रक्रम से श्रेढ़ियों की परम्परा बनावोगे तो विशेष इतना ही होगा कि g, r_1, r_2 इत्यादि प्रत्येक श्रेढ़ियों में y के वश से भिन्न भिन्न होंगे जैसे $(t+1)$ श्रेढ़ी के $\{ \}$ अन्तर्गत

$\int_{\alpha}^{\beta} f(y_t, g) + \int_{\alpha}^{\beta} f(y_t, r_1) + \int_{\alpha}^{\beta} f(y_t, r_2) + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} f(y_t, r_{m-1})$
इन पदों में

$g = f_1(y_t), \int_{\alpha}^{\beta} = r_1 - f_1(y_t), \int_{\alpha}^{\beta} = r_2 - r_1, \dots, \int_{\alpha}^{\beta} = f_2(y_t) - r_{m-1}$

ऐसा मानना पड़ेगा फिर पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि इन पदों का योग

$\int_{\alpha}^{\beta} f_2(y_t) f(y_t, r) \text{ तार}$ यही होगा ।

कल्पना करो कि $\int_{\alpha}^{\beta} f_2(y_t) f(y_t, r) \text{ तार}$
 $f_2(y_t)$

यह $f_2(y_t)$ के समान है तो, t के स्थान में $0, 1, 2, \dots, n-1$ का उत्थापन देने से

$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f_2(y) f(y, r) \text{ तारताय}$ का भी मान जान जाओगे ।

६५। यदि $f(y, r) = f_1(y) \times f_2(r)$ तो तार के वश चलानयन से

$\int f_1(y) \times f_2(r) \text{ तार} = f_1(y) \int f_2(r) \text{ तार} = f_1(y) f_2(r) + f_1(y) \text{ स्थि जहाँ}$

\int फि(र)तार = फि_१(र) + स्थि इस लिये

$$\int_{ग}^घ फा(य) फि(र)तार = फा(य) \{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \}$$

$$\text{और } \int फा(य) \{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \} ताय = \{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \} \int फा(य)ताय \\ = \{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \} \{ फा_१(य) + स्थि_१ \}$$

यदि $\int फा(य)ताय = फा_१(य) + स्थि_१$

इस लिये

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ फा(य) \times फि(र)तारताय = \{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \} \{ फा_१(क) - फा_१(अ) \} \\ = \int_{ग}^घ फि(र)तार \times \int_{अ}^क फा(य)ताय$$

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि अ, क, ग, घ स्थिराङ्क हो अर्थात् य, वा र का कोई फल न हों तो

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ फा(य) \times फि(र)तारताय = \int_{अ}^क फा(य)ताय \times \int_{ग}^घ फि(र)तार \text{ ऐसा होगा ।}$$

६६। इसी तरह जहाँ तीन चलराशि के वश से

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ \int_{त}^थ फ(य, र, ल) तालतारताय \text{ ऐसा स्वरूप हो वहाँ यह समझना चाहिये}$$

कि पहले र, य को स्थिर मान ताल के वश से त, थ के भीतर सान्तचल निकाला गया फिर इस में य, ल को स्थिर मान, तार के वश से ग, घ के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया फिर इस का ताय के वश से अ, क के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया है । इसे त्रिगुणचल कहते हैं ।

६३प्रक्रम से फ(य, र, ल) Δ ल Δ र Δ य इस साँचे से जो श्रेढ़ियाँ बनेंगी उन का (२) प्रक्रम से यदि योग करो तो वह

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ \int_{त}^थ फ(य, र, ल) तालतारताय \text{ इसी के समान होगा ।}$$

विद्यार्थियों को चाहिये कि श्रेढ़ियों का रूप फौला कर उनके योग पर से परस्पर सब की तुलना कर अपना मन भरले ।

यहाँ पूर्व युक्ति से प्रसिद्ध है कि थ, और त य, र के फल, घ और ग केवल य के फल हो सकते हैं परन्तु क और अ सर्वदा स्थिराङ्क ही रहेंगे ।

६७। इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) $\int \int (य^३ + र + र^३) तायतार$ इसका क्या मान होगा ।

$$\text{यहाँ फ(य, र) = य}^3 + र + र^2$$

इस लिये \int फ(य, र) ताय = य $\left(\frac{य^2}{3} + र + र^2\right)$ र को स्थिर मानने से

$$\text{फिर } \int \int \text{फ(य, र) ताय तार} = \int \text{य} \left(\frac{य^2}{3} + र + र^2\right) \text{ तार} = \text{य} \left[\frac{य^3}{3} + \frac{र^2}{2} + \frac{र^3}{3}\right]$$

यको स्थिर मानने से

$$\text{इस लिये स} = \frac{य^3 र}{3} + \frac{र^2 य}{2} + \frac{र^3 य}{3}$$

यहाँ यदि $\int \int$ फ(य, र) तार ताय इसका मान जानना हो तो पहले

$$\int \text{फ(य, र) तार} = \int (य^3 + र + र^2) \text{ तार} = य^3 र + \frac{र^2}{2} + \frac{र^3}{3}, \text{ यको स्थिर मानने से फिर}$$

$\int \int$ फ(य, र) तार ताय

$$= \int \left[\left(य^3 र + \frac{र^2}{2} + \frac{र^3}{3} \right) \text{ ताय} = \frac{य^3 र^2}{3} + \frac{र^2 य}{2} + \frac{र^3 य}{3} \right] \text{ यह दूसरा स}$$

हुआ । दोनो स्थानों में स्थिराङ्क छोड़ दिया है । स्थिराङ्क लेने से पहले

$$\int \text{फ(य, र) ताय} = \int (य^3 + र + र^2) \text{ ताय} = \frac{य^3}{3} + र य + र^2 य + \text{स्थि}$$

$$\text{फिर } \int \int \text{फ(य, र) ताय तार} = \int \left(\frac{य^3}{3} + र य + र^2 य + \text{स्थि} \right) \text{ तार}$$

$$= \frac{य^3 र}{3} + \frac{र^2 य}{2} + \frac{र^3 य}{3} + \text{स्थि र} + \text{स्थि}_1 = \frac{य^3 र}{3} + \frac{र^2 य}{2} + \frac{र^3 य}{3} + \text{फी (र)}$$

यह स का मान हुआ ।

$$\text{फिर } \int \text{फ(य, र) तार} = \int (य^3 + र + र^2) \text{ तार} = य^3 र + \frac{र^2}{2} + \frac{र^3}{3} - \text{स्थि}_2$$

$$\text{और } \int \int \text{फ(य, र) तार ताय} = \int \left(य^3 र + \frac{र^2}{2} + \frac{र^3}{3} - \text{स्थि}_2 \right) \text{ ताय}$$

$$= \frac{य^3 र^2}{3} + \frac{र^2 य}{2} + \frac{र^3 य}{3} - \text{स्थि}_2 य - \text{स्थि}_1 = \frac{य^3 र}{3} + \frac{र^2 य}{2} + \frac{र^3 य}{3} - \text{फा (य)}$$

इस लिये दोनो स का अन्तर फी (र) + फा (य) यह हुआ ।

(२) $\int \int$ फ(य, र) तार ताय इस का क्या मान होगा ।

यदि फ(य, र) = ज्यायर

$$\text{यहाँ } \int \text{फ(य, र) तार} = \int \text{ज्यायर तार} = - \frac{\text{कोज्यायर}}{य} ।$$

$$\text{और } \int \int \text{फ}(य,र) \text{ तार ताय} = - \int \frac{\text{कोज्या}(य)ताय}{य}$$

$$= - \int \frac{\text{कोज्यायर तायर}}{यर} = - \int \frac{\text{कोज्यालताल}}{ल}, \text{ यदि } ल = यर,$$

परन्तु

$$\frac{\text{कोज्याल}}{ल} = \frac{१ - \frac{ल^२}{२} + \frac{ल^४}{४} - \frac{ल^६}{६} + \dots}{ल} = \frac{१}{ल} - \frac{ल}{२} + \frac{ल^३}{४} - \frac{ल^५}{६} + \dots$$

इस लिये

$$- \int \frac{\text{कोज्यालताल}}{ल} = - \int \frac{\text{कोज्यायरतायर}}{यर} = लाल + \frac{ल^२}{२} - \frac{ल^४}{४} + \frac{ल^६}{६} - \dots$$

$$= -लायर + \frac{य^२र^२}{२|२} - \frac{य^४र^४}{४|४} + \frac{य^६र^६}{६|६} - \dots, \text{ यही उत्तर हुआ ।}$$

(३) (२) उदाहरण में $\int_a^k \int_0^y \text{फ}(य,र) \text{ तारताय}$ का क्या मान होगा ।

(२) उदाहरण से $\int \text{फ}(य,र) \text{ तार} = - \frac{\text{कोज्याय}}{य}$

इस लिये $\int_0^y \text{फ}(य,र) \text{ तार} = - \frac{\text{कोज्याय}}{य} + \frac{१}{य}$

और $\frac{१}{य} - \frac{\text{कोज्याय}}{य} = - \frac{१}{य} + \frac{य}{२} - \frac{य^३}{४} + \dots + \frac{१}{य}$

$$= \frac{य}{२} - \frac{य^३}{४} + \frac{य^५}{६} - \frac{य^७}{८} + \dots$$

इस लिये $\int_a^k \int_0^y \text{फ}(य,र) \text{ तारताय} = \frac{य^२}{२|२} - \frac{य^४}{४|४} + \frac{य^६}{६|६} - \frac{य^८}{८|८} + \dots$

और $\int_a^k \int_0^y \text{फ}(य,र) \text{ तारताय} = \frac{क^२-अ^२}{२|२} - \frac{क^४-अ^४}{४|४} + \frac{क^६-अ^६}{६|६} - \frac{क^८-अ^८}{८|८} + \dots$

यही उत्तर हुआ ।

(४) $\int_0^अ \int_0^य \int_0^{य+र} इ^{य+र+ल} \text{ तालतारताय}$ इस का मान जानना चाहिये ।

यहाँ $\int इ^{य+र+ल} \text{ ताल} = इ^{य+र+ल} \text{, य, और र को स्थिर मानने से}$

इस लिये $\int_0^{य+र} इ^{य+र+ल} \text{ ताल} = इ^{२य+२र} - इ^{य+र}$ ।

$\int_0^अ \int_0^य \int_0^{य+र} इ^{य+र+ल} \text{ तालतार} = \int इ^{२य+२र} \text{ तार} - \int इ^{य+र} \text{ तार}$

$$= \frac{z^{2y+2r}}{2} - z^{y+r} \text{ इस लिये}$$

$$\int_0^y \int_0^{y+r-z} z^{y+r+z} \text{ तालतार} = \frac{z^{2y}}{2} - \frac{z^{2y}}{2} - z^{2y} + z^y = \frac{z^{2y}}{2} - z^{2y} + z^y$$

$$\text{और } \int_0^y \int_0^y \int_0^{y+r-z} z^{y+r+z} \text{ तालतारताय} = \frac{z^{2y}}{2} - \frac{2z^{2y}}{2} + z^y$$

इस लिये

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^y \int_0^{y+r-z} z^{y+r+z} \text{ तालतारताय} &= \frac{z^{2a}}{2} - \frac{z}{2} - z^{2a} + \frac{z}{2} + z^a - 1 \\ &= \frac{z^{2a}}{2} - z^{2a} + z^a - \frac{z}{2} \text{ यही उत्तर हुआ ।} \end{aligned}$$

(५) यदि $f(y, r) = (y^2 + y)(r^2 + r)$

तो $\int_a^k \int_g^b f(y, r) \text{ तारताय}$ इस का क्या मान होगा ।

$$\text{यहाँ } \int f(y, r) \text{ तार} = (y^2 + y) \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} \right]$$

$$\int_a^b f(y, r) \text{ तार} = (y^2 + y) \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{b^2 - a^2}{2} \right]$$

$$\text{फिर } \int_a^k \int_g^b f(y, r) \text{ तारताय} = \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right] \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{b^2 - a^2}{2} \right]$$

इस लिये $\int_a^k \int_g^b f(y, r) \text{ तारताय}$

$$= \left[\frac{k^3 - a^3}{3} + \frac{k^2 - a^2}{2} \right] \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{b^2 - a^2}{2} \right] \text{ यह}$$

$$\int_a^k (y^2 + y) \text{ ताय} \times \int_g^b (r^2 + r) \text{ तार} \text{ इस के तुल्य होता है ।}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

$$१। \frac{\int_a^b (x - ky) \text{ ताय}}{\sqrt{(a + y\sqrt{g - ky})} (km + y\sqrt{g - a})} \text{ इस का मान क्या होगा ।}$$

यहाँ $r = \frac{a}{y} + k$ य कल्पना करो तो चल का मान कोज्या⁻¹ $\frac{r}{\sqrt{(a+ky)^2}}$

२। $\int \frac{r(m^2-1) \text{ स्पयताय}}{1+m^2 \text{ स्पय}} dx$ इस का क्या मान होगा ।

उ० ला (कोज्या²य + म²ज्या²य)

३। सिद्ध करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{y^{n+1} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{y}\right)^{2n}}} = \frac{1}{n a^n} \text{ ला } \frac{y^n}{a^n + \sqrt{a^{2n} + y^{2n}}}$

४। सिद्ध करो कि $\int \frac{1-\text{स्पय}}{1+\text{स्पय}} \text{ताय} = \text{ला ज्या } \left(\frac{\pi}{2} + y\right) - y$

५। सिद्ध करो कि $\int \frac{y^3}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \text{ज्या}^{-1} \frac{y^3}{a^2} \text{ (मानो कि } r = y^3 \text{)}$

६। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{४अ²ताय}}{y^4 + a^2 y^2 + a^4} = \text{ला } \frac{y^2 + ay + a^2}{y^2 - ay + a^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ स्प}^{-1} \frac{y a \sqrt{3}}{a^2 - y^2}$$

७। सिद्ध करो कि यदि $p = \frac{\pi}{n}$ और $n = \infty$ तो

$$\{ \text{ज्यापज्या२पज्या३प} \cdot \dots \cdot \text{ज्याप} (n-1) \}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

८। सिद्ध करो कि यदि $p = \frac{\pi}{n}$ और $n = \text{अनन्त}$ तो

$$\{ \text{स्पपस्प२पस्प३प} \cdot \dots \cdot \text{स्पप} (n-1) \}^{\frac{1}{n}} = 1$$

९। सिद्ध करो कि यदि $p = \frac{\pi}{n}$ और $n = \infty$ तो

$$\begin{aligned} & \text{कोज्यापकोज्या२पकोज्या३प} \cdot \dots \cdot \text{कोज्याप} (n-1) \\ & = \text{ज्यापज्या२पज्या३प} \cdot \dots \cdot \text{ज्याप} (n-1) \end{aligned}$$

१०। सिद्ध करो कि यदि $f(y, r) = \text{यरकोज्यायर}$ तो यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें तो $f(y, r) - \int \int f(y, r) \text{तारताय} = \text{कोज्यायर} (यर + 1)$

११। सिद्ध करो कि यदि $\int_k^a f(y) \text{ताय} = 1$ और $f(y)$ सर्वदा धन हो तो

$$\left\{ \int_k^a f(y) \text{कोज्यागयताय} \right\}^2 + \left\{ \int_k^a f(y) \text{ज्यागयताय} \right\}^2 < 1$$

यहाँ (२) प्रक्रम और (४०) वे प्रक्रम से पहले सिद्ध करो कि

$$\int_k^a f(y) \text{ताय} = (a-k) f \left\{ k + p (a-k) \right\} = 1$$

इस लिये $\int_k^a \{ f(y) \}^2 \text{ताय} = \int_k^a f(y) f(y) \text{ताय} =$

$$= \int_k^a \{ k + p(a-k) \} f(y) dy = \int_k^a \{ k + p(a-k) \} f(y) dy$$

$$\text{और } \int_k^a \text{कोज्या}^2 \text{गयताय} = \int_k^a \text{कोज्या}^2 \text{गयतायग}$$

$$= \int_k^a \left\{ \frac{a-k}{2} + \frac{\text{ज्या}^2 \text{अग} - \text{ज्या}^2 \text{क}}{4} \right\}$$

(क्योंकि $\int \text{कोज्या}^2 \text{गयतायग} = \frac{यग}{2} + \frac{\text{ज्या}^2 \text{गय}}{4}$) इस लिये

$$\int_k^a \{ f(y) \}^2 \text{ताय} \times \int_k^a \text{कोज्या}^2 \text{गयताय}$$

$$= \int_k^a \{ k + p(a-k) \} \left\{ \frac{a-k}{2} + \frac{\text{ज्या}^2 \text{अग} - \text{ज्या}^2 \text{क}}{4} \right\}$$

यह $\left\{ \int_k^a f(y) \text{कोज्या}^2 \text{गयताय} \right\}^2$ इस से बड़ा होगा (४ अध्याय के १९वें प्रश्न से)

$$\text{इसी तरह } \int \text{ज्या}^2 \text{गयताय} = \int \text{ज्या}^2 \text{गयतायग} = \frac{यग}{2} - \frac{\text{ज्या}^2 \text{गय}}{4}$$

$$\text{इस लिये } \int_k^a \text{ज्या}^2 \text{गयताय} = \int_k^a \left\{ \frac{अग-कग}{2} - \frac{\text{ज्या}^2 \text{अग} - \text{ज्या}^2 \text{कग}}{4} \right\}$$

$$\text{इस लिये } \int_k^a \{ f(y) \}^2 \text{ताय} \times \int_k^a \text{ज्या}^2 \text{गयताय}$$

$$\leq \int_k^a \{ k + p(a-k) \} \left\{ \frac{अ-क}{2} - \frac{\text{ज्या}^2 \text{अग} - \text{ज्या}^2 \text{कग}}{4} \right\}$$

यह बड़ा होगा $\left\{ \int_k^a f(y) \text{ज्या}^2 \text{गयताय} \right\}^2$ इस से ।

और तब दोनों का योग $\int_k^a \{ k + p(a-k) \} \{ अ-क \} = 1$ यह बड़ा

होगा $\left\{ \int_k^a f(y) \text{कोज्या}^2 \text{गयताय} \right\} + \left\{ \int_k^a f(y) \text{ज्या}^2 \text{गयताय} \right\}^2$ इस से ।

१२। सिद्ध करो कि यदि $\int_k^a f(y) \text{ताय} = 1$ और $f(y)$ सर्वदा धन हो तो

$$\int_k^a y f(y) \text{ताय} \geq \int_k^a y f(y) \text{ताय}$$

६८। चलराशिकलन अब समाप्त हो गया । पिछले अध्यायों में जो अनेक सिद्धान्त और उदाहरण दिखला आये हैं उन्हीं का प्रपञ्च मत्र अगले अध्यायों में है ।

जैसे व्यक्तगणित में परिक्रमाष्टक और बीजगणित में वर्गपट्टति पर्यन्त गणित मुख्य हैं आगे सब दोनों गणितों में इन्हीं का सर्वत्र प्रपञ्च है इसी तरह यहाँ भी आगे सर्वत्र पिन्डरे सिद्धान्तों का ही प्रपञ्च है इस लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि इन पाँचों अध्यासों में जा कुछ लिखा गया है उन का अच्छी तरह से ध्यान देकर अध्यास करें बिना उन के जाने अगले अध्यासों का ध्यान होना अव्यन्त दृष्ट है ।

इति पञ्चमाध्याय ।

षष्ठाध्याय

वक्रक्षेत्रों का चापानयन ।

६९। चलनकलन के १६वें अध्याय से सिद्ध है कि यदि किसी वक्र का

$$r = f(y) \text{ ऐसा समीकरण हो तो } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} \text{ ऐसा होगा}$$

इस लिये ताचा = $\sqrt{\text{ताय}^2 + \text{तार}^2}$ । यहाँ पर वक्र के समीकरण पर से ताचा का मान फा(य) ताय ऐसा होगा फिर पिछले अध्यायों के बल से $\int \text{ताचा} = \text{चा} + \text{स्थि} = \int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \int \sqrt{\text{ताय}^2 + \text{तार}^2} = \int \text{ताय} \text{फा}(y)$ यह सिद्ध हो जायगा ।

$$\text{चा} + \text{स्थि} = \int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} \text{ इस लिये कल्पना करो कि}$$

जब $y = y_1$ तब $\text{चा} = \text{चा}_1$ और जब $y = y_2$ तब $\text{चा} = \text{चा}_2$

$$\text{इस लिये } \text{चा}_2 - \text{चा}_1 = \int_{y_1}^{y_2} \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$$

इस लिये दो कोटियों के बीच में वक्र का जो चाप है उसके जानने के लिये स्थिराङ्क का कुछ भी प्रयोजन नहीं केवल y_1 और y_2 जो उन दो कोटियों के भुज हो उन के बीच $\int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$ इस का मान ले आना चाहिये ।

७०। जिस परवलय (Parabola) का $r^2 = ४ay$ यह समीकरण है उसके चाप का प्रमाण जानना है ।

$$\begin{aligned} \text{यहाँ } r^2 = ४ay : \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} &= \frac{२\sqrt{ay}}{r} \text{ और } 1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} = \frac{r^2 + ४ay}{r^2} = \frac{४ay + ४ay}{४ay} \\ &= \frac{y + ay}{y} \text{ । इस लिये } \int \left[\frac{y + ay}{y} \right]^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \int \frac{y + ay}{\sqrt{y^3 + ay^2}} \text{ताय} \\ &= \int \frac{y + \frac{ay}{2}}{\sqrt{y^3 + ay^2}} \text{ताय} + \int \frac{\frac{ay}{2} \text{ताय}}{\sqrt{y^3 + ay^2}} = \sqrt{y^3 + ay^2} + \frac{ay}{2} \left(y + \frac{ay}{2} + \sqrt{y^3 + ay^2} \right) \dots (१) \end{aligned}$$

(९)वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से ।

इस लिये $\text{चा} + \text{स्थि} = \sqrt{y^3 + ay^2} + \frac{ay}{2} \left(y + \frac{ay}{2} + \sqrt{y^3 + ay^2} \right) \dots (१)$

इस में यदि $y = ०$ तो क्षेत्र लक्षण से $\text{चा} = ०$

इस लिये स्थि = $\frac{अ}{२}$ ला $(\frac{अ}{२})$

इस का उत्थापन (१) में देने से

$$\begin{aligned} \text{परवलय का चाप} &= \sqrt{य^२ + यअ} + \frac{अ}{२} \text{ ला } (य + \frac{अ}{२} + \sqrt{य^२ + यअ}) - \frac{अ}{२} \text{ ला } \frac{अ}{२} \\ &= \sqrt{य^२ + यअ} + \frac{अ}{२} \text{ ला } \left[\frac{२य + अ + २\sqrt{य^२ + यअ}}{अ} \right] \end{aligned}$$

इस मे यदि य = अ तो नाभी से जो लम्ब य अक्ष पर होगा वह एक भाग मे जहाँ परवलय को काटेगा वहाँ से शिरः स्थान तक का चाप मान

$$अ\sqrt{२} + \frac{अ}{२} \text{ ला } \left[\frac{३अ + २\sqrt{२अ^२}}{अ} \right] = अ\sqrt{२} + \frac{अ}{२} \text{ ला } (३ + २\sqrt{२}) \quad \text{यह हुआ}$$

७१। चक्रालद का चापानयन (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का ११वाँ वक्र देखो)

इस में $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{२क}{य}}$ (चलनकलन का ३८८ पृष्ठ देखो)

$$\text{इस लिये } \int \text{ताचा} = \text{चा} = (२क)^{\frac{१}{२}} य^{-\frac{१}{२}} \text{ ताय} = २ (२क)^{\frac{१}{२}} (य)^{\frac{१}{२}} = \sqrt{८कय}$$

यहाँ क्षेत्रलक्षण से जब य = ० तब चा = ० इस लिये स्थिराङ्क का मान शून्य होगा।

७२। जिस वक्र कार = $\frac{म}{न}$ यह समीकरण है उसके चाप का आनयन ।

$$र = अय \frac{\frac{म}{न}}{\frac{म}{न}} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{म}{न} \text{ अय } \frac{म}{न} - १$$

$$\text{और } \sqrt{\frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२} + १} = \sqrt{१ + \frac{म^२ अ^२}{न^२} य \frac{२म - २न}{न}}$$

$$\text{अब } \int \text{ताय} \sqrt{१ + \frac{म^२ अ^२}{न^२} य \frac{२म - २न}{न}} \quad \text{इस का मान १२वें प्रक्रम के (४)}$$

उदाहरण मे यदि $\frac{प}{व} = \frac{१}{२}$ । म = १, न = $\frac{२म - २न}{न}$ मानो तो

$$\frac{म}{न} = \frac{न}{२(म - न)} \text{ यह यदि अभिन्न और धन हो तो विद्धित हो जायगा ।}$$

अथवा $\frac{न}{२(म - न)} + \frac{१}{२}$ यह अभिन्न और ऋण हो तो भी उसी उदाहरण से

चल का मान विदित हो जायगा । यदि पहला ऋण अभिन्न दूसरा धन अभिन्न हो तो भी द्वितीयाध्याय से चल का मान विदित हो जायगा ।

$$\text{जैसे यदि } \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \text{ तो } \frac{m-n}{n} = \frac{1}{2} \quad \frac{n}{2(m-n)} = 1 \text{ अभिन्न}$$

$$\text{इस लिये } \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \sqrt{1 + \frac{9a^2}{4}} \text{ य } = \frac{3a}{2} \sqrt{\frac{4}{9a^2} + \text{य}}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{ताचा} = \text{चा} + \text{स्थि} = \frac{3a}{2} \int \left[\frac{4}{9a^2} + \text{य} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = a \left[\frac{4}{9a^2} + \text{य} \right]^{\frac{3}{2}}$$

इस में यदि $\text{य} = 0$ तो क्षेत्रलक्षण से $\text{चा} = 0$ इस लिये

$$\text{स्थि} = a \times \frac{4}{2 \cdot 9a^2} = \frac{4}{2 \cdot 9a} \text{ इस का उत्थापन देने से}$$

$$\text{चा} = \left\{ \left[\frac{4}{9a^2} + \text{य} \right]^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{2 \cdot 9a} \right\}$$

७३। कानन्वली (Catenary) के चाप का आनयन ।

$$\text{इस में } r = \frac{g}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{z} \right) \text{ इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{g}{2} \left(\frac{y}{z} - \frac{y}{z} \right)$$

$$\text{और } \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{2y}{z} + \frac{2y}{z} + 2 \right)} = \frac{g}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{z} \right)$$

$$\text{इसलिये } \int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \text{चा} + \text{स्थि} = \frac{g}{2} \left(\frac{y}{z} - \frac{y}{z} \right)$$

यदि मूल बिन्दु से गणना करे जहाँ $\text{य} = 0$ तो यहाँ स्थिराङ्क शून्य होगा ।

७४। जिस वक्र का $y^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ यह समीकरण है उस के चाप का आनयन ।

$$\text{यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{r^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} \text{ इस लिये } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \left[\frac{y^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{इस लिये } \text{च} = a^{\frac{3}{2}} \int \text{ताय} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \text{स्थि}$$

यहाँ $\text{य} = 0$ उस बिन्दु से यदि गणना करें तो स्थिराङ्क शून्य होगा ।

चलितवृत्त का व्यासार्द्ध यदि स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध का चतुर्थांश हो तो उस वक्र को एक प्रकार का अनिचक्रालद कहने हैं । (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वाँ वक्र देखो) ।

७५। ६९ वें प्रक्रम से यह भी कह सकते हो कि यदि र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध का ज्ञान करें तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \sqrt{1 + \frac{\text{ताय}^2}{\text{तार}^2}}$ ऐसा होगा । इसलिये

$$\text{चा} = \int \text{तार} \sqrt{1 + \frac{\text{ताय}^2}{\text{तार}^2}} + \text{स्थि} । \dots\dots\dots (१)$$

इसी तरह यदि य और र तीसरे चलराशि का फल हो तो चलनकलन के १५३ वें प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$\int \text{ताचा} = \text{चा} = \int \sqrt{\left[\frac{\text{ताय}^2}{\text{ताका}^2} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताका}^2} \right]} \text{ताका} + \text{स्थि} \dots\dots (२)$$

ऐसे ही चलनकलन के १५५ वें प्रक्रम से यदि अक्षीय भुज युग्म हो तो

$$\text{चा} = \int \left[\text{श्रु}^2 + \frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताष}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ताष} + \text{स्थि} \dots\dots\dots (३)$$

$$\text{वा चा} = \int \left[1 + \text{श्रु}^2 \frac{\text{ताष}^2}{\text{ताश्रु}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ताश्रु} + \text{स्थि} \dots\dots\dots (४)$$

अथवा यदि स्प भ = $\frac{\text{श्रु} \text{ताष}}{\text{ताश्रु}}$ जहाँ भ, श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है तो

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} &= \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}} \text{ इस लिये चा} = \int \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}} \text{ ताष} + \text{स्थि} \\ \text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} &= \frac{1}{\text{कोज्याभ}}, \text{ इसलिये चा} = \int \frac{\text{ताश्रु}}{\text{कोज्याभ}} + \text{स्थि} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (५)$$

चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से ज्याभ = $\frac{\text{ल}}{\text{श्रु}}$, और कोज्याभ = $\frac{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}}{\text{श्रु}}$

इन का उत्थापन (५) वें में देने से

$$\text{चा} = \int \frac{\text{श्रु}^2 \text{ताष}}{\text{ल}} + \text{स्थि}, \text{ और चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}} + \text{स्थि} \dots\dots (६)$$

यहाँ ध्रुवविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल है ।

(चलनकलन का १४ वाँ अध्याय देखो)

इन सब पर से जहाँ जिस प्रकार से चलानयन में लाघव देख पड़े वहाँ उस प्रकार से चाप का मान निकालो ।

जिन प्रकारों में मूल लेने से ताचा का मान आता है वहाँ बीजगणित से स्पष्ट है कि एक ताचा का मान धन और दूसरा ऋण होगा इस लिये बुद्धिमानों को

चाहिये कि प्रश्न के अनुसार जहाँ जिस का प्रयोजन हो उसको ग्रहण करे जैसे ७३ वे प्रक्रम में कातन्वली के चापानयन में जो $\frac{1}{2} \left(3 \frac{2y}{g} + 3 \frac{2y}{g} + 2 \right)$ इस का मूल लिया है वह धन माना है इस पर से जो चाप का मान आता है वह भी धन आता है अर्थात् मूलविन्दु से य अक्ष में दहनी और यदि य का मान धन मानो तो र अक्ष से दहने भाग में जो वक्र का भाग है उस के चाप का मान वह है । और इसी में यदि मूल ऋण मानो तो चाप का मान पूर्व ही के तुल्य ऋण आवेगा ऐसी दशा में य, अक्ष में मूल विन्दु से वाम भाग में य और र अक्ष से वाम भाग में जो वक्र खण्ड है उसके चाप का मान समझना चाहिये । (चलकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वाँ वक्र देखो) ।

७६। लाघुरिकथिक वक्र के चाप का आनयन ।

यहाँ वक्र का समीकरण $r = a \sqrt{\frac{y}{k}}$ (चलनक०, २८६ प्र०, १ वक्र)

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{a}{k} \sqrt{\frac{y}{k}} = \frac{r}{k} \therefore \frac{\sqrt{r^2 + k^2}}{k} = \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$$

और चा = $\frac{1}{k} \int \sqrt{(r^2 + k^2)} \text{ ताय देखो यहाँ फल में } r \text{ का मान है और चल ताय के वश से निकालना है इस लिये } r \text{ के स्थान में जब तक कोई तत्तुल्य य के फल का उत्थापन न दोगे तब तक चलज्ञान कठिन है। इस लिये यहाँ ७५ प्रक्रम के (१) समीकरण से}$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \frac{k}{r} \text{ और } \sqrt{1 + \frac{\text{ताय}^2}{\text{तार}^2}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \frac{\sqrt{r^2 + k^2}}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{और चा} &= \int \frac{\sqrt{(r^2 + k^2)} \text{तार}}{r} = \int \frac{k^2 \text{तार}}{r \sqrt{(r^2 + k^2)}} + \int \frac{r \text{तार}}{\sqrt{(r^2 + k^2)}} \\ &= k \text{ ला } \frac{r}{k + \sqrt{(r^2 + k^2)}} + \sqrt{r^2 + k^2} + \text{स्थि (१२ वे प्रक्रम का २३ वाँ} \end{aligned}$$

अभ्यास के लिये जो प्रश्न है उसे देखो)

अब यहाँ जो $y = 0$ तो $r = a$ इस में मानो कि चा = चा_१ तो

$$\text{चा}_1 = k \text{ ला } \frac{a}{k + \sqrt{a^2 + k^2}} + \sqrt{a^2 + k^2} + \text{स्थि}$$

$$\text{इसलिये चा} - \text{चा}_1 = k \text{ ला } \frac{r(k + \sqrt{a^2 + k^2})}{a(k + \sqrt{r^2 + k^2})} + \sqrt{r^2 + k^2} - \sqrt{a^2 + k^2} ।$$

७७। दीर्घवृत्त के चाप का आनयन ।

$$\text{दीर्घवृत्त का समीकरण, } r^2 = \frac{k^2}{a^2} (a^2 - y^2) \therefore \frac{r^2}{k^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(चलनकलन का १०९वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि $y =$ अज्याप और $r =$ ककोज्याप मान लें तो

$$\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}} = \text{अकोज्याप, } \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = -\text{कज्याप । अब ७५वें प्रक्रम के (२) समीकरण}$$

$$\text{से } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{(a^2 \text{कोज्या}^2 \text{प} + k^2 \text{ज्या}^2 \text{प})} \text{ इस लिये}$$

$$\begin{aligned} \text{चा} &= \int \sqrt{(a^2 \text{कोज्या}^2 \text{प} + k^2 \text{ज्या}^2 \text{प})} \text{ताप} = a \int \sqrt{(\text{कोज्या}^2 \text{प} + \frac{k^2}{a^2} \text{ज्या}^2 \text{प})} \text{ताप} \\ &= a \int \sqrt{(1 - \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प})} \text{ताप यहाँ } 1 - \text{इ}^2 = \frac{k^2}{a^2} \text{ और } a = \text{बृहद्व्यासार्द्ध,} \end{aligned}$$

$$k = \text{लघुव्यासार्द्ध, स्पप} = \frac{\text{कय}}{\text{अर}} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \text{ ।}$$

यहाँ $\sqrt{(1 - \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प})}$ इस का मान डियुक्पद सिद्धान्त से विना फैलाये चल ज्ञान नहीं हो सकता इस लिये फैलाने से

$$\text{चा} = a \int (1 - \frac{1}{2} \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प} - \frac{1}{8} \text{इ}^4 \text{ज्या}^4 \text{प} - \frac{1}{16} \text{इ}^6 \text{ज्या}^6 \text{प} - \dots) \text{ताप}$$

यदि ० और a के बीच y के मान में अथवा ० और $\frac{\pi}{2}$ के बीच p के मान में यदि ऊपर के चल का ज्ञान ३५वें प्रक्रम के लघूकरण सिद्धान्त से वा १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण से करो तो दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश

$$\begin{aligned} &= a \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ताप} - \frac{1}{2} \text{इ}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^2 \text{पताप} - \frac{1}{8} \text{इ}^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^4 \text{पताप} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \text{इ}^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^6 \text{पताप} \dots \right\} \\ &= \frac{\pi a}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \text{इ}^2 - \frac{1}{2 \cdot 8} \text{इ}^4 - \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 16} \text{इ}^6 - \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32} \text{इ}^8 - \dots \right] \end{aligned}$$

इस का चौगुना करने से यदि $p = 2\pi a =$ बृहद्व्यास से उत्पन्न वृत्त की परिधि । तो दीर्घवृत्त की परिधि

$$= p \left(1 - \frac{1}{2} \text{इ}^2 - \frac{1}{2 \cdot 8} \text{इ}^4 - \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 16} \text{इ}^6 - \dots \right)$$

इस में यदि आदि के दो पदों को केवल ग्रहण करो और इ' का मान बहुत अल्प होने के कारण और पदों को छोड़ दो तो दीर्घवृत्त की परिधि = $p \left(1 - \frac{r}{2} \right)$

$$= p \left[\frac{p - \frac{r}{2}}{p} \right] = p \left[\frac{2 - \frac{r}{p}}{2} \right] = p \left[\frac{2a^2 - r}{2a^2} \right]$$

ये अनेक प्रकार बना सकते हो (दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

७८। अतिपरवलय के चाप का आनयन ।

$$\text{इस का समीकरण } r = \frac{k}{a^2} (y^2 - a^2) \text{ वा } \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2} = 1$$

(चलनकलन का १११ वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि $y =$ अक्षेप और $r =$ कस्पप ऐसा मानो तो

$$\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}} = - \text{अस्पपछेप, } \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \text{कछेप}$$

इसलिये ७९ वे प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}} = \sqrt{(\text{अस्पपछेप} + \text{कछेप})}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\text{अस्पप} + \text{अस्पप} + \text{कस्पप} + 2\text{कस्पप} + \text{क}^2)} \\ &= \sqrt{\{ (\text{अ}^2 + \text{क}^2) \text{स्पप} + \text{स्पप}(\text{अ}^2 + 2\text{क}^2) + \text{क}^2 \}} \\ &= \text{क} \sqrt{\left\{ \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2}{\text{क}} \text{स्पप} + \frac{\text{अ}^2 + 2\text{क}^2}{\text{क}} \text{स्पप} + 1 \right\}} \end{aligned}$$

इसको फैलाने से सर्वत्र स्पप का कोई घात रहेगा जिस के चल का ज्ञान ३७ वे प्रक्रम के (३) उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा ।

अथवा $r = \frac{k}{a^2} \sqrt{y^2 - a^2}$ इसी समीकरण से यहाँ

$$\begin{aligned} \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} &= \frac{\text{क}}{a} \frac{y}{\sqrt{(y^2 - a^2)}} \cdot \frac{\text{ताप}}{\text{ताप}} = \left\{ \frac{(\text{क}^2 + \text{अ}^2) y^2 - \text{अ}^2}{\text{अ}^2 (y^2 - \text{अ}^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{\text{इ}^2 y^2 - \text{अ}^2}{y^2 - \text{अ}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ यदि } \frac{\text{क}^2 + \text{अ}^2}{\text{अ}^2} = \text{इ}^2 \end{aligned}$$

इस लिये

$$\text{त्रा} = \int \sqrt{\left[\frac{\text{इ}^2 y^2 - \text{अ}^2}{y^2 - \text{अ}^2} \right]} \text{ताप} = \text{अ} \int \sqrt{\left[\frac{\text{इ}^2 \text{ल}^2 - 1}{\text{ल}^2 - 1} \right]} \text{ताल} \quad \{ \text{यदि } y = \text{अल} \}$$

$$= \text{अइ} \int \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\epsilon^2 l^2}\right)}}{\sqrt{l^2 - 1}} \text{ताल}$$

$$= \text{अ} \left\{ \int \frac{\text{इल}}{\sqrt{(l^2 - 1)}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2 l^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{4} \frac{1}{\epsilon^2 l^4} - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1 \cdot 3}{8} \frac{1}{\epsilon^2 l^6} - \dots \right) \text{ताल} \right\}$$

$$= \text{अ} \left\{ \int \frac{\text{इल}}{\sqrt{(l^2 - 1)}} \text{ताल} - \frac{1}{2\epsilon^2} \int \frac{\text{ताल}}{l\sqrt{l^2 - 1}} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 8 \epsilon^4} \int \frac{\text{ताल}}{l^3 \sqrt{l^2 - 1}} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 8 \cdot 6 \epsilon^6} \int \frac{\text{ताल}}{l^5 \sqrt{l^2 - 1}} \dots \right\}$$

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताल}}{l^m \sqrt{l^2 - 1}} = \frac{1}{m-1} \frac{\sqrt{l^2 - 1}}{l^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{\text{ताल}}{l^{m-2} \sqrt{l^2 - 1}} \text{ इस}$$

लघूकरण सिद्धान्त से आदि पद को छोड़ और सब पदों के चल का मान जान सकते हो ।

और आदि पद $\frac{\text{इल}}{\sqrt{l^2 - 1}}$ ताल इस का चल $\epsilon \sqrt{l^2 - 1}$ यह है ।

यहाँ m का मान विषम है इस लिये सब खण्डों में अन्त में $\int \frac{\text{ताल}}{l \sqrt{l^2 - 1}}$
= छे'ल यह होगा

यदि 0 और अनन्त के बीच ल के मान में चाप का मान अपेक्षित हो तो ऊपर के लघूकरण सिद्धान्त से

$$\text{अइल} - \text{चा} = \frac{\pi \text{अ}}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{1 \cdot 1}{2^2 \cdot 8} \frac{1}{\epsilon^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 8^2 \cdot 6} \frac{1}{\epsilon^5} \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 8^2 \cdot 6^2 \cdot 2} \frac{1}{\epsilon^7} + \dots \right) \text{ यह सिद्ध होगा ।}$$

७९ । आर्किमिडिज़ के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes) (चलनकलन में २८६ प्रकम का (४) वक्र देखो)

इस का समीकरण $\text{थ्रु} = \text{अष}$ इस लिये $\frac{\text{ताथ्रु}}{\text{ताष}} = \text{अ}$ । ७५ प्रकम के (३)

$$\text{समीकरण से } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} = \sqrt{\left[\text{थ्रु}^2 + \frac{\text{ताथ्रु}^2}{\text{ताष}^2} \right]}$$

$$\text{इस लिये चा} = \int \sqrt{\left[\text{थ्रु}^2 + \frac{\text{ताथ्रु}^2}{\text{ताष}^2} \right]} \text{ताष} = \int \sqrt{(\text{थ्रु}^2 + \text{अ}^2)} \text{ताष}$$

$$= अ \int \sqrt{(१ + प^२)} ताप = \frac{अप}{२} \sqrt{१ + प^२} + \frac{अ}{२} ला \{ प + \sqrt{१ + प^२} \} + स्थि।$$

यदि $प = ०$ तो $चा = ०$ इस लिये स्थिराङ्क का मान्य शून्य होगा ।

८०। जिस वक्र का $श्रु = अ (१ + कोज्याप)$ यह समीकरण है उस के चाप का मान जानना । (चलनकलन के २८५ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो) यहाँ $\frac{ताश्रु}{ताप} = -अज्याप$ इस लिये

$$चा = \int \sqrt{\{ अ^२(१ + कोज्याप)^२ + अ^२ज्या^२प \}} ताप$$

$$= अ \int \sqrt{(२ + २कोज्याप)} ताप = २अ \int कोज्या \frac{प}{२} ताप = ४अज्या^{\frac{प}{२}} + स्थि।$$

यदि चाप की गणना वहाँ से करे जहाँ $प = ०$ तो स्थिराङ्क का मान शून्य होगा । मूल का मान ऋण लेने से दूसरी दिशा का चाप

$= -४अज्या^{\frac{प}{२}}$ ऐसा होगा । यहाँ यदि $प = \pi$ तो ऊपर के आधे का प्रमाण $= ४अज्या^{\frac{प}{२}} = ४अ$ और ऋण मान से नीचे के आधे का प्रमाण $= ४अज्या^{\frac{प}{२}} = ४अ$ ।

इस लिये समग्र चाप का प्रमाण $= ८अ$ यह हुआ ।

इस वक्र को अङ्गरेजी में क्यारडियाइड (Cardioid) कहते हैं ।

८१। लाघुरिक्थिक सर्पिल के चाप आनयन ।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो)

$$यहाँ श्रु = अ इ \frac{प}{क}, इस लिये प = क ला \frac{श्रु}{अ} और \frac{ताप}{ताश्रु} = \frac{क}{श्रु}$$

इस लिये ७५ प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$चा = \int \sqrt{\left[\frac{श्रु^२ ताप^२}{ताश्रु^२} + १ \right]} ताश्रु = \int \sqrt{(क^२ + १)} ताश्रु = श्रु \sqrt{क^२ + १}$$

श्रुति का प्रमाण $श्रु_२ - श्रु_१$ मानो तो उन के बीच के चाप का प्रमाण $(श्रु_२ - श्रु_१) \sqrt{क^२ + १}$ यह होगा । (१)

चलनकलन से सिद्ध है कि इस सर्पिल में श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण की स्पर्शरेखा सर्वदा स्थिर क है इस लिये इस कोण को यदि θ कहो तो (१) को $(श्रु_२ - श्रु_१)$ छेभ ऐसे भी लिख सकने हो

८२। अपचक्रालड (Epicycloid) के चाप का आनयन ।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (१३) वक्र देखो)

इस में चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि मूल बिन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान

$$= ल = (अ + २क) ज्या^{-\frac{अक}{२क}} \text{ और } श्रु^२ = अ^२ + ४क (अ + क) ज्या^{\frac{अक}{२क}}$$

$$\text{इस लिये } ल^२ = \frac{ग^२(श्रु^२ - अ^२)}{ग^२ - अ^२} \quad \text{जहाँ } ग = अ + २क$$

अब ७५ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण से

$$\text{चा} = \frac{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}{अ} \int \frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^२ - श्रु^२)}} = - \frac{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}{अ} \sqrt{(ग^२ - श्रु^२)} + स्थि$$

परमनीच और परमउच्च में जहाँ क्रम से अ, अ + २क = ग श्रुति है इन के बीच में

$$\begin{aligned} \text{चाप का मान} &= \frac{अ+२क}{अ} \frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^२ - श्रु^२)}} = \frac{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}{अ} \sqrt{ग^२ - अ^२} = \frac{ग^२ - अ^२}{अ} \\ &= \frac{(अ^२ + ४अक + ४क^२ - अ^२)}{अ} = \frac{४क(अ + क)}{अ} \quad \text{इस लिये इस का दूना} \end{aligned}$$

$\frac{४क(अ+क)}{अ}$ यह अपचक्रालद के पूरे चाप का प्रमाण है जिस की उत्पत्ति

चलितवृत्त के एक वार समग्र भ्रमण करने से होगी ।

८३। इसी प्रकार अतिचक्रालद (Hypocycloid) के चापानयन में भी

$$ल^२ = \frac{ग^२(अ^२ - श्रु^२)}{अ} \quad , \text{ जहाँ } ग = अ - २क$$

मानो कि $ग^२ < अ^२$ तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} = \pm \frac{\sqrt{अ^२ - ग^२}}{अ} \frac{श्रु}{\sqrt{(श्रु^२ - ग^२)}}$ इस परसे पूर्ववत्

चा = $\pm \frac{\sqrt{अ^२ - ग^२}}{अ} \sqrt{श्रु^२ - ग^२} + स्थि$ और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

$$\text{चाप} = \frac{४क(अ-क)}{अ} ।$$

यदि $ग^२ > अ^२$ तो पहले सम्बन्ध को अर्थात् $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}}$ इस के मान को

$\pm \frac{\sqrt{ग^२ - अ^२}}{अ} \frac{श्रु}{\sqrt{(ग^२ - श्रु^२)}}$ ऐसे लिख सकते हो । इस स्थिति में $क > अ$ तब

चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में वक्र के चाप का प्रमाण $\frac{४क(क-अ)}{अ}$ यह

होगा । जब $अ = २क$ तब $ग = ०$ और $ल = ०$ । ऐसी स्थिति में

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} = १$ इस लिये चा = श्रु + स्थि । और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

चलनकलन से—कोस्पप = $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ क्योंकि गणना अ से व की ओर है इस लिये ज्यों ज्यों र बढ़ेगा त्यों त्यों य की गति ऋण होगी ।

$$\sqrt{१ + \text{कोस्पप}} = \sqrt{१ + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}^2}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = - \text{कोछेष (ऊपर की युक्ति से)}$$

ताप के वश से ल का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\begin{aligned} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} &= \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{यज्याष} + \text{ज्याष} \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{रकोज्याष} \\ &= \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{ज्याष} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - (\text{यज्याष} - \text{रकोज्याष}) \\ &= \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{च} = - \text{च} \end{aligned}$$

• एक बार और तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\begin{aligned} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}^2} &= - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = - \left(\text{ज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्याषय} - \text{कोज्याप} \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{ज्याषर} \right) \\ &= - \frac{\text{ज्याष}}{\text{ज्याप}} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याष} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल} \\ &= \text{ज्याषकोछेष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्याप कोस्पप} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल} \\ &= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} (\text{ज्याषकोछेष} + \text{कोज्याषकोछेष}) - \text{ल} \\ &= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} \text{कोछेष} - \text{ल} = - \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} \cdot \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} - \text{ल} = - \text{ल} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \end{aligned}$$

इस लिये चलानयन से

$$\int \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}^2} \text{ताप} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = - \int \text{लताप} - \int \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ताप} = - \int \text{लताप} - \text{चा} = \text{च} - \text{चा} = \int \text{लताप} ।$$

वक्र के समीकरण पर से और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \text{कोस्पप}$ इस से य और र का मान प के रूप में आ सकता है इन का उत्थापन ल में देने से ल भी कोई प का फल होगा फिर चा = $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} + \int \text{लताप}$ इस पर से चाप का मान जान सकते हो । व की ओर गणना करने से चा का ऋण चिह्न छोड़ दिया है ।

ऊपर जो ष, ल इत्यादि का परस्पर सम्बन्ध दिखलाया है वह सब हम ने द्युचरचार नामक ग्रन्थ में लिखा है। बालावबोध के लिये यहाँ भी थोड़ा सा दिखला दिया है।

ऊपर जो ल = यकोज्याप + रज्याप

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = -\text{च} = -\text{यज्याप} + \text{रकोज्याप}$$

ये सिद्ध हुए हैं इन पर से

लकोज्याप = यकोज्याप + रज्यापकोज्याप

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} \text{ज्याप} = -\text{चज्याप} = -\text{यज्याप} + \text{रज्यापकोज्याप}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अन्तर करने से ल कोज्याप} - \text{ज्याप} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{य} \\ \text{इसी प्रकार ल ज्याप} + \text{कोज्याप} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{र} \end{array} \right\} \quad (१)$$

यदि एक ऐसे वक्र का ज्ञान करना हो जिस के चाप पर से उद्दिष्ट \int लताप इस का ज्ञान अपेक्षित हो जहाँ ल कोई प का फल है तो (१) समीकरण से स्पष्ट है कि ल, कोज्याप, ज्याप, और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ इन सब पर से उम वक्र का भुज, और कोटि विदित हो जायेंगे।

इसी क्षेत्र में यदि वक्रजातीय वृत्त का केन्द्र ग और व्यासार्द्ध गव = वि मानो (चलनकलन का १७वाँ अध्याय देखो) तो चलनकलन के १६८ और १७१ प्रक्रमों से, वि = श्रु $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$, इस लिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{श्रु} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताचा}}$

$$\text{और} \quad \text{च} = \text{श्रुकोज्या} \angle \text{नावल} = -\text{श्रु} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताचा}}$$

$$\text{इसलिये} \quad -\text{च} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} \quad ।$$

ना विन्दु से वक्रजातीय व्यासार्द्ध के ऊपर नात लम्ब डालो तो स्पष्ट है कि नात = च = यल। और वक्र के प्रति विन्दु के भिन्न भिन्न जो वक्रजातीय वृत्तकेन्द्र होंगे उन पर गये हुए वक्र अर्थात् अवलूत (चलनकलन का १७५ वाँ प्रक्रम देखो) के साथ नात का वैसाही सम्बन्ध रहेगा

जैसा कि व विन्दु के साथ बल अर्थात् च का है। यदि त विन्दु का अक्षीय भुज युग्म ल, ष मानें और तग = च तो

$$\text{ष} = \text{च} - \frac{1}{5} \text{ और } \text{ल} = \text{च}$$

$$\text{और गत} = \text{च} = - \frac{\text{ताल}^1}{\text{ताष}^1} = - \frac{\text{ताल}^1}{\text{ताष}^1} = - \frac{\text{ताच}^1}{\text{ताष}^1} = \frac{\text{ता}^1 \text{ल}^1}{\text{ताष}^1}$$

क्योंकि अवलूत के लक्षण से गव रेखा अवलूत की स्पर्शरेखा होगी

$$\text{और वि} = \text{वत} + \text{तग} = \text{ल} + \text{च} = \text{ल} + \frac{\text{ता}^1 \text{ल}^1}{\text{ताष}^1}$$

$$\text{परन्तु वि} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}}, \text{ इस लिये } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} = \text{ल} + \frac{\text{ता}^1 \text{ल}^1}{\text{ताष}^1}$$

$$\text{और चा} = \int \text{ल ताष} + \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} \text{ यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।}$$

यदि प्रत्येक स्पर्शरेखाओं के ऊपर ना विन्दु से लम्ब डाले जायँ और उन लम्बमूलों में लगाकर एक वक्र करें और इसके ल विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर ना विन्दु से जो लम्ब पड़ा उसको ल, कहो तो

चलनकलन के १३१ वे प्रक्रम से $\frac{१}{\text{ल}^३} = \frac{१}{\text{ल}^३} + \frac{१}{\text{ल}^५} \cdot \frac{\text{ताल}^०}{\text{ताष}^३}$ (क्योंकि इस वक्र

की श्रुति = ल है) इस में $\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}}$ के स्थान में च का उत्थापन देने से

$$\frac{१}{\text{ल}^३} = \frac{१}{\text{ल}^३} + \frac{\text{च}^०}{\text{ल}^५} = \frac{\text{ल}^० + \text{च}^०}{\text{ल}^५} = \frac{\text{श्रु}^०}{\text{ल}^५}$$

इसलिये ल, = $\frac{\text{ल}^०}{\text{श्रु}}$ यह एक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होता है ।

ऊपर के क्षेत्र में अ विन्दु से व की और जब चा = चा_१ तो च = च_१ और जब चा = चा_२ तब च = च_२ ऐसा मानो तो

$$\text{चा}_२ - \text{चा}_१ + \text{च}_२ - \text{च}_१ = \int_{\text{ष}_१}^{\text{ष}_२} \text{लताष} \text{ यह उत्पन्न होगा}$$

जहाँ चा_२ और चा_१ सम्बन्धी प_२ और प_१ है ।

ध्रुव स्थान से किसी ष, में यदि श्रुति का मान श्रु_१ और च का मान च_१ हो तो स्पष्ट है कि श्रुति नियत अक्ष के चारो ओर घूम कर जब फिर अपने पहले

स्थान पर पहुँचेगी तब प का मान $p_2 = p_1 + 2\pi$ यह और $\theta_2 = \theta_1$ । $ch = c$,
ऐसी स्थिति में जो सीमित वक्र होंगे

उनके परिधि का मान = $\int_{p_1}^{p_1 + 2\pi} l$ तथा यही होगा ।

८५। ८४ प्रक्रम के सिद्धान्त की व्याप्ति दिखाने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं ।

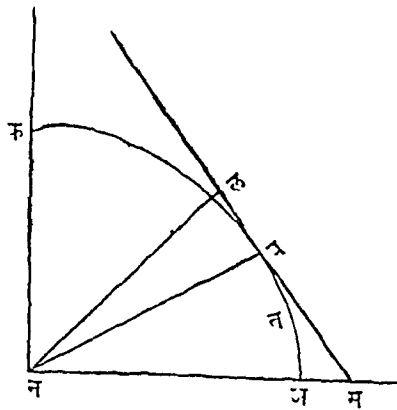
(१) मानो कि अतवक एक दीर्घवृत्त का चतुर्थांश है जिस का केन्द्र न, वृहद्व्यासार्द्ध नअ = अ, लघुव्यासार्द्ध नक = क, व विन्दु की स्पर्शरेखा लवस और उस पर केन्द्र से पड़ा लम्ब नल = ल है तो न को मूलविन्दु मानने से इसका समीकरण $\frac{x^2}{क^2} + \frac{y^2}{अ^2} = 1$ यह होगा । यहाँ यदि

$\angle लनस = p_1$ तो ८४ प्रक्रम से $ल = यकोज्याप + रज्याप$ ।

$वल = च = यज्याप - रकोज्याप$ ।

$$\text{और } \frac{र}{क} = 1 - \frac{य}{अ} \cdot \frac{र}{क} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{रय}{अक} \text{ और } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{य}{र} \frac{क}{अ}$$

(१)



$$\text{और } ल = यकोज्याप + रज्याप = ज्यापर \left(कोस्पप \times \frac{य}{र} + 1 \right) \dots$$

$$= ज्यापर \left[\frac{अ}{क} कोस्पप + 1 \right] \dots \quad (१)$$

$$\text{परन्तु } \frac{यक}{रअ} = कोस्पप, \therefore \frac{यक^v}{रअ^v} = कोस्पप^v \mid \frac{य^2}{र} = \frac{अ^v कोस्पप^v}{क^v}$$

$$\text{और } \frac{y}{r} = \frac{a \cos^2 \phi}{k} \text{ । एक में जोड़ देने से}$$

$$\frac{k}{r} = \frac{a \cos^2 \phi + k}{k},$$

$$\text{मूल लेने से } \frac{k}{r} = \sqrt{1 + (1 - e^2)^{-1} \cos^2 \phi} \quad \dots (2)$$

$$\therefore r = \frac{k}{\sqrt{1 + (1 - e^2)^{-1} \cos^2 \phi}}$$

इस का उत्थापन (१) में देने से

$$l = \text{ज्यापर} \left[\frac{a}{k} \cos^2 \phi + 1 \right]$$

$$= \text{ज्याष} \frac{k}{\sqrt{1 + (1 - e^2)^{-1} \cos^2 \phi}} \{ (1 - e^2)^{-1} \cos^2 \phi + 1 \}$$

$$= \text{ज्याषक} \sqrt{1 + (1 - e^2)^{-1} \cos^2 \phi}$$

$$= a \sqrt{1 + e^2} \sqrt{\text{ज्याष} - e^2 \text{ज्याष} + \text{कोज्याष}} = a \sqrt{1 - e^2 \text{ज्याष}}$$

अब $a \sqrt{1 - e^2 \text{ज्याष}}$ इस ल पर से

$$\text{अव} + \text{वल} = a \int \sqrt{1 - e^2 \text{ज्याष}}$$

वक्र में व विन्दु ऐसा कल्पना करे जिसका भु = $\frac{1}{2} = a \text{ज्याष}$
और कोटि = $\frac{1}{2} = k \text{कोज्याष}$ तो ७७ वें प्रक्रम से

$$\text{कत} = a \int \sqrt{(1 - e^2 \text{ज्याष})}$$

इसलिये अब + वल = कत यह सिद्ध हुआ । (अ)

और व विन्दु का भुज यदि य तो ८४वें प्रक्रम से ल के रूप में य

$$= \text{ल कोज्याष} - \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} \text{ज्याष} = a \text{कोज्याष} \sqrt{1 - e^2 \text{ज्याष}} + \frac{a e^2 \text{ज्याष कोज्याष}}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ज्याष})}}$$

$$= \frac{a \text{कोज्याष}}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ज्याष})}} \quad \dots (क)$$

$$\text{(क्योंकि यहाँ वल} = \text{च.} = - \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \frac{a e^2 \text{ज्याष कोज्याष}}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ज्याष})}}]$$

वल के मान में (क) का उत्थापन देने से

वल = इ^२यज्या^२ष । इसी जगह यदि त के भुज का य^१ = अज्या^२ष
इस का उत्थापन दें तो

$$\text{वल} = \frac{\text{इ}^2 \text{य}^1}{\text{अ}}$$

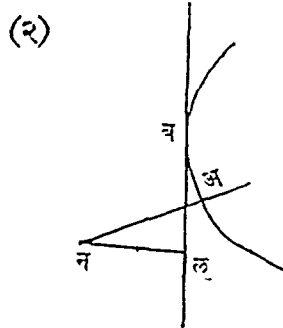
$$\text{कत—अव} = \text{वल} = \frac{\text{इ}^2 \text{य}^1}{\text{अ}}, \quad (\text{ग})$$

इस सिद्धान्त को फ्यागनानी (Fagnani) ने निकाला है इसलिये उन के आदरार्थ इसे फ्यागनानी का सिद्धान्त (Fagnani's Theorem) कहते हैं। वल का मान चलनकलन के ११वें अध्याय से भी इ^२यज्या^२ष यह निकाल सकते हो ।

$$(\text{क}) \text{ का वर्ग कर देने से } \frac{\text{अ}^० - \text{अ}^० \text{ज्या}^० \text{ष}^०}{१ - \text{इ}^० \text{ज्या}^० \text{ष}^०} = \frac{\text{अ}^२ - \text{य}^२}{१ - \frac{\text{इ}^२ \text{य}^१}{\text{अ}^२}} = \text{य}^०$$

छेदगम कर समशोधन से

$\text{इ}^२ \text{य}^१ \text{य}^२ - \text{अ}^० (\text{य}^० + \text{य}^१) + \text{अ}^० = ०$ इस से यह सिद्ध होता है कि य के स्थान मे य^१ का और य^१ के स्थान मे य का उत्थापन देने से भी पूर्ववत् फल उत्पन्न होगा। इस लिये कव—अत = $\frac{\text{इ}^२ \text{य}^१}{\text{अ}}$ यह भी होगा



मानो कि किसी अतिपरवलय का केन्द्र न, अ शिरःस्थान, वल व विन्दु पर स्पर्शरेखा और इस पर न से पड़ा लम्ब नल है ।

यहाँ पर भी यदि $\angle \text{अनल} = \text{प}$ और $\text{नल} = \text{ल}$ तो (१) उदाहरण के ऐसा सिद्ध कर सकते हो कि

$$\text{वल—अव} = \text{अ} \int \sqrt{(१ - \text{इ}^० \text{ज्या}^० \text{ष}^०)} \text{ ताव}$$

चलनकलन के १३वे अध्याय से अतिपरवलय के अनन्त दूर की स्पर्शरेखा अर्थात् असीमपथ निकालो तो उस समय $\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \pm \frac{अ}{क}$ इस लिये

उस स्थान मे प का मान अ, कहा तो कोस्पअ, = $\frac{क}{अ} = \sqrt{इ^2 - १}$ अतिपरवलय के लक्षण से उस समय अ स्थान से अनन्त दूर तक जो अतिपरवलय का चाप हो उसको न स्थान से असीमपथ जो हो उसके मान में घटा देने से शेष = अ $\int^अ \sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)}$ ताप यही होगा ।

यह शेष वही है जो ७८ प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हुआ है क्योंकि उस समय अइल यह असीमपथ ही का मान होगा ।

८४ प्रक्रम मे जो सिद्धान्त दिखलाया है अर्थात् चा = $\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \int$ लताप यह लेजेण्ड्र (Legendre) का निकाला हुआ है (See Traité des Fonctions Elliptiques)

८६ अति परवलय के चाप का मान जानने के लिये ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc.)

अतिपरवलय का कोई चाप कोई दो दीर्घवृत्तों के चाप से प्रकाशित कर सकते है ।

किसी त्रिभुज मे जहाँ आ, का, ग कोण और उन के संमुख भुज अ, क, ग हैं सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

$$ग = अकोज्याका + ककोज्याआ । \quad \dots \quad (१)$$

मानो कि शिरःस्थान का वहिर्गत कोण गा = आ + का है । और अ, क दो भुज तो स्थिर और बाकी सब अवयव त्रिभुज मे चल है

तो गा = आ + का और ताआ + ताका = तागा इससे (१) को गुण देने से गतागा = (अकोज्याका + ककोज्याआ) ताआ + (अकोज्याका + क कोज्याआ) ताका चल-जान करने से

$$\int गतागा = \int अकोज्याकाताआ + \int ककोज्याआताका + २अज्याका + स्थि वा सरलत्रिकोणमिति से$$

$$\int \sqrt{(अ^2 + क^2 + २अककोज्यागा)तागा} = \int \sqrt{(अ^2 - क^2 ज्या^2 आ)} ताआ$$

$$+ \int \sqrt{(क - अज्याका)ताका + २अज्याका + स्थि} \quad (२)$$

परन्तु $\sqrt{(अ + क + २अक कोज्यागा)}$

$$= \sqrt{\left\{ (अ-क)ज्या \frac{गा}{९} (अ+क) कोज्या \frac{गा}{९} \right\}}$$

इस लिये (२) का रूप

$$\int \sqrt{\left\{ (अ-क)ज्या \frac{गा}{९} + (अ+क) कोज्या \frac{गा}{९} \right\}}$$

$$= \int \sqrt{(अ - कज्याअ)ताआ + \int \sqrt{(क - अज्याका)ताका$$

+ २अज्याका + स्थि

$$\text{इस मे } \left[\frac{अ-क}{अ+क} \right] = १ - इज्या \frac{गा}{९} ज्याप ।$$

$$\frac{क}{अ} = इ_१ । ज्याआ = ज्याप_१ । \frac{अ}{क} = इ_२ । ज्याका = ज्याप_२ कल्पना कर$$

जहाँ अ > क तो

$$२(अ+क) \int \sqrt{(१-इज्याप)ताप}$$

$$= अ \int \sqrt{(१+इ_१ज्याप_१)ताप_१} + क \int \sqrt{(१-इ_२ज्याप_२)ताप_२}$$

+ २अज्याका + स्थि (३)

देखो यहाँ बायें पक्ष का चल उस दीर्घवृत्त के द्विगुण चाप का प्रमाण है जिसका वृहद्वास = २ (अ+क) और दहने पक्ष का प्रथम चल उस दीर्घवृत्त का एक चाप है जिसका वृहद्वासार्द्ध = अ । दोनों में क्रम से इ और इ_१ ऊपर की कल्पना से निष्पत्तिमान है । (७७ वाँ प्रक्रम देखो) इन दोनों के अन्तर तुल्य समीकरण से दहने पक्ष का चल होगा जो कि ८५ वे प्रक्रम के (२) उदाहरण से एक सरल रेखा और उस अतिपरवलय के चाप के अन्तर समान है जिस का लघुव्यास = २क और निष्पत्तिमान = $\frac{अ}{क}$ यह है ।

इस पर से किसी समय में ८५ वे प्रक्रम के (२) उदाहरण से चल का मान जान कर और २अज्याका के ज्ञान से दोनों दीर्घवृत्तों के चापों पर से अतिपरवलय का चाप जान सकते हैं ।

जब सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

$$\text{अज्याका} = कज्याआ । गा = आ + का$$

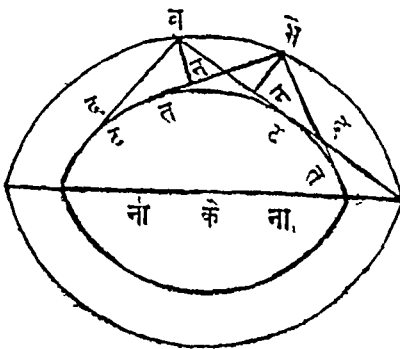
इसलिये आ ० से लेकर π तक जब पहुँचेगा तो गा भी ० से लेकर π तक पहुँचेगा । और अज्याका = कज्याआ के नियम से उस समय का ० लेकर अ_१ (जहाँ अ_१ = ज्या^{-१} क_१) तक पहुँच कर फिर घटते घटते ० तक आजायगा । ऐसी स्थिति में ककोज्याआ और ताका दोनों ऋण होंगे इसलिये ककोज्याआ ताका सर्वदा धन रहेगा तब सान्त-चलानयन से (३) का रूप

$$2(a+k) \int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \text{इज्या}^2 p)} \text{ ताप}$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \text{इज्या}^2 p_1)} \text{ ताप}_1 + 2k \int_0^{a_1} \sqrt{(1 - \text{इज्या}^2 p_2)} \text{ ताप}_2$$

ऐसा होगा । इस में दो का भाग दे कर समशोधन से यह दिखला सकते हो कि अतिपरबलय का अनन्त चाप और असीमपथ का अन्तर दो दीर्घवृत्तों के चतुर्थांश परिध्यन्तर तुल्य है । यह भी ल्याण्डेन (Landen) की कल्पना है ।

८७। डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Dr Graves) कल्पना करो कि एक नाभिक दो दीर्घवृत्त हैं । बड़े दीर्घवृत्त के परिधि में कोई व विन्दु लेकर छोटे दीर्घवृत्त पर वहाँ से वट, वट दो स्पर्शरेखा डाला तो वट और वट के योग में दीर्घवृत्त का टट चाप घटा दो तो शेष सर्वदा स्थिर रहेगा



व विन्दु के अत्यन्त निकट बड़े दीर्घवृत्त में एक भ विन्दु कल्पना करो और वहाँ से छोटे दीर्घवृत्त पर भत, भत दो स्पर्शरेखा खींचो इन दोनों का पहली स्पर्शरेखा में क्रम से द और दू विन्दु पर योग समझो । वट पर भन और भत पर वन लम्ब समझो ।

देखो दोनों दीर्घवृत्त एक नाभिक हैं इस लिये दीर्घवृत्त लक्षण से $\angle वमन = \angle भवन \therefore वन = भन$

और वट = टद + दन = टद + दत + तन = टत + तन = टत + तभ—भन ।

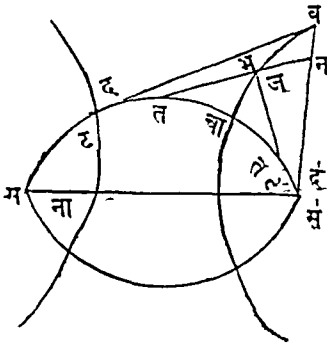
इसी तरह वट = वन + तभ—टत ।

दोनों के योग से वट + वट = भत + भत + टत—टत ।

दोनों में टट चाप को घटा देने से वट + वट' - टट' = भत + भत' - तत'

अर्थात् व विन्दु यदि भ पर हो तौ भी शेष वही रहता है। इसी प्रकार थोड़ा थोड़ा विन्दुओ को हटा हटा सर्वत्र दिखला सकते हो कि शेष एक ही रहेगा।

८८। इसी तरह यदि एक अतिपरवलय और एक दीर्घवृत्त दोनो एक नाभिक हों तो अतिपरवलय के किसी विन्दु से जो दो स्पर्शरेखा दीर्घवृत्त में होंगी उनका अन्तर स्पर्शरेखान्तर्गत अतिपरवलय और दीर्घवृत्त का जो सम्पात विन्दु है वहाँ से दोनो स्पर्श विन्दु तक जो दीर्घवृत्त के दो चाप होंगे उनके अन्तर तुल्य होता है। क्योंकि यहाँ भी जो ऊपर की क्रिया करो तो



इसी तरह वट' = टट' + नट' + वन' = टट' + तट'
+ भत' + वन' = टट' + भत' + वन'

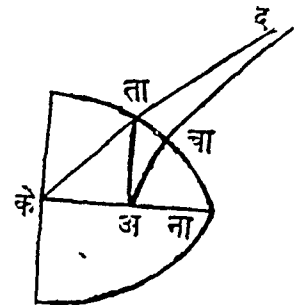
दोनों का अन्तर करने से (वट - वट') = टट - टट' + (भत - भत') और टचा - टचा' = अ = टत + तचा - (टत' + तचा')

इन दोनो का अन्तर करने से (वट - वट') - अ = (भत - भत') - (तचा - तचा')

इसी प्रकार भ को बदलने से दो दो पक्ष समान होते जाँयेंगे अन्त में जब भ, चा के पास आवेगा तब स्पर्शरेखान्तर और चापान्तर दोनो शून्य हो जाँयेंगे इसलिये (वट - वट') - (टचा - टचा') = 0 अर्थात् वट - वट' = टचा - टचा'।

यदि दीर्घवृत्त के परिधि ही में कोई विन्दु लेकर अतिपरवलय ही पर दो स्पर्शरेखा डाली जाय तौ भी यहाँ पर यही सिद्धान्त ठीक ठहरेगा यदि दोनो स्पर्शरेखाये अतिपरवलय के एक ही शाखा पर हो।

इस पर से असीमपथ और अतिपरवलय का अनन्त चाप इनका अन्तर सरलरेखा और अतिपरवलय के चाप रूप में प्रकाश कर सकते हैं। जैसे कल्पना करो कि अचा अतिपरवलय का असीमपथ केतद है और अ विन्दु की स्पर्शरेखा अत है त विन्दु में लगाकर अति परवलय के साथ एक एकनाभिक



दीर्घवृत्त बनाया तो ऊपर के सिद्धान्त से अनन्त दूर पर तद को स्पर्शरेखा समझ लेने से तद—अत = चादचाप—अचा

केत + अचा इसको जोड़ देने से

तद + केत—अत + अचा = चाद + अचा—अचा + केत

अर्थात् केद—अत + अचा = अद—अचा + केत

समशोधन से केद—अद = अत + केत—२अचा

इसलिये केत और अत के योग में दूने अचा को घटा देने से शेष असीम-पथ और अतिपरवलय सम्बन्धि अनन्त चाप का अन्तर होता है यह सिद्ध हुआ ।

८९। डिकार्टेस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन ।

इसकी दोनो नाभी ना, ना है
नाभी से वक्र के किसी बिन्दु व
तक जो रेखा है उन में त·श्रु
+ द·श्रु = न·ग यह नियम है जहाँ
त, द और न स्थिराङ्क है, ना ना = ग,
नाव = श्रु । नाव = श्रु यहाँ यदि
∠ वना ना = प तो सरलत्रिकोण-
मिति से

$$\begin{aligned} \text{श्रु} &= \text{अ}^2 + \text{ग}^2 - २\text{श्रुगकोज्याप} \\ &= \left[\frac{\text{न} \cdot \text{ग} - \text{श्रु} \cdot \text{त}}{\text{द}} \right]^2 \\ &= \left[\frac{\text{न}^2 \text{ग}^2 - २\text{तनगश्रु} + \text{श्रु}^2 \text{त}^2}{\text{द}^2} \right] \end{aligned}$$

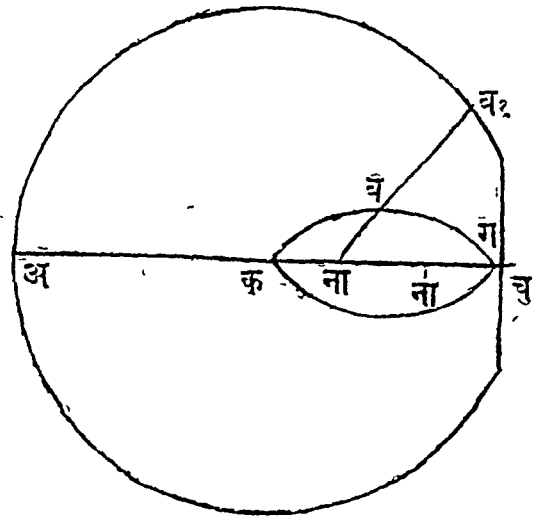
छेदगम और समशोधन से

$$\text{श्रु}^2 (\text{द}^2 - \text{त}^2) - २\text{श्रुग} (\text{द}^2 \text{कोज्याप} - \text{तन}) - \text{ग}^2 (\text{न}^2 - \text{द}^2) = 0$$

$$\text{वा } \text{श्रु}^2 - \frac{२\text{श्रुग} (\text{द}^2 \text{कोज्याप} - \text{तन})}{\text{द}^2 - \text{त}^2} - \frac{\text{ग}^2 (\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{द}^2 - \text{त}^2}$$

$$\text{अथवा } \text{अ}^2 - २\text{श्रुग} \frac{\text{तन} - \text{द}^2 \text{कोज्याप}}{\text{त}^2 - \text{द}^2} + \frac{\text{ग}^2 (\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = 0$$

इस में यदि ग $\frac{(\text{तन} - \text{द}^2 \text{कोज्याप})}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = \text{पर}$ । और



$$\frac{(गंन-द)}{त-द} = आ \quad तो$$

$$श्रु - २प, श्रु + आ = ० \quad (१)$$

इस पर से श्रु = $p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - आ}$ वा नाव, = $v_1 + \sqrt{p_1^2 - आ}$ ।

नाव = $p_1 - \sqrt{p_1^2 - आ}$ इस से सिद्ध होता है कि यदि त, द, न सम्भाव्य और अतुल्य संख्या हो तो

इस वक्र में दो आवल होंगे एक बाहर में और दूसरा भीतर में रहेंगा जैसा कि इस क्षेत्र में देख पड़ता है ।

अब यहाँ (१) का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताश्रु}{ताप} \cdot \frac{१}{श्रु} = \frac{प_1}{\sqrt{प_1^2 - आ}} \quad जहाँ \quad प_1 = \frac{ताप}{ताप}$$

इस पर से

$$\frac{ताचा}{ताप} \cdot \frac{१}{श्रु} = \frac{\sqrt{प_1^2 + प_2^2 - आ}}{\sqrt{(प_1^2 - आ)}}$$

$$वा चा = \int \frac{प_1 \sqrt{(प_1^2 + प_2^2 - आ)ताप}}{\sqrt{(प_1^2 - आ)}} \pm \int \sqrt{(प_1^2 + प_2^2 - आ)ताप}$$

यहाँ धन चिह्न बाहरी आवल के लिये और ऋण चिह्न भीतरी के लिये है ।

इस लिये दोनों के सजातीय चापो का अन्तर = $२ \int \sqrt{(अं + प_1^2 - आ)ताप}$

$$= २ \int \sqrt{(अ + २अक कोज्याप + क^2 - आ)ताप} \quad (२)$$

$$यदि \quad प_1 = \frac{ग(तन-द \text{ कोज्याप})}{त-द} = अ + क \text{ कोज्याप} ।$$

देखो (२) का रूप ८६ प्रक्रम से एक दीर्घवृत्त के चाप समान हो सकता है इस लिये दोनों आवलों के सजातीय चापो का अन्तर एक दीर्घवृत्त के चाप रूप में प्रकाशित कर सकते हैं । इस सिद्धान्त को रावर्ट्स ने निकाला है (M. W. Roberts) त, द, और न, के भिन्न भिन्न मानों पर से यही आवल, वृत्त, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय इत्यादि का रूप हो जायगा इस लिये आवल को इन सब वक्रों का उत्पादक कह सकते हैं ।

९०। यदि किसी वक्रक्षेत्र के अनवलत्त का समीकरण मालूम हो तो चलन-कलन के १७६वें प्रक्रम के (३) समीकरण से चलजान के बिना ही वक्र के चाप का

ज्ञान हो सकता है क्योंकि अनवल्लूत समीकरण पर से चा^१ ± वि^१ = ट इस में जो वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध वि है उस का मान अनवल्लूत के भुजकोटि रूप में ला सकते हैं और ये भुजकोटि अवल्लूत के भुजकोटि रूप में आ सकते हैं इस प्रकार अनवल्लूत के समीकरण पर से वि का ज्ञान हो जायगा फिर स्थिर ग के वश से चाप का मान भी विदिति हो जायगा ।

जैसे यदि उस परवलय को अनवल्लूत कल्पना करो जिसका $r^2 = ४अय$ यह समीकरण है तो चलनकलन के १७८ प्रक्रम के (१) उदाहरण में अवल्लूत का समीकरण $२७ अ र^१ = ४(य-२अ)^३$ और $वि = २अ \left[\frac{य+अ}{३अ} \right]^{\frac{३}{२}}$

यह होगा इस लिये चा^१ ± २अ $\left[\frac{य+अ}{३अ} \right]^{\frac{३}{२}} = ट$ । यहाँ चाप की गणना यदि उस विन्दु से करे जिस का भु = य^१ = २अ अर्थात् उस विन्दु से जो कि परवलय के शिरोविन्दु के सजातीय है तो क्षेत्र के देखने से विदित होता है कि वहाँ चा^१ = ० इस लिये

ट = -२अ ऋण चिह्न ग्रहण करने से क्योंकि यहाँ ज्यों ज्यों य^१ बढ़ेगा त्यों त्यों चा^१ भी बढ़ेगा इसलिये चा^१ = २अ $\left[\frac{य+अ}{३अ} \right]^{\frac{३}{२}} - २अ$

यदि यहाँ वक्र के $२७अ र^१ = ४(य-२अ)^३$ इस समीकरण पर से $\frac{ताचा}{ताय}$ का मान जान कर चलज्ञान से चाप का आनयन करो तो भी ऊपर आया हुआ मान आजायगा ।

९१। वक्र के भुज कोटि के रूप में यदि चाप का मान विदित हो तो उस के अनवल्लूत का समीकरण जान सकते हैं ।

चलनकलन के १७६ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{ताय^१}{ताय-य} = \pm \frac{१}{वि} \cdot \frac{ताचा^१}{ताय^१} \text{ जहाँ य अनवल्लूत का भुज है}$$

$$\text{समशोधनादि से य = य^१ ∓ वि} \frac{ताय^१}{ताचा^१} \quad \dots \quad (१)$$

$$\text{इसी तरह } र = र^१ ∓ वि} \frac{तार^१}{ताचा^१} \quad \dots \quad (२)$$

यदि चा, य और र के रूप में विदित हो और वक्र का समीकरण जानने हो तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{\text{चा}}{\text{य}}$ और $\frac{\text{तार}}{\text{तार}} = \frac{\text{चा}}{\text{य}}$ जान सकते हैं और चि, चा \pm वि = र इस समीकरण

समीकरण पर से जान जायेंगे फिर इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से अनवलृत का भुज कोटि जान जायेंगे ।

जैसे किसी कातन्वली (The Catenary) का समीकरण

$$\frac{\text{र}}{\text{य}} = \frac{\text{ग}}{\text{ड}} \left(\frac{\text{य}}{\text{ग}} + \frac{\text{य}}{\text{ग}} \right)$$

और $\frac{\text{चा}}{\text{य}} = \frac{\text{ग}}{\text{ड}} \left(\frac{\text{य}}{\text{ग}} - \frac{\text{य}}{\text{ग}} \right)$ यह है ।

यहाँ मान लो कि चाप की गणना उस विन्दु से है जिस का भु = य = ० और को = र = ग अब इन पर से कातन्वली के अनवलृत (Involute) का समीकरण जान जायेंगे जिस की प्रवृत्ति वक्र के निर्दिष्ट विन्दु (जिस के भुज कोटि का मान अभी मान लिया है) के वश से होगी ।

अब ऊपर के र और चा के मान से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ग}}{\text{ड}} \left(\frac{\text{य}}{\text{ग}} - \frac{\text{य}}{\text{ग}} \right) = \frac{\text{चा}}{\text{ग}}$$

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ग}}{\text{ड}} \left(\frac{\text{य}}{\text{ग}} + \frac{\text{य}}{\text{ग}} \right) = \frac{\text{र}}{\text{ग}}$$

भाग देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{चा}}{\text{र}}, \text{ और } \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ग}}{\text{र}}$$

और यहाँ पेसी ही कल्पना किया है कि चा = ० तो वि = ० इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा । तब चा = वि ।

इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से

$$\text{य} = \text{य} - \frac{\text{चा ग}}{\text{र}}, \text{ र} = \text{र} - \frac{\text{चा}^2}{\text{र}} = \frac{\text{र}^2 - \text{चा}^2}{\text{र}} = \frac{\text{ग}^2}{\text{र}}$$

$$\text{और चा} = \sqrt{\text{र}^2 - \text{ग}^2} = \sqrt{\left[\frac{\text{ग}^2}{\text{र}} - \text{ग}^2 \right]} = \frac{\text{ग}}{\text{र}} \sqrt{\text{ग} - \text{र}}$$

इस लिये $\frac{चा}{र} = \frac{\sqrt{(ग^2 - र^2)}}{ग}$, इस तरह से $य = य + \sqrt{(ग^2 - र^2)}$ इस का

उत्थापन वक्र के समीकरण में देने से

$$र = \frac{ग}{२} \left(इ \frac{य}{ग} + इ \frac{य}{ग} \right)$$

$$इस लिये $\sqrt{(र^2 - ग^2)} = \frac{ग}{२} \left(इ \frac{य}{ग} - इ \frac{य}{ग} \right)$$$

$$जोड़ देने से $र + \sqrt{(र^2 - ग^2)} = ग इ \frac{य}{ग}$$$

$$लघुरिक्त लेने से $य = ग ला \frac{र + \sqrt{(र^2 - ग^2)}}{ग}$$$

$$इसी तरह $य + \sqrt{(ग^2 - र^2)} = ग ला \frac{ग + \sqrt{(ग^2 - र^2)}}{र}$$$

इस वक्र को अङ्गरेजी में (Tractory) कहते हैं हमने इस का नाम त्रीतर रखा है । इस में यदि $ग > र$ तो मूल का मान द्विविध आवेगा प्रत्येक $य$ के मान में । ये दोनों मान संख्या में तुल्य परन्तु भिन्न चिह्न के होंगे । चलनकलन से यदि इस की आकृति बनाओ तो जान पड़ेगा कि जहाँ $य = ०$ और $र = ग$ वहाँ वक्र को एक स्कन्ध होगा जिस में $य$ अक्ष असीमपथ होगा ।

१२ । यदि अवलूत के चाप का मान अक्षीय भुजयुग्म का फल हो तो ऊपर की युक्ति से अनवलूत का समीकरण भी अक्षीय भुजयुग्म सम्बन्धी जान सकते हो ।

चलनकलन के १७७ प्रक्रम के (१) और (२) समीकरण से

$$श्रु^१ = श्रु^० + वि^० - २ ल वि \quad \dots \quad (१)$$

$$ल^१ = श्रु^० - ल^० \quad \dots \quad (२)$$

यहाँ भी पहले के ऐसा स्वरविशिष्टवर्ण ज्ञात वक्र के हैं अर्थात् अवलूत के और केवल वर्ण अनवलूत के हैं । अवलूत तो ज्ञात ही है और इसी लिये $ल^१$, और $श्रु^१$ का भी सम्बन्ध विदित ही होगा और $चा = वि = ट$ इसलिये यदि $चा$ का मान $ल^१$ $श्रु^१$ के रूप में आ सके तो इस के वश से (१) और (२) में $श्रु^१$, $ल^१$ को उड़ा सकोगे और एक समीकरण $ल$ और $श्र$ में सम्बन्ध दिखाने वाला अनवलूत का ज्ञात हो जायगा ।

जैसे समाश्रिक सर्पिल (Equiangular Sprial) में (चलनकलन का २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो) यदि $भ = स्प^{-१}$ क तो

$$ल = श्रु' ज्याभ$$

यहाँ यदि अनवलूत की प्रवृत्ति सर्पिल के ध्रुवविन्दु ही से माने और उसी विन्दु से यदि चा के गणना का भी आरम्भ करे तो $वि = चा = श्रु' छेभ$ (८१वाँ प्रक्रम देखो) इस का उत्थापन (१) में देने से

$$\begin{aligned} श्रु' &= श्रु' + श्रु'^२ छे'भ - २श्रु' ल छेभ \\ &= श्रु' छे'भ + श्रु'^३ ज्या'भ + ल' - २श्रु' ल छेभ । (२) से \end{aligned}$$

इस वर्गसमीकरण पर से

$$ल - श्रु' ल छेभ = \pm श्रु' कोज्याभ$$

यदि यहाँ धन चिह्न ग्रहण करें तो $ल = \frac{श्रु'(१ + कोज्या'भ)}{कोज्याभ}$ और (२) से

$$\begin{aligned} श्रु' &= \frac{१ + ३कोज्या'भ}{कोज्या'भ} श्रु' \text{ इस पर से } श्रु' \frac{ताश्रु}{ताल} = वि \\ &= \frac{१ + ३कोज्या'भ}{कोज्याभ(१ + कोज्या'भ)} श्रु' \end{aligned}$$

परन्तु वक्र के समीकरण से $वि = श्रु' छेभ$ इस लिये धन चिह्न ग्रहण करने से मान असम्भव आता है। इस लिये ऋण चिह्न लेकर क्रिया करने से

$$ल = \frac{श्रु' ज्या'भ}{कोज्याभ} \text{ और तब (२) से } श्रु' = \frac{श्रु'^३ ज्या'भ}{कोज्या'भ} \therefore श्रु' = \frac{श्रु' कोज्याभ}{ज्याभ}$$

इस का उत्थापन ल में देने से $ल = श्रु' ज्याभ$ । देखो यह अनवलूत का समीकरण ठीक अवलूत ही के समीकरण के ऐसा है।

९३। यदि वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतविन्दु की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण जो हो उस के फल रूप में चाप का मान जानना हो तो भी $\frac{तार}{ताय}$ का मान उस स्पर्शरेखा के फल रूप में जान कर चाप का मान जान सकते हो।

जैसे मानो कि किसी वक्र का समीकरण $र = फ(य)$ मूल विन्दु वक्र की के चाप का कोई विन्दु है और उसी विन्दु पर $र$ अक्ष स्पर्शरेखा भी है तो वक्र के समीकरण से $\frac{तार}{ताय} = फ'(य) = स्पव = \frac{?}{स्पव}$ (चलनकलन

के ११६ वें प्रक्रम से) जहाँ v_1 र अक्ष और वक्र की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है ।

अब ऊपर के समीकरण से $स्पव_1$ के फल रूप में y का मान जान जावोगे मानो कि $y = फा (स्पव_1)$ तो

$$\frac{ताय}{ताव_1} = फा (स्पव_1) छेँव_1$$

$$\text{और } \frac{ताचा}{ताय} = कोछेँव_1,$$

$$\text{इस लिये } \frac{ताचा}{ताव_1} = फा (स्पव_1) छेँव_1 कोछेँव_1,$$

इस समीकरण पर से v_1 के फल रूप में चा का मान जान सकते हो यदि वक्र के एक बिन्दु पर y अक्ष स्पर्शरेखा हो और उसी नियत बिन्दु से चाप का मान जानना हो तो ऊपर ही की युक्ति से समीकरण बना सकते हो केवल v_1 के स्थान में v को लेना होगा ।

जैसे चक्रालद (Cycloid) में (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (११) वक्र देखो)

$$\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\frac{२अ-य}{य}} = \frac{१}{स्पव_1} \quad .1$$

$$\text{इस लिये } \frac{२अ}{य} = \frac{१}{ज्या^२ v_1} \text{ और } य = २अज्या^२ v_1$$

$$\frac{ताय}{ताव_1} = ४अज्याव_1 कोज्याव_1,$$

$$\frac{ताचा}{ताव_1} = कोछेँव_1, \quad \frac{ताय}{ताव_1} = ४अकोज्याव_1,$$

इस लिये चा = ४अ ज्याव₁ + स्थि

यदि चाप की गणना उस बिन्दु से करें जहाँ र अक्ष स्पर्शरेखा है तो स्थिराङ्क शून्य होगा ।

इस प्रकार से वक्र के दो स्पर्शरेखाओं से उत्पन्न कोण और वक्र के चाप के बीच सम्बन्ध दिखाने वाले समीकरण को वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण कहते हैं ।

९४। यदि वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण दिया हो तो उस पर से साधारण वक्र का समीकरण विपरीत क्रिया से जान सकते हैं ।

क्योंकि चापस्पर्शिक समीकरण पर से जानते हैं कि

$$\frac{\text{ताव}}{\text{ताचा}} = \text{ज्याव}_r$$

इसलिये $y = \int \text{ज्याव}_r \text{ताचा}$

और इसी तरह $r = \int \text{कोज्याव}_r \text{ताचा}$

चापस्पर्शिक समीकरण से जानते हैं कि चा कोई v_r का फल है इसलिये y , और r का मान ऊपर के चलज्ञान से आजायगा ।

जैसे (१) चक्रालद (Cycloid) में जानते हैं कि चापस्पर्शिक समीकरण चा = $४अज्याव_r$ यह है

इसलिये ताचा = $४अकोज्याव_r$ तव,

इस का उत्थापन y के मान में देने से

$y = \int \text{ज्याव}_r \text{ताचा} = ४अ \int \text{ज्याव}_r \text{कोज्याव}_r \text{ताव}_r$

= स्थि—अकोज्याव, इसी तरह, $r = \int \text{कोज्याव}_r \text{ताचा}$

= $४अ \int \text{कोज्याव}_r \text{ताव}_r = \text{स्थि}_r + २अव_r + अज्या२व_r$

इस लिये यहाँ दोनो समीकरणों पर से y वा r के फल रूप में v_r , ज्याव_r, कोज्याव_r का मान ले आने से y और r के सम्बन्ध पर से वक्र का समीकरण आजायगा ।

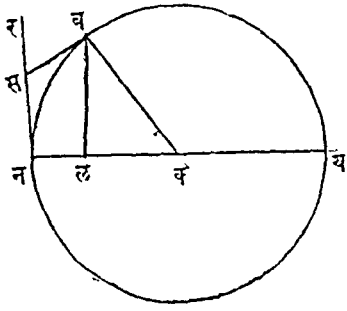
यदि दोनो अक्षों का योगविन्दु वक्र का शिरः स्थान माने तो स्थि = अ और स्थि_r = ०

(२) इसी तरह वृत्त का चापस्पर्शिक समीकरण चा = $अ \cdot v_r$ यह है इस पर से ताचा = अताव_r,

और $y = \int \text{ज्याव}_r \text{ताचा} = अ \int \text{ज्याव}_r \text{ताव}_r = - अकोज्याव_r + \text{स्थि}$

इसी तरह $r = \int \text{कोज्याव}_r \text{ताचा} = अ \int \text{कोज्याव}_r \text{ताव}_r$,

= अज्याव_r + स्थि_r यदि नियत स्पर्शरेखा और व्यासार्द्ध के योगविन्दु ही को मूलस्थान माने तो स्थि = अ और स्थि_r = ० इन का उत्थापन देकर y और r के सम्बन्ध से समीकरण $r^2 = अ^2 - (अ - y)^2$ ।



जैसे यदि न विन्दुगत स्पर्शरेखा नस को नियत स्पर्शरेखा मानो और किसी व विन्दु की स्पर्शरेखा वस तो $\angle वसर = व$ और वृत्त के धर्म से $व_r = \angle वकेन$ । के को केन्द्र समझो इस लिये $नव = चा = अ व$, (जहाँ $अ = केन = वृत्तव्यासार्द्ध$) । इस लिये यदि नसर को $र$,

अक्ष और नकेय को $य$ अक्ष । और न को मूलविन्दु मानो तो व विन्दु की कोटि $= वल = र = \sqrt{अ^2 - (अ - य)^2}$ यही समीकरण पहले भी सिद्ध हुआ था ।

(३) इसी तरह चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (१३) वक्र अपचक्रालद (Epicycloid) के लक्षण से यदि अ को नियतविन्दु मानो उसी स्पर्शरेखा य अक्ष ही है इस लिये इस अक्ष को नियत स्पर्शरेखा मान लेने से चाप-स्पर्शिक समीकरण से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{कोज्या}\phi - \text{कोज्या}\frac{अ+क}{क}\phi}{\text{ज्या}\frac{अ+क}{क}\phi - \text{ज्या}\phi} = \text{स्प}व_r$$

$$= \frac{२ज्या\frac{अ+२क}{२क}\phi \cdot \text{ज्या}\frac{अ}{२क}\phi}{२ज्या\frac{अ}{२क}\phi \cdot \text{कोज्या}\frac{अ+२क}{२क}\phi} = \text{स्प}\frac{अ+२क}{२क}\phi$$

इस लिये $व_r = \frac{अ+२क}{२क}\phi$

और ८२ प्रक्रम से

$$\text{चा} = - \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ} \sqrt{ग^2 - \text{श्रु}^2} + \text{स्थि}$$

परन्तु वक्र के लक्षण से

$$य^2 = (अ + क)^2 \text{कोज्या}^2\phi - २(अ + क) क \text{कोज्या}\phi \text{कोज्या}\frac{अ+क}{क}\phi + क^2 \text{कोज्या}^2\frac{अ+क}{क}\phi$$

$$र^2 = (अ + क)^2 \text{ज्या}^2\phi - २(अ + क) क \text{ज्या}\phi \text{ज्या}\frac{अ+क}{क}\phi + क^2 \text{ज्या}^2\frac{अ+क}{क}\phi$$

$$\text{श्रु}^2 = य^2 + र^2 = (अ + क)^2$$

$$- २क (अ + क) \left\{ \text{ज्या}\frac{अ+क}{क}\phi \text{ज्या}\phi + \text{कोज्या}\frac{अ+क}{क}\phi \text{कोज्या}\phi \right\} + क^2$$

$$ग^2 = (अ + २क)^2 = अ^2 + ४अक + ४क^2$$

$$\begin{aligned} g^2 - \text{श्रु}^2 &= २अक + २क^२ + २क (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{अ}{क} - प \\ &= २क (अ + क) \left\{ १ + \text{कोज्या } \frac{अ}{क} - प \right\} = ४क(अ + क) \text{ कोज्या}^२ \frac{अ}{क} - प \end{aligned}$$

$$\sqrt{g^2 - \text{श्रु}^2} = \sqrt{\left\{ ४क (अ + क) \right\} \text{ कोज्या } \frac{अ}{क} - प}$$

$$\text{और } \sqrt{g^2 - अ^२} = \sqrt{४क (अ + क)}$$

चाप में इन का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} चा &= -४क (अ + क) \text{ कोज्या } \frac{अ}{२क} - प + स्थि \\ &= \frac{४क(अ+क)}{अ} \left(१ - \text{कोज्या } \frac{अ}{२क} - प \right) \end{aligned}$$

यदि चाप की गणना वहाँ से करें जहाँ $प = ०$

$$\text{परन्तु } प = \frac{२कव_१}{अ + २क} \text{ इस लिये चा} = \frac{४क(अ + क)}{अ} \left[१ - \text{कोज्या } \frac{अव_१}{अ + २क} \right]$$

$$\text{यदि यहाँ } व_१ = \frac{\pi (अ + २क)}{२अ} + व_२$$

$$\text{तो } \frac{अव_१}{अ + २क} = \frac{\pi}{२} + \frac{अव_२}{अ + २क} \cdot \text{कोज्या } \frac{अव_१}{अ + २क} = -\text{ज्या } \frac{अव_१}{अ + २क}$$

$$\text{इस लिये यदि } \frac{४क(अ + क)}{अ} \text{ ज्या } \frac{अव_१}{अ + २क} = चा \text{ तो}$$

$$चा = \frac{४क(अ+क)}{अ} + चा$$

यहाँ स्पष्ट है कि वक्र के उच्च स्थान से यदि चा की गणना करे तो

$$चा = \frac{४क(अ + क)}{अ} \text{ ज्या } \frac{अव_१}{अ + २क}$$

यहाँ स्वर चिह्न का कुछ भी प्रयोजन नहीं यदि उच्चगत स्पर्शरेखा को नियत स्पर्शरेखा मान ले क्योंकि उस से और इष्टस्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण तब व, यही होगा

इसलिये उच्चस्थान से गणना करने में

$$चा = \frac{४क(अ + क)}{अ} \text{ ज्या } \frac{अव_१}{अ + २क} ।$$

इसी तरह अतिचक्रालद (Hypocycloid) में नीचस्थान से यदि चाप गणना करे तो चा = $\frac{४क(अ-क)}{अ} \text{ ज्या } \frac{अव_१}{अ-२क}$ यह समीकरण होगा ।

दोनों समीकरणों का रूप चा = τ ज्या n व, ऐसा कह सकते हैं

प्रथम में $\tau = \frac{४(अ+क)}{अ}$ $n = \frac{अ}{अ+२क} < १$ और दूसरे में

$$ट = \frac{५(अ-क)}{अ}, न = \frac{अ}{अ-क} \quad 7 \quad १ \text{ इतना ही विशेष है ।}$$

(४) कातन्वली का समीकरण यदि

$$र + ग = \frac{ग}{३} \left(३ \frac{य}{ग} + ३ \frac{य}{ग} \right) \text{ ऐसा माने जिस में र अक्ष और वक्र के योग}$$

विन्दु को मूल मानें तो

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताव}} = \frac{१}{३} \left[३ \frac{य}{ग} - ३ \frac{य}{ग} \right] \quad \text{चा} = \frac{ग}{३} \left[३ \frac{य}{ग} - ३ \frac{य}{ग} \right]$$

इस लिये मूलविन्दुगत स्पर्शरेखा से इष्टस्पर्शरेखा जो कोण बनावे उसे व, कहो तो चा = ग·स्पव, ऐसा होगा । इस प्रकार से कातन्वली (Catenary) का चापस्पर्शिक समीकरण उत्पन्न हो गया ।

९५। यदि चापस्पर्शिक समीकरण से वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध ले आवें तो चलनकलन के १७१ वें प्रक्रम से

$$\text{वि} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}} \text{ (जहाँ व = व}_1\text{) ऐसा होगा ।}$$

जैसे लाघुरिक्थिक सर्पिल में ८१ प्रक्रम से

$$\left. \begin{aligned} \text{चा} &= \text{श्रु} \sqrt{\text{क}^2 + १} \\ &= \text{श्रु} \text{ छेभ} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{यदि भ्रुव स्थान से चाप गणना करे} \\ &\text{और चलनकलन के १३१वें प्रक्रम से} \end{aligned}$$

$$\text{ल} = \text{श्रु} \cdot \text{ज्याभ} \quad \therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताश्रु}} = \text{ज्याभ} \text{ इसलिये चलनकलन के १६८ वें प्रक्रम से}$$

$$\text{वि} = \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}} = \text{श्रु} \frac{१}{\text{ज्याभ}}$$

$$\text{वि का भाग चा में देने से } \frac{\text{चा}}{\text{वि}} = \text{ज्याभ} \cdot \text{छेभ} = \text{स्थि} \text{ इस से सिद्ध होता}$$

है कि लाघुरिक्थिक सर्पिल में चाप और वक्रजातीय वृत्त के व्यासार्द्ध में स्थिर सम्बन्ध है । मानो कि वि = चा·त जहाँ त कोई स्थिराङ्क है तो

$$\text{वि} = \text{चा} \cdot \text{त} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}} \text{ इसलिये ताव त} = \frac{\text{ताचा}}{\text{चा}}$$

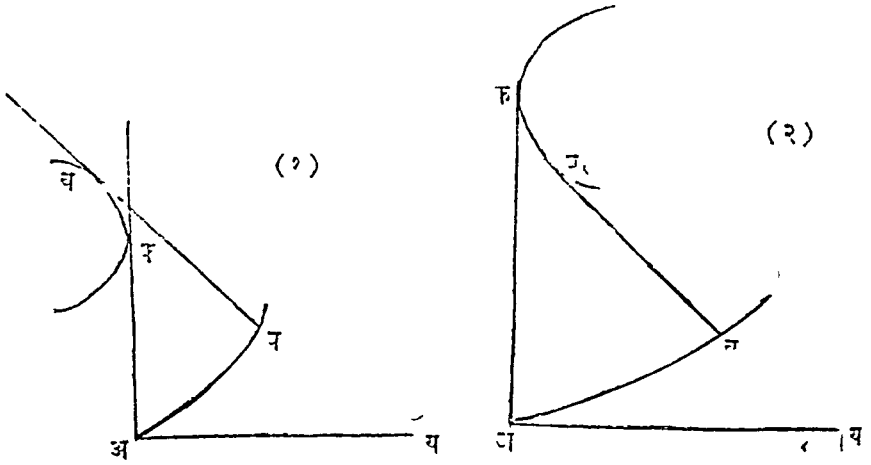
$$\text{चलानयन से त व} + \text{स्थि} = \text{लाचा}$$

इसलिये चा = अ इत व जहाँ अ कोई स्थिराङ्क है

$$\text{यदि चा} = \text{चा} + \text{अ} \quad \text{तो चा} = \text{अ} \left(\frac{\text{इत} \cdot \text{व}}{\text{चा}} - १ \right)$$

अब इस में चा वहाँ से परिगणित है जहाँ व = ०

९६। यदि वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अवलूत का भी समीकरण जान सकते हैं



कल्पना करो कि अब एक वक्र है जिस के अवलूत की आकृति कव है। मान लो कि अब चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत बिन्दु से व की ओर है।

और कव, चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत बिन्दु से व_१ की ओर है तो यदि अ बिन्दु पर अब वक्र की जो स्पर्शरेखा अय है उसी को नियत स्पर्शरेखा मान अब का चापस्पर्शिक समीकरण बनावे और क बिन्दु से इस पर जो कअ लम्ब डाला गया इस को नियत स्पर्शरेखा मान कर यदि कव, का चापस्पर्शिक समीकरण बनावे तो अवलूत और अनवलूत के लक्षण से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणों में व, का एक ही मान रहेगा।

$$\text{इस लिये (१) क्षेत्र में } चा = वि - स्थि = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव,}} - स्थि$$

$$\text{और (२) क्षेत्र में } चा = स्थि - वि = स्थि - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव,}}$$

इस लिये यदि चा का मान व_१ के फलरूप में हो तो चा का मान भी व_१ के कोई फलरूप में जान सकते हैं जहाँ जब चा = ० तब वक्रजातीय वृत्त का जो व्यासार्द्ध होगा वही स्थि का मान है।

जैसे चक्रालद में जानते हैं कि चा = ४अज्याप

$$\text{इस लिये } चा = स्थि - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव,}} = स्थि - ४अकोज्याप ।$$

इस में यदि $v_1 = \dot{v}_1 + \frac{v_1}{r}$ और $\dot{c}_1 = \dot{\theta} + \text{स्थि}$ ऐसा कल्पना करे तो $\dot{\theta} = \dot{\theta} \text{अव्याव}$, अर्थात् यह भी एक चक्रालद ही हुआ ।

इसलिये चक्रालद का अवलूत एक चक्रालद ही है ।

इसी प्रकार इस प्रक्रम की विपरीत क्रिया से यदि किसी वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अनवलूत का चापस्पर्शिक समीकरण जान सकते हैं । क्योंकि ऊपर के प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1} = \text{स्थि} \pm \dot{c}_1$$

$$\text{इसलिये } \dot{c}_1 = \int (\text{स्थि} \pm \dot{c}_1) \text{ताव}_1$$

इसलिये यदि \dot{c}_1 का मान v_1 के फल रूप में हो तो \dot{c}_1 का मान भी v_1 के कोई फल रूप में ला सकते हैं ।

जैसे वृत्त में जानते हैं कि $\dot{c}_1 = \text{अ} v_1$, इसलिये

$$\dot{c}_1 = \int (\text{स्थि} \pm \text{अ} v_1) \text{ताव}_1 = \text{स्थि} v_1 \pm \frac{\text{अ} v_1^2}{2} + \text{स्थि}_1$$

यदि \dot{c}_1 की प्रवृत्ति वहाँ से हो जहाँ $v_1 = 0$ तो $\text{स्थि}_1 = 0$ । और अवलूत और अनवलूत के योग बिन्दु ही से यदि \dot{c}_1 की गणना करे तो $\text{स्थि} = 0$ ऐसी स्थिति में

$$\dot{c}_1 = \frac{\text{अ} v_1^2}{2} \text{ । (चलनकलन के १७८ वे प्रक्रम का (५) उदाहरण देखो}$$

और फ के स्थान में v_1 को मान लो)

ऊपर कहे हुए प्रक्रम की युक्ति से अवलूत का अवलूत उस का अवलूत यो अवलूतों की परम्परा वा अनवलूत का अनवलूत उसका अनवलूत यों अनवलूतों की परम्परा सहज में जान सकते हैं ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि चापस्पर्शिक समीकरण पर से वक्रों की आकृति निकाल अच्छी तरह अभ्यास करें । परन्तु चाहिये कि ऐसा वक्र लें जिस की आकृति चक्रालद के ऐसी प्रसिद्ध हो ।

९७। चाप पर से विपरीत क्रिया से वक्र के भुज कोटि का ज्ञान ।

कल्पना करो कि $\dot{c}_1 = \text{फ}(y)$ तो

$$f'(y) = \frac{\text{चा}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\{f'(y)\}^2 - 1}$$

$$\text{और } r = \int [\{f'(y)\}^2 - 1]^{\frac{1}{2}} \text{ताय}$$

जैसे (१) कल्पना करो कि चा = फ(y) = गय

$$\text{इसलिये } f'(y) = ग$$

$$\text{और } r = \int [\{f'(y)\}^2 - 1]^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \int (ग^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = य\sqrt{ग^2 - 1} + स्थि$$

$$\text{यदि } r' = र - स्थि \text{ तो वक्र का समीकरण } r' = य\sqrt{ग^2 - 1}$$

$$(२) \text{ चा} = \text{फ}(y) = \sqrt{(४गय)} \text{ तो } f'(y) = \left(\frac{ग}{य}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{इस लिये } r = \int \left\{ \frac{ग}{य} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \int \frac{(ग-य)\text{ताय}}{\sqrt{(गय-य^2)}} = \int \frac{\left(\frac{ग}{२}-य\right)\text{ताय}}{\sqrt{(गय-य^2)}} \\ + \frac{ग}{२} \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(गय-य^2)}}$$

$$= \sqrt{(गय-य^2)} + \frac{ग}{२} \text{उज्या}^{-१} \frac{२य}{ग} + स्थि$$

यदि $r' = र - स्थि$ तो चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (११) वक्र, चक्रालट का समीकरण यह है ।

$$(३) \text{ चा} = \text{फ}(y) = अ \text{ लाय तो } f'(y) = \frac{अ}{य}$$

$$\text{यहाँ } r = \int \sqrt{\left[\frac{अ^2}{य^2} - 1\right]} \text{ताय} = \int \frac{(अ-य)\text{ताय}}{य\sqrt{(अ-य)}}$$

$$= \int \frac{अ\text{ताय}}{य\sqrt{(अ-य)}} - \int \frac{य\text{ताय}}{\sqrt{(अ-य)}}$$

$$= अ\text{ला} \frac{य}{अ + \sqrt{(अ-य)}} + \sqrt{(अ-य)} + स्थि$$

इस तरह से अनेक उदाहरण का उत्तर निकाल सकते हो ।

इस तरह विद्यार्थियों को चाहिये कि पूर्व प्रक्रमों में लिखे हुए सिद्धान्तों का अच्छी तरह अभ्यास कर प्रश्न का उत्तर निकाले ।

९८। यदि आकाश में कोई वक्र हो जिस का समीकरण भुज, कोटि और शङ्कु में बनता हो अर्थात् तीन धरातलों के सम्बन्ध से समीकरण हो तो गोल-

युक्ति से यदि क्षितिज, पूर्वापर और याम्योत्तरवृत्त ये तीनों धरातलों को क्रम से मान लें और आकाशीय विन्दु को ग्रह कल्पना करें तो इस ग्रह का ज्ञान याम्योत्तरीय भुज = य, पूर्वापरीयकोटि = र और दृग्मण्डलीयशङ्कु = ल के ज्ञान से हो जायगा ।

यदि किसी नियत विन्दु से ग्रह के गमन दिशा से जो वक्र हुआ उस के चाप का मान = चा मानें और जब मु = य + Δय, को = र + Δर और ल = ल + Δल कल्पना करें और उस समय में चाप = चा + Δचा मानो तो गोलयुक्ति से $\Delta चा = \sqrt{(\Delta य)^2 + (\Delta र)^2 + (\Delta ल)^2}$

Δय का भाग देकर Δय के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2} \text{ ऐसा होगा ।}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताल}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताल}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}\right)^2 \right\}}$$

यहाँ वक्र के समीकरणों पर से $\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}$, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$, $\frac{\text{ताल}}{\text{ताल}}$, इत्यादि, य वा र

अथवा ल के फल रूप में आ सकते हैं फिर इन पर से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 \right\}} \text{ ताय}$$

$$\text{वा चा} = \int \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}} \text{ तार}$$

$$\text{अथवा चा} = \int \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताल}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}\right)^2 \right\}} \text{ ताल}$$

इन का ज्ञान हो जायगा ।

इस प्रकार के वक्र को द्विगुण वक्रजातीय वक्र (Curves of double Curvature) कहते हैं

जैसे कल्पना करो कि एक वक्र नीचे लिखे दो समीकरणों से ज्ञान है ।

$$r^2 = 8अय \dots \dots \dots (१)$$

$$ल = \sqrt{(२गय - य^३) + गउज्या^{-१} य} \dots \dots \dots (२)$$

यहाँ दो समीकरणों से वक्र बात है इस का तात्पर्य ऐसा समझो ।

कल्पना करो कि उदयास्तसूत्र और याम्योत्तर का सम्पात अ है तो अ विन्दु को मूलविन्दु, याम्योत्तर सूत्र को य अक्ष और उदयास्त सूत्र को र अक्ष कल्पना करने से (१) समीकरण का परवलय जो क्षितिज के धरातल में उत्पन्न होगा उसको आधार मान उस पर एक समखात ऐसा बनावो जिस का पृष्ठसूत्र सब ऊर्ध्वाधरसूत्र के समानान्तर ह्यो । इसी तरह अ को मूल मान और याम्योत्तर सूत्र को, य अक्ष, ऊर्ध्वाधर सूत्र को र अक्ष के ऐसा ल अक्ष मान याम्योत्तरवृत्त के धरातल में जो (२) समीकरण से चक्रालद बनेगा इस को आधार मान एक समखात बनावो जिस का सब पृष्ठसूत्र उदयास्त-सूत्र के समानान्तर ह्यो तो ऐसे दो समखातों के आपस में कटने से जो वक्र की आकृति होगी वही वक्र ऊपर के दोनों समीकरणों से अपेक्षित है ।

$$\text{इस लिये यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{य}}}, \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left(\frac{२ग-य}{ग}\right)}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{१ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^२ + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right]^२\right\}} = \sqrt{\left(१ + \frac{\text{अ}}{\text{य}} + \frac{२ग-य}{ग} - १\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{२ग+अ}{य}\right)}$$

$$\text{इसलिये चा} = \int \sqrt{\left(\frac{२ग+अ}{य}\right)} \text{ ताय} = \sqrt{२ग+अ} \int \text{ताय} \text{ य}^{-१/२}$$

$$= २\sqrt{(२ग+अ)} \sqrt{\text{य}}$$

यदि मूल विन्दु से चाप की गणना करे तो स्थिराङ्क की कुछ आवश्यकता नहीं ।

९९। इसी तरह यदि य, र, और ल किसी “का” चल के फल हों तो चलन-कलन की युक्ति से सिद्ध कर सकते ह्ये कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताका}} = \sqrt{\left\{\left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right]^२\right\}}$$

$$\text{इस लिये चा} = \sqrt{\left\{\left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^२ + \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right\}} \text{ताका}$$

जैसे यदि य = अकोज्याका, र = अज्याका, ल = ग का

$$\text{तो } \frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} = \text{— अज्याका}, \frac{\text{तार}}{\text{ताका}} = \text{अकोज्याका}, \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}} = ग$$

$$\text{इस लिये चा} = \int \sqrt{(\text{अज्याका} + \text{अकोज्याका} + ग)} \text{ताका}$$

$$= \int (अ^२ + ग^२)^{\frac{१}{२}} ताका = \sqrt{(अ^२ + ग^२)} का + स्थि ।$$

१००। यदि $y = \text{श्रुज्यापकोज्याप}_१$, $r = \text{श्रुज्यापज्याप}_१$, $l = \text{श्रुकोज्याप}$

ऐसा अक्षीय समीकरण हो, तो जब वक्र दो समीकरण से विदित है अर्थात् y , r , l में से कोई दो तीसरे के फल हैं तब स्पष्ट है कि श्रु , y , $p_१$ इन में भी कोई दो तीसरे के फल होंगे । इस लिये y के वश से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} = \text{ज्यापकोज्याप}_१ \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्यापकोज्याप}_१ - \text{श्रुज्यापज्याप}_१ \frac{\text{ताप}_१}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \text{ज्यापज्याप}_१ \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्यापज्याप}_१ + \text{श्रुज्यापकोज्याप}_१ \frac{\text{ताप}_१}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{कोज्याप} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याप}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} \right]^२ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} \right]^२ + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} \right]^२ \\ = \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^२ + \text{श्रु}^२ \text{ज्याप}^२ \left[\frac{\text{ताप}_१}{\text{ताप}} \right]^२ + \text{श्रु}^२ \end{aligned}$$

$$\text{और चा} = \int \sqrt{\left\{ \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^२ + \text{श्रु}^२ \text{ज्याप}^२ \left[\frac{\text{ताप}_१}{\text{ताप}} \right]^२ + \text{श्रु}^२ \right\}} \text{ताप}$$

इसी तरह r , और $p_१$ के वश से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^२ \left[\frac{\text{ताप}_१}{\text{तार}} \right]^२ + १ + \text{श्रु}^२ \text{ज्याप}^२ \left[\frac{\text{ताप}_१}{\text{तार}} \right]^२ \right\}} \text{ताश्रु}$$

$$\text{वा, चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^२ \left[\frac{\text{ताप}_१}{\text{ताप}_१} \right]^२ + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_१} \right]^२ \text{श्रु}^२ \text{ज्याप}^२ \right\}} \text{ताप}_१$$

१०१। इसी तरह अन्तरिक्ष में जो वक्र हो उस के किसी विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो उस पर मूलविन्दु से पड़ा लम्ब यदि l कहो तो ७५ प्रक्रम के

$$(६) \text{ समीकरण से चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^२ - \text{ल}^२)}} \text{ऐसा होगा ।}$$

यह समीकरण यद्यपि एकधरातलगत वक्र में सिद्ध होता है तथापि जब दो एकधरातलीय वक्रों के योग ही से यह वक्र उत्पन्न हुआ है तब योगविन्दु में इस में भी यही धर्म रहेगा । अथवा जब चलनकलन से सिद्ध है कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}}, \frac{\text{श्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^२ - \text{ल}^२)}} \text{ यह दोनों अन्तरिक्षस्थ वक्र के स्पर्शरेखा और श्रुति से}$$

$$\text{उत्पन्न कोण की छेदन रेखा है तब } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताशु}} \\ = \frac{\text{शु}}{\sqrt{(\text{शु}^2 - \text{ल}^2)}} \therefore \text{चा} = \int \frac{\text{शुताशु}}{\sqrt{(\text{शु}^2 - \text{ल}^2)}} ।$$

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। यदि वक्र का समीकरण $\text{४}(\text{य}^2 + \text{र}^2) - \text{अ}^2 = ३\text{अ}^2\text{र}^{\frac{३}{२}}$ यह हो तो इस के परिधि का मान बताओ । परि. = ६अ^2

२। सिद्ध करो कि त्रीतर का चा = \pm गलार + स्थि ।

३। सिद्ध करो कि किसी त्रिच्छेद (Trochoid) का चाप

$$= \text{स्थि} - \int \sqrt{\left\{ (\text{ग} - \text{क})^2 \text{ज्या}^2 \frac{\text{अ}}{२} + (\text{ग} + \text{क})^2 \text{कोज्या}^2 \frac{\text{अ}}{२} \right\}} \text{ताअ}$$

जहाँ $\text{अ} = \text{ग} - \text{अ}$

चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१२) वक्र देखो

४। किसी वक्र में यदि $\text{य} = \text{ज्याप} (२\text{प} + ३\text{प}^2) + \text{कोज्याप} (२ + ६\text{प})$

$$\text{र} = \text{कोज्याप} (२\text{प} + ३\text{प}^3) - \text{ज्याप} (२ + ६\text{प})$$

तो सिद्ध करो कि चा = $\text{प}^3 + \text{प}^4 + ६\text{प} + २$ ।

५। सिद्ध करो कि किसी वक्र में यदि

$$\text{य} = \text{ज्यापफ}^1(\text{प}) + \text{कोज्यापफ}^1(\text{प})$$

$$\text{र} = \text{कोज्यापफ}^1(\text{प}) - \text{ज्यापफ}^1(\text{प})$$

$$\text{तो चा} = \text{फ}^1(\text{प}) + \text{फ}^1(\text{प}) ।$$

६। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $\text{र} = \text{य}^2 + ३\text{य}^3$ हो तो यदि मूलविन्दु से चाप की गणना करें तो चा = $\text{य} (\text{य}^2 + १)^{\frac{३}{२}}$ ।

७। $\text{र}^2 = \text{अय}^2$ इस समीकरण के वक्र का चापस्पर्शिकसमीकरण कैसा होगा।

$$\text{उ० चा} = \frac{\text{रअ}}{\text{र}} (\text{छे}^3 \text{व}_1 - १) ।$$

८। सिद्ध करो कि परवलय के चापस्पर्शिकसमीकरण में

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1} = \frac{\text{२अ}}{\text{कोज्या}^2 \text{व}_1} । \text{वा, वा} = \frac{\text{अ}}{२} \text{ला} \frac{१ + \text{ज्याव}_1}{१ - \text{ज्याव}_1} + \frac{\text{अज्याव}_1}{१ - \text{ज्याव}_1} ।$$

९। सिद्ध करो कि यदि वक्र का $(\text{य} + \text{र})^{\frac{३}{२}} - (\text{य} - \text{र})^{\frac{३}{२}} = \text{अ}^{\frac{३}{२}}$ यह समीकरण हो तो

$$\text{चा} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (y+r)^{\frac{3}{2}} + (y-r)^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

१०। सिद्ध करो कि अपचक्रालद का अवलूत एक अपचक्रालद ही होगा जिस के स्थिरवृत्त का व्यासार्ध = $\frac{a^2}{a+2k}$ और चलितवृत्त का व्यासार्ध = $\frac{a k}{a+2k}$ होगा ।

११। $\text{श्रु}^m = a^m$ को ज्यामय इस समीकरण के वक्र में यदि $\frac{1}{m}$ यह कोई अभिन्नसंख्या हो तो चाप का मान जान सकते हैं ।

१२। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $z^r = \frac{z^y + 1}{z^y - 1}$ ऐसा हो तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{z^y + 1}{z^y - 1}$ होगा ।

१३। यदि वृत्त का व्यासार्ध = १ इस के चाप का प्रमाण = π हो और इसके अनवलून का चाप = π_1 , अनवलून के अनवलून का चाप = π_2 , इस के अनवलून का चाप = π_3 इस तरह अनवलूनपरम्पराओं के चाप मान $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ इत्यादि मानो तो सिद्ध करो कि

$$\pi + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots = z^{\pi} - 1 \text{ होगा ।}$$

अनवलून और वृत्त के योग विन्दु से चाप की गणना समझो ।

१४। यदि किसी इलामूलक (The Lammscate) का $\text{श्रु}^3 = a^3$ को ज्यामय ऐसा समीकरण हो (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१०) वक्र देखो)

तो सिद्ध करो कि उस के परिधि का मान

$$= 2\pi a \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \text{ यह होगा ।}$$

१५। यदि एक विन्दु से दीर्घवृत्त पर दो स्पर्शरेखा खींची जायँ तो दो स्पर्शरेखा दो भुज और उन के अन्तर्गत दीर्घवृत्त का चाप आधार मानो तो दो सरल और एक वक्ररेखा इस से एक त्रिबाहु उत्पन्न हुआ इस त्रिबाहु के अन्तर्गत जो वृत्त बनेगा वह वक्राधार को जहाँ स्पर्श करेगा उस से जो दो भाग वक्राधार के होंगे उन का अन्तर त्रिभुज के दोनों भुजों के अन्तर तुल्य होता है । इसे सिद्ध करो ।

१६। जिस वक्र का $r = \frac{y^2}{2a}$, $l = \frac{y^3}{6a}$ ये समीकरण हैं उस के मूल विन्दु से चाप का मान बतावो । $उ०$, चा = $y + l$ ।

१७। सिद्ध करो कि यदि वक्र के समीकरण पर से $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 = 2 \frac{ताल}{ताय}$ तो चा = $y + l + स्थि$ ।

१८। वक्र का एक समीकरण $r = f(y)$ यह दिया हुआ है और यह जानते हैं कि इस के चाप का मान $y + l + स्थि$ यह है तो वक्र का दूसरा समीकरण क्या होगा । $उ०$, $l = \frac{1}{2} \int \{ f(y) \}^2 ताय$ ।

१९। वक्र का एक समीकरण $r = ज्याय$ यह है और इस के चाप का मान = $y + l$ तो दूसरे समीकरण का मान बताओ ।

$$उ० ल = \frac{अ^2}{४} \left(य + \frac{ज्याय}{२} \right)$$

२०। किसी वक्र में $r = 2\sqrt{अय} - य$, $l = य - \frac{३}{४}\sqrt{\frac{य^3}{अ}}$ तो चाप का क्या मान होगा । $उ०$ चा = $y + r - ल$

$$२१। यदि वक्र के $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क} = १$, $य = \frac{अ}{३} \left[\frac{ल}{इअ} + इ - \frac{ल}{अ} \right]$$$

ये समीकरण हों तो चाप का क्या प्रमाण होगा ।

$उ०$, $य$, $र$ अक्ष के धरातल में जहाँ पर वक्र मिला है इस विन्दु से यदि चाप की गणना करे तो चा = $\frac{(अ^३ + क^३)^{\frac{३}{४}}}{अ} (य^३ - अ^३)^{\frac{३}{४}}$

२२। ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में त विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर न से पड़े लम्ब का मान यदि नल रखो तो सिद्ध करो कि

$$(१) नल \times नल = नअ \times नक । (२) नव^३ + नल^३ = नअ^३ + नक^३ ।$$

२३। एक दीर्घवृत्त के परिधि चतुर्थांश का ऐसा द्विभाग करो कि उनका अन्तर व्यासार्धान्तर तुल्य हो ।

८५ प्रक्रम का (१) क्षेत्र देखो यहाँ त और व दोनों एक ही स्थान में हों जायेंगे । और $नल = \sqrt{नअ \times नक}$ और $वल = नअ - नक$

२४। २३ वें प्रश्न में द्विभागकारी विन्दु जो है उस पर दीर्घवृत्त में जो स्पर्शरेखा होगी वह दोनों अक्षों में द्विभागकारी विन्दु से क्रम से व्यासार्द्ध तुल्य अन्तर पर लगेगी अर्थात् र अक्ष में बृहद्व्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर और य अक्ष में लघुव्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर । इस को सिद्ध करो ।

२५। यदि ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में (२२) प्रश्न के अनुसार लम्ब नल डालें तो सिद्ध करो कि बल, तल बढ़ाने से जिस विन्दु पर कटेंगे वह विन्दु दीर्घ वृत्त के उस ऐकनाभिक अतिपरवलय में होगी जो कि (२३) प्रश्न में द्विभागकारी जो विन्दु है उस पर जायगा । यहाँ पर यह भी सिद्ध करो कि अ और क विन्दुगत स्पर्शरेखाओं के योग विन्दु पर भी वह अतिपरवलय जायगा ।

२६। एक ही स्थान से तीन लड़के दौड़े पहला सरल मार्ग में और बाकी दो वक्रमार्ग में । पहला जिस स्थान पर पहुँचता था वहाँ पर यदि उस की गमन दिशा पर लम्ब करें तो यह लम्ब दूसरे और तीसरे के तात्कालिक स्थान पर जाता है । यदि पहला १० कोश चल कर ठहर जाय तो उस समय दूसरा और तीसरा कितना कितना चल चुके होंगे । इस प्रश्न में हम इतना जानते हैं कि किसी समय में पहले से दूसरे के स्थान का अन्तर = $\sqrt{४अय}$, और पहले से तीसरे के स्थान का अन्तर = $अय^{\frac{३}{२}}$ ।

यहाँ किसी समय में पहले के चल चुकने का प्रमाण य है

$$७० \text{ दूसरे का चलना} = \sqrt{१०० + १०अ + \frac{अ}{३}} \left\{ \frac{२० + अ + २\sqrt{१०० + १०अ}}{अ} \right\}$$

$$\text{तीसरे का चलना} = अ \left\{ \left[\frac{४}{९अ^२} + १० \right]^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{२७अ^३} \right\}$$

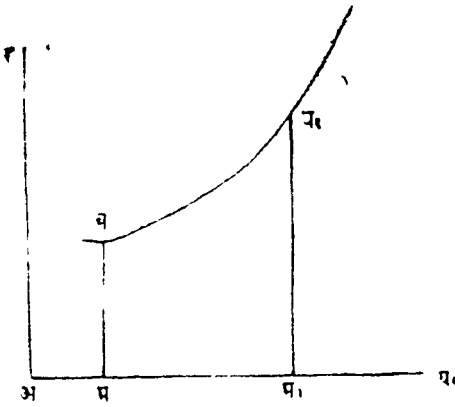
इति षष्ठाध्याय ।

अथ सप्तमाध्याय ।

वक्र क्षेत्रों का फलानयन ।

१०२। जिस वक्र में कोटि, भुज का कोई फल है वहाँ चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}} = r$ (चलनकलन का १५६ वाँ प्रक्रम देखो)

इस लिये $f = \int r \text{ ताय}$ इस में कोटि के स्थान में r_1 और r_2 का उत्थापन देकर सान्त चलानयन से



वम m_1, y_1 वक्रचतुर्भुज का फल $\int_{r_1}^{r_2} r \text{ ताय}$ यह होगा ।

यहाँ यदि अक्ष तिर्यक् हो तो

यही फल ज्याअ $\int_{r_1}^{r_2} r \text{ ताय}$ ऐसा होगा । यहाँ $a = \angle r \text{ अय}$ ।

१०३। इस की व्याप्ति के लिये कुछ वक्रों का फलानयन करते हैं ।

केन्द्र को मूल मान वृत्त का $r = \sqrt{a^2 - y^2}$ यह समीकरण है इस के फल का मान जानना है ।

यहाँ १०२ प्रक्रम से $f = \int \sqrt{a^2 - y^2} \text{ ताय}$

$= \frac{y\sqrt{(a^2 - y^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \text{ ज्या}^{-1} \frac{y}{a} + \text{स्थि}$, यदि प्रथम r को r अक्ष में

मिला समझें तो उस समय $y = 0$ होगा और फल भी शून्य इसलिये स्थि $= 0$ तब फल

$$\int \sqrt{(a^2 - y^2)} \text{ ताय} = \frac{y\sqrt{(a^2 - y^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \text{ ज्या}^{-1} \frac{y}{a} \text{ ।}$$

इस में यदि $y = a$ तो वृत्तके चतुर्थांश का फल $= \frac{a^2}{4} \times \frac{\pi}{2}$

$$\text{इस लिये समग्रवृत्तफल} = अ \times अ^{\pi} = अ^{\pi} = \frac{२अ \times २अ^{\pi}}{४} = \frac{२अ \times परि}{४}$$

अर्थात् परिधि, व्यास के घात की चौथाई वृत्त का फल होता है। इस को भास्कराचार्य भी जानते थे इन से भी प्राचीन ब्रह्मगुप्तादिको ने भी यह जान लिया था। परन्तु इस की उपपत्ति वे लोग नहीं दिखाये।

१०४। दीर्घवृत्त के फल का आनयन ।

$$\text{यहाँ } r^2 = \frac{क^2}{अ^2} (अ^2 - य^2) \text{ इस लिये}$$

$$फ = \frac{क}{अ} \int \sqrt{(अ^2 - य^2)} \text{ ताय। परन्तु १०३ प्रक्रम से } \int \sqrt{(अ^2 - य^2)} \text{ ताय}$$

यह अ, व्यासार्द्ध से उत्पन्न वृत्त का फल है इस लिये उस वृत्त का सम्पूर्ण फल जो हो उसे लघुव्यासार्द्ध से गुण कर बृहद्व्यासार्द्ध का भाग देने से दीर्घवृत्त का क्षेत्र फल होता है।

१०५। परवलय के फल का आनयन ।

$$\text{यहाँ } r^2 = ४अय। \text{ इस लिये}$$

$$\text{फल} = \int \sqrt{(४अय)} \text{ ताय} = \frac{४\sqrt{अ}}{३} य^{\frac{३}{२}} + स्थि।$$

$$\text{यहाँ यदि } य = ० \text{ तो } फ = ० \text{ इस लिये स्थि} = ०।$$

$$\text{तब } फ = \frac{४\sqrt{अ}}{३} \times य^{\frac{३}{२}} \times य = \frac{२यर}{३} \text{ अर्थात् भुज और कोटि से जो आयत}$$

बने उस का दो तृतीयांश परवलय का फल होता है।

१०६। जिस वक्र का $r = अय^n$ ऐसा समीकरण है उस के फल का आनयन ।

$$\text{यहाँ } फ = \int अय^n \text{ ताय} = अ \int य^n \text{ ताय} = \frac{अ \cdot य^{n+1}}{n+1} + स्थि।$$

यदि मूल स्थान से फल की प्रवृत्ति माने तो स्थि = ० इस लिये

$$फ = \frac{अ \cdot य^{n+1}}{n+1} = \frac{अय^n \times य}{n+1} = \frac{र \times य}{n+1} \text{ यह फल जानने के लिये ऐसे वक्र में}$$

एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हो गया। इसमें n के स्थान में यदि $\frac{३}{२}$ का उत्थापन दो तो परवलय का फल आ जायगा।

१०७। अतिपरवलय के फल का आनयन ।

केन्द्र को मूल मानने से इस का समीकरण $r = \frac{क}{अ} \sqrt{(य^2 - अ^2)}$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये फ} &= \frac{क}{अ} \int \sqrt{(य^2 - अ^2)} \text{ ताय} \\ &= \frac{क}{अ} \left\{ \frac{य\sqrt{(य^2 - अ^2)}}{2} - \frac{अ^2}{2} \text{ ला } (य + \sqrt{(य^2 - अ^2)}) \right\} + \text{स्थि} \end{aligned}$$

यदि $य = अ$ तो $फ = 0$ इस लिये

$$0 = \frac{क}{अ} \left\{ -\frac{अ^2}{2} \text{ लाअ} \right\} + \text{स्थि} \therefore \text{स्थि} = \frac{कअ^2}{2अ} \text{ लाअ}$$

इस लिये

$$\begin{aligned} \text{फ} &= \frac{क}{अ} \left\{ \frac{य\sqrt{य^2 - अ^2}}{2} - \frac{अ^2}{2} \text{ ला } \left[\frac{य + \sqrt{य^2 - अ^2}}{अ} \right] \right\} \\ &= \frac{यर}{2} - \frac{अक}{2} \text{ ला } \left[\frac{य}{अ} + \frac{र}{क} \right] \end{aligned}$$

केन्द्र से वक्र के प बिन्दु तक एक रेखा कर दो तो भुज, कोटि, श्रुति से जो जात्यत्रिभुज होगा उस का फल $\frac{यर}{2}$ यह होगा। इस लिये श्रुति, अतिपरवलय का चाप और केन्द्र और शिरःस्थान का अन्तर अ से जो वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल $= \frac{अक}{2} \text{ ला} \left(\frac{य}{अ} + \frac{र}{क} \right) \dots \dots \dots (१)$

(चलनकलन का १११ वॉ प्रक्रम देखो)

१०८। चक्रालङ्घ के फल का आनयन ।

चक्रालङ्घ में $य = अ (१ - कोज्याप)$ । $र = अ (प + ज्याप)$ ।

इस लिये ताय = अज्याप ताय ।

और रताय = अ (ज्या^२प + पज्याप) ताय

$$= अ पज्यापताय + \frac{अ^2}{2} (१ - कोज्या२प) ताय$$

$$\text{इस लिये } \int \text{रताय} = अ \int \text{पज्यापताय} + \frac{अ^2}{2} \int (१ - कोज्या२प) ताय$$

$$= अ^2 (-पकोज्याप + ज्याप) + \frac{अ^2}{2} (प - \frac{ज्या२प}{2})$$

यदि ० और π के बीच प के मान में फल साधन करे तो चक्रालङ्घ

के आधे का फल = $a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{2} = \frac{3a^2 \pi}{2}$ = चलितवृत्त के फल का डेढ़गुना इस लिये चलितवृत्त के फल को तीन गुना करने से सम्पूर्ण चक्रालद का फल होता है (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (११) वां वक्र देखो और वहाँ $k = a$, और $a = p$ मान लो)

इसी वक्र में यदि $r = ap$ तो पूर्वयुक्ति से $\int r \text{ताय} = a^2 \int p \text{ज्या}^2 \text{ताय}$
 = $a^2 (-\text{प्रकोज्या}^3 + \text{ज्या}^3)$ यह चक्रालद के साथी का फलसमीकरण हुआ। इस में p को ० और π के बीच यदि फल साधन करें तो आधे वक्र का फल = $a^2 \pi$ । इस लिये चलितवृत्त का दूना इस का फल होगा।

१०९। कातम्बली के फल का आनयन ।

$$\text{यहाँ } r = \frac{g}{h} \left(e^{\frac{y}{g}} + e^{-\frac{y}{g}} \right)$$

$$\text{इस लिये फ} = \int r \text{ताय} = \frac{g}{h} \int \left(e^{\frac{y}{g}} + e^{-\frac{y}{g}} \right) \text{ताय} = \frac{g^2}{h} \left(e^{\frac{y}{g}} - e^{-\frac{y}{g}} \right)$$

$$= g \left\{ \frac{g}{h} \left(e^{\frac{y}{g}} - 2 + e^{-\frac{2y}{g}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= g \left\{ \frac{g^2}{h^2} \left(e^{\frac{2y}{g}} + 2 + e^{-\frac{2y}{g}} \right) - g^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = g (r^2 - g^2)^{\frac{1}{2}}$$

११०। $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{2m+1}} + \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{2}{2n+1}} = 1$ इस समीकरण के वक्र का फलानयन ।

यहाँ यदि $y = a \text{ज्या}^{2m+1} p$ और $r = k \text{कोज्या}^{2n+1} p$,

तो ताय = $a (2m+1) \text{कोज्या}^p \text{ज्या}^{2m} p$, ताय,

$$\text{इस लिये फ} = \int r \text{ताय} = ak(2m+1) \int \text{कोज्या}^{2n+2} p \text{ज्या}^{2m} p \text{ताय}$$

३५ प्रक्रम के (१) समीकरण से इस का चल ला सकते हो ।

वा खण्डचलानयन से

$$\int \text{कोज्या}^{2n+2} p \text{ज्या}^{2m} p \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{2n+1} p \text{ज्या}^{2m+1} p}{2m+1} + \frac{2n+1}{2m+1} \int \text{ज्या}^{2m+2} p \text{कोज्या}^{2n} p \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{2n+2} p \text{ज्या}^{2m+1} p}{2m+1}$$

$$+ \frac{2n+1}{2m+1} \int \text{ज्या}^{2m} p_1 (1 - \text{कोज्या}^2 p_2) \text{कोज्या}^{2n} p_2 \text{ताप}_1$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{2n+1} p_1 \text{ज्या}^{2m+1} p_2}{2m+1}$$

$$+ \frac{2n+1}{2m+1} \int \text{ज्या}^{2m} p_1 \text{कोज्या}^{2n} p_2 \text{ताप}_1$$

$$- \frac{2n+1}{2m+1} \int \text{ज्या}^{2m} p_1 \text{कोज्या}^{2n+2} p_2 \text{ताप}_1$$

पक्षान्तरानयन कर $\frac{2m+2n+2}{2m+1}$ का भाग दे देने से

$$\int \text{ज्या}^{2m} p_1 \text{कोज्या}^{2n+2} p_2 \text{ताप}_1$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{2n+1} p_1 \text{ज्या}^{2m+2} p_2}{2(m+n+1)} + \frac{2n+1}{(2m+n+1)} \int \text{ज्या}^{2m} p_1 \text{कोज्या}^{2n} p_2 \text{ताप}_1$$

$$\dots (1)$$

यदि ० और $\frac{\pi}{2}$ के बीच p_1 के मान में सान्तचल का मान लावे तो सम्पूर्ण वक्र का फल (१) से स्पष्ट है कि

$$\frac{1 \ 3 \ 5 \ 7 \dots (2n+1) \cdot 1 \ 3 \ 5 \ 7 \dots (2m+1)}{2 \ 4 \ 6 \ 8 \dots 2(m+n+1)} 2^{\text{अक}^n}, \text{ यही होगा।}$$

न, म के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देकर अनेक वक्र और उनके क्षेत्रफल जान सकते हो।

जैसे यदि वक्र का $\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ $m=1$ और $n=1$ इस लिये $2n+1=3$, और $2m+1=3$, $2(m+n+1)$

$$= 6। \text{ फल में इन का उत्थापन देने से वक्र का संपूर्ण फल} = \frac{1 \ 3 \ 1 \ 3}{2 \ 4 \ 6}$$

$$\text{अक}^n = \sqrt[3]{2} \text{अक} \pi = \frac{2}{3} \text{अक} \pi$$

इस वक्र को चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि दीर्घवृत्त का अवलत है।

१११। कभी कभी दो सीमाओं के भीतर फलानयन में बड़ा धोखा पड़ जाता है। क्योंकि ऊपर के प्रक्रमों से जो फलानयन किया है किसी स्थान में r के धनत्व वा ऋणत्व का विचार नहीं किया है सर्वत्र r को एक ही प्रकार का मान लिया है। परन्तु फलानयन में r के स्थान में y के फल में जो उस का रूप होता है उस का उत्थापन देकर फल साधन किया है उस लिये संभव है कि इस फल

में ऋणात्मक र संबन्धी य का उत्थापन देने से वही मान आवे जो कि धनात्मक र में आता हो ऐसी दशा मे अवश्य धोखा खाने की सम्भावना है ।

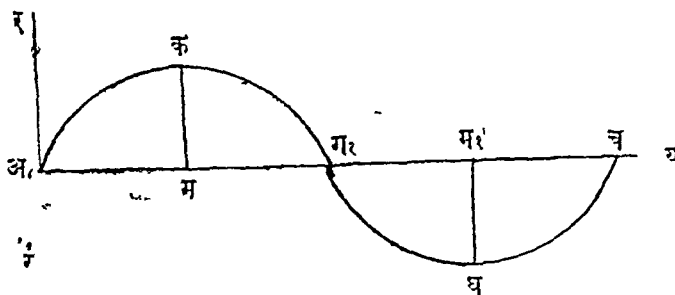
जैसे यदि किसी वक्र का $r = g \sin \frac{y}{a}$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ फल का समीकरण $\int r \sin y = g \int \sin^2 \frac{y}{a} \sin y = -g \cos \frac{y}{a} \sin y$ मानो कि जब $y = y_1$ तो $r = r_1$ और जब $y = y_2$ तब $r = r_2$ इस लिये r_1 और r_2 कोटि मान के बीच में क्षेत्रफल $g \int_{y_1}^{y_2} \sin^2 \frac{y}{a} \sin y$

$$= g \left[\cos \frac{y_1}{a} \sin y_1 - \cos \frac{y_2}{a} \sin y_2 \right] \text{ यह हुआ । इस में पहले मानो}$$

कि $y_1 = 0, y_2 = a\pi$, तो फल $= 2ga$ यह होगा । फिर मानो कि

$$y_1 = 0, y_2 = 2a\pi \text{ तो } g \left[\cos \frac{y_1}{a} \sin y_1 - \cos \frac{y_2}{a} \sin y_2 \right] \text{ इस का मान शून्य}$$

होगा जो कि क्षेत्र की आकृति से असम्भव है क्योंकि जब तक $y, 0$ से $\frac{a\pi}{2}$ के ऊपर आवेगा तब तक r का धनमान बढ़ता रहेगा फिर आगे धनमान घटने लगेगा जब $y = a\pi$ तब शून्य हो जायगा इस लिये वक्र फिर y अक्ष में मिलेगा इस लिये $y_1 = 0$ और $y_2 = a\pi$ के बीच का पहले जो फल $2ga$ आया है वह एक ही चाल के r में सिद्ध हुआ ठीक आया । अब y का मान $a\pi$ के आगे बढ़ेगा तब r का मान ऋण होगा और धरावर y के $2a\pi$ मान तक ऋण ही ऋण चला जायगा ऐसी दशा मे y अक्ष से नीचे वक्र बनेगा जैसा कि नीचे की आकृति से स्पष्ट है । यहाँ $a_1 r_1 = a\pi$ और $a_2 r_2 = 2a\pi$



और $\text{कम} = g = m_1 \cdot \text{घ}$ ।

और वक्र के धन कोटि

मान में $a_1 \text{कग}$, खण्ड

और ऋण कोटि मान में

$g, \text{घच}$ खण्ड है । इस

लिये 0 और $2a\pi$ के बीच y के मान में $a_1 \text{कग}, \text{घच}$ का फल वक्र के समीकरण से $a_1 \text{कग}$ का अर्थात् $2ga$ का दूना $4ga$ होगा परन्तु फल के समीकरण से शून्य आया इस लिये वह असम्भव है । ऐसी स्थिति

में चाहिये कि ग, घच के फल के लिये र का मान ऋण मानो तब इस का फल = $\int (-r) \text{ताय} = g \int (-\text{ज्या} \frac{y}{a}) \text{ताय} = \text{अग कोज्या} \frac{y}{a} + \text{स्थि}$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये सम्पूर्ण फल} &= g \int_0^{a^{\pi}} \text{ज्या} \frac{y}{a} \text{ताय} + g \int_{a^{\pi}}^{2a^{\pi}} (-\text{ज्या} \frac{y}{a}) \text{ताय} \\ &= 2gअ + 2gअ = 4gअ \text{ यह ठीक होगा ।} \end{aligned}$$

ऐसे ऐसे स्थानों में र के धनत्व वा ऋणत्व का विना विचार किये फलानयन ठीक न होगा ।

११२। जब कहीं सीमितवक्र के फल साधन में \int रताय के मान में य के स्थान में क्या क्या उत्थापन दें जिस में सम्पूर्ण वक्र का फल आ जाय इस में संशय जान पड़े तो \int रताय स्थान में \int र $\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}$ ताचा इस का उत्थापन देने से सुगमता हो जायगी इस में चा के स्थान में वक्र के परिधि का वा तत्सम्बन्धी और कोई चल का उत्थापन देने से सम्पूर्ण फल तुरन्त आ जायगा ।

जैसे दीर्घवृत्त में ७७ वे प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = a \sqrt{(1 - \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प})} \quad \text{और} \quad \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} = \text{अकोज्याप} \text{ इस लिये}$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{कोज्याप}}{\sqrt{1 - \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प}}} \quad \text{और} \quad r \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \cdot \text{ताचा} = \text{अकोज्या}^2 \text{प ताप}$$

$$\text{इस लिये} \int r \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \text{ताचा} = \text{अक} \int \text{कोज्या}^2 \text{प ताप}$$

$= \frac{\text{अक}}{2} (1 + \text{कोज्या} 2\text{प}) \text{ताप} = \frac{\text{अक}}{2} (प - \frac{\text{ज्या} 2\text{प}}{2})$ अब सम्पूर्ण दीर्घवृत्त की परिधि में प, चार समकोण अर्थात् 2^{π} होगा इस लिये इस का उत्थापन देने से सम्पूर्ण दीर्घवृत्त का फल = $\text{अक}^{\pi} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{अ}^{\pi}$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

कहीं कहीं य को कोटि और र को भुज मान कर भी दो भुजों के बीच वक्रिय फल का साधन कर सकते हो ।

$$\text{जैसे परवलय में } r^2 = 4अय \cdot \frac{r^2}{y} = 4अ \text{ इस लिये}$$

$$\int \text{यतार} = \frac{1}{4a} \int r^2 \text{तार} = \frac{r^2}{2a} = \frac{r^2 \times r}{4a \times 3} = \frac{y \times r}{3} \text{ यह फल वक्र के}$$

विन्दु से r अक्ष पर जो y के तुल्य लम्ब पड़ा उस से और लम्बमूल और वक्र के शिरःस्थान अ तक जो रेखा और वक्र के चाप से जो वक्रत्रिचादु हुआ उस का है ।

११३। २, और ४० वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि दो कोटियो (r_0, r_n)

$$\text{के बीच वक्र का फल} = \int_{y_0}^{y_n} r \text{ताय} = r_0 \text{च}_1 + r_1 \text{च}_2 + \dots + r_{n-1} \text{च}_n$$

यही है । जहाँ $r = f(y)$, $r_0 = f(y_0)$, $r_1 = f(y_1) \dots$

$r_n = f(y_n)$ इस लिये ६३ प्रक्रम की युक्ति से श्रेढीरूप फल के पदों का मान $r \Delta y$ इस साँचे से अथवा $f(y) \Delta y$ इस साँचे से प्रकाश कर सकते है ।

यहाँ भी ठीक वैसा ही अर्थ समझना चाहिये और च का सूचक जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है Δy है ।

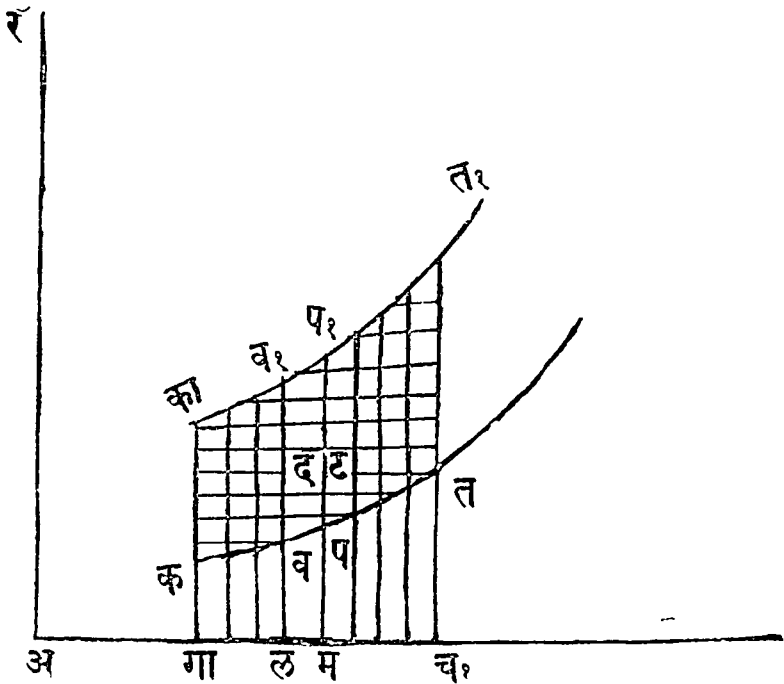
इस लिये दो कोटियोंके बीच वक्र का फल y और Δy इस से प्रकाश कर सकते है $r \Delta y$ के पहले जो यौ है उस से यह समझना चाहिये कि Δy के स्थान में $\text{च}_1, \text{च}_2, \dots, \text{च}_n$ का और r के स्थान में $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ का उत्थापन देने से जितने पद होंगे उन सबों का योग किया हुआ है ।

५ वें प्रक्रम से स्पष्ट जान पड़ेगा कि यदि a_1, a_2 इत्यादि को (जो अत्यल्प मान है) Δy से प्रकाश करें और k_1, k_2 इत्यादि को r से, तो पास की दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर = Δy और वक्र चापान्तर से जो चतुर्भुज बनेगा उस का फल = $r \Delta y$ यह होगा ।

और r , के स्थान में r_0, r_1 इत्यादि का Δy के स्थान में a_1, a_2 इत्यादि का उत्थापन देने से श्रेढी के प्रत्येक पद क्रम से प्रत्येक वक्रचतुर्भुज के फल होंगे ।

वक्र क्षेत्र के फल ही से धीरे धीरे चलराशिकलन का प्रचार हुआ । क्षेत्र का छोटा छोटा खण्ड कर के पृथक् पृथक् खण्डों के फलों के योग से फल का ले आना भास्कर के गोलाध्याय के पृष्ठ फल देखने से जान पड़ता है कि भास्कर को समझ पड़ा था परन्तु इन से पहले भारतवर्ष में इस प्रकार से फल ले आने की कही भी चर्चा नहीं है ।

११४। दो वक्रों के चाप और उन के कोट्यन्तर से जो क्षेत्र बनेगा उस का फलानयन ।



कल्पना करो कि काव,प,त, एक वक्र का चाप और कवपत दूसरे वक्र का चाप, काक प्रथम कोट्यन्तर और त,त दूसरा कोट्यन्तर इन से काकतत, वक्र क्षेत्र जो बना है उस का फल जानना है ।

र अक्ष के समानान्तर और य अक्ष के समानान्तर अनेक रेखा जिन में दो दो का अन्तर बहुत ही अल्प हो खींचने से देखो अनेक, क्षेत्र के भीतर आयत बन गये हैं जिन में किसी एक दट का फल (यदि अल = य, दल = र और अम = य + Δय, मट = र + Δर) ΔयΔर यही होगा । अब, वव,प,प वक्रचतुर्भुज के बीच जितने छोटे छोटे दट के ऐसे चतुर्भुज हैं उन के फलों का योग यौΔयΔर यही होगा । यहाँ क्षेत्र के देखने से स्पष्ट है कि Δय सर्वत्र एक ही है इस लिये

$$\text{यौ}\Delta\text{य}\Delta\text{र} = \int_{\text{लव}}^{\text{लव, तार}} \Delta\text{यतार} = \Delta\text{य} \int_{\text{लव}}^{\text{लव, तार}}$$

इस में Δर का मान अत्यल्प मानने से अर्थात् तार मानने से वव, प,प वक्र चतुर्भुज के विलक्षण खण्ड हैं उन का लोप हो जायगा ।

$$\text{इस लिये वव,प,प} = \Delta\text{य} \int_{\text{फ(य)}}^{\text{फा(य)}} \text{तार} = \Delta\text{य} \{ \text{फा(य)} - \text{फ(य)} \}$$

यहाँ फा(य) = व, ल = ऊपर के वक्र की कोटि और

फ(य) = वल = नीचे के वक्र की कोटि ।

इस प्रकार सब स्तम्भरूप वक्रचतुर्भुजों का योग $\Delta y \{ \text{फा}(y) - \text{फ}(y) \}$

इस साँचे से निकाल सकते हो अर्थात् यदि अगा = गा, अचा_१ = चा तो

$$\text{कका त, त} = \text{यौ} \Delta y \{ \text{फा}(y) - \text{फ}(y) \} = \int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \{ \text{फा}(y) - \text{फ}(y) \} \text{ ताय}$$

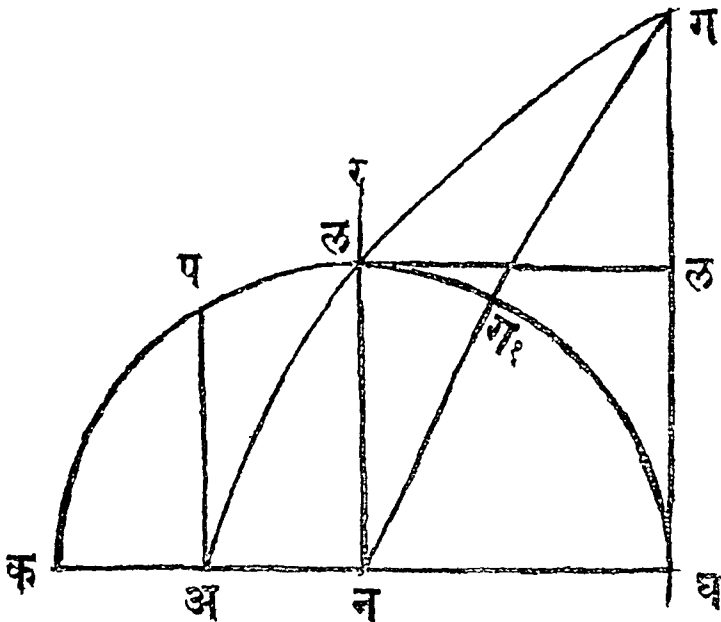
यदि द्विगुणचलानयन की रीति से इस फल को लिखे तो इस का

मान $\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ}(y)}^{\text{फा}(y)}$ तार ताय ऐसा होगा ।

११५। यदि जिन दो वक्रों के $y = \text{फा}(r)$ । $y = \text{फ}(r)$ ऐसे समीकरण हो और उन से सीमितक्षेत्र का फल जानना हो तो स्पष्ट है कि ऊपर के मान में y र को बदल देना होगा । अर्थात् तब क्षेत्र का फल

$$\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ}(r)}^{\text{फा}(r)}$$
 ताय तार ऐसा होगा ।

११६। ऊपर के दोनों प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं ।



कल्पना करो कि कलघ वृत्त, और अलग परवलय में न मूलविन्दु, नल = रेख = वृत्त का व्यासार्द्ध, नअ = कअ = अ, तो यदि न विन्दु से घ की ओर भुज-

गणना करें। तो वृत्त का समीकरण $x^2 = 4a^2 - y^2$ और परवलय का समीकरण $x^2 = 4a(x + y)$ होगा। क्योंकि इस स्थिति में न परवलय की नाभी होगी।

अब यहाँ यह इच्छा है कि घल वृत्त का चाप, गल परवलय का चाप, गघ परवलय की कोटि इन से जो गघल वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल निकालें।

११४ वें प्रक्रम में जो ऐसे क्षेत्रों के लिये फल का $\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ(य)}}^{\text{फा(य)}}$ तार ताय यह

समीकरण है इस में फा(य) = $\sqrt{4a(x + y)}$, फ(य) = $\sqrt{4a^2 - y^2}$, चा = नघ = $2a$, । और गा = 0 मानने से घलग का फल

$$= \int_0^{2a} \{ \text{फा(य)} - \text{फ(य)} \} \text{ताय}$$

$$= \int_0^{2a} \{ (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} - (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \} \text{ताय}$$

$$= \int_0^{2a} (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} - \int_0^{2a} (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय}$$

$$\text{परन्तु} = \int (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \frac{2}{3} \sqrt{a} (a + y)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{और} \int_0^{2a} (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} (2a)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \{ (2)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \} = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} (\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{और} \int (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = 2a^2 \text{ज्या}^{-1} \frac{y}{2a} + y \sqrt{(4a^2 - y^2)}$$

$$\text{इस लिये} \int_0^{2a} (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = a^2 \pi$$

ऊपर फल मान में इन का उत्थापन देने से

$$\text{फ} = \int_0^{2a} \{ (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} - (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \} \text{ताय}$$

$$= \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} (\sqrt{2} - 1) - a^2 \pi$$

यदि परवलय में भुज की गणना अ चिन्दु से करे तो १०५ प्रक्रम से

$$\text{अलन परवलयखण्ड का फल} = \frac{a \times 2a \times 2}{3} = \frac{4a^2}{3} \text{ और अगघ परवलयखण्ड}$$

$$\text{का फल} = \frac{२अघ \times गघ}{३} = \frac{२ \times ३अ(१२अ^२)^{\frac{३}{२}}}{३} = ४अ^३\sqrt{३} \quad | \quad \text{इन दोनों का}$$

$$\text{अन्तर नघगल वक्रचतुर्भुज का फल} = ४अ^३\sqrt{३} - \frac{४अ^३}{३} = \frac{४अ^३}{३}(\sqrt{२७}-१)$$

इस में वृत्त के चतुर्थांश घनल को अर्थात् $अ^३\pi$ इस को घटा देने से गलघ वक्र क्षेत्र का फल $= \frac{४अ^३}{३}(\sqrt{२७}-१) - अ^३\pi$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

इसी जगह यदि अल परवलय का चाप, कल, वृत्त का चाप, और कअ भुजान्तर से जो क्षेत्र है इस का फल अपेक्षित हो तो क्षेत्र से स्पष्ट है कि न से यदि क की ओर भुजगणना करें और भुज ही को कोटि मान लें तो यहाँ वृत्त का समीकरण $र^२ = ४अ^२ - य^२$ यह जो है उस से $य^२ = ४अ^२ - र^२$ और परवलय का समीकरण $र^२ = ४अ(अ-य)$ जो

$$\text{यह होगा उस से } य = अ - \frac{र^२}{४अ}$$

$$\text{अब ११५वें प्रक्रम से फा(र)} = \sqrt{४अ^२ - र^२} \quad | \quad \text{फ(र)} = अ - \frac{र^२}{४अ}$$

$$\text{चा} = २अ, \text{ गा} = ० \text{ और क्षेत्र का फल} = \int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ(र)}}^{\text{फा(र)}} \text{ताय तार}$$

$$= \int_0^{२अ} \left\{ \text{फा(र)} - \text{फ(र)} \right\} \text{तार} = \int_0^{२अ} \left\{ \sqrt{४अ^२ - र^२} - अ + \frac{र^२}{४अ} \right\} \text{तार}$$

$$\text{परन्तु } \int \sqrt{४अ^२ - र^२} \text{ तार} = २अ^२ \text{ज्या}^{-१} \frac{र}{२अ} + र\sqrt{४अ^२ - र^२}$$

$$\text{और } \int \left(अ + \frac{र^२}{४अ} \right) \text{ तार} = अर - \frac{र^३}{१२अ}$$

इस लिये

$$\int_0^{२अ} \left\{ \sqrt{४अ^२ - र^२} - \left(अ - \frac{र^२}{४अ} \right) \right\} \text{ तार} = अ^३\pi - २अ^३ + \frac{४}{३} अ^३$$

$$= अ^३\pi - \frac{४}{३} अ^३ \text{ यही फल हुआ ।}$$

इसे परवलयखण्ड नअल और वृत्तचतुर्थांश नकल के अन्तर पर से भी निकाल सकते हो । इस तरह से जहाँ पर जिन सीमाओं के भीतर फल अपेक्षित

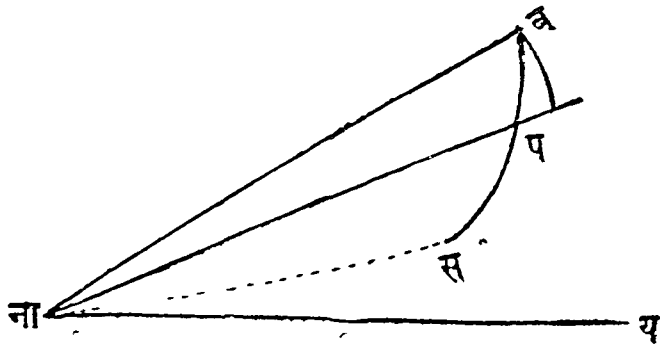
हो वहाँ पर क्षेत्र की आकृति से उन सीमाओं को अच्छी तरह से जाँच कर तब उन के उत्थापन से फल का साधन करो ।

जहाँ दोनों वक्रात्मक भुज एक ही वक्र के शाखा हो वहाँ पर ११४ और ११५ प्रक्रम की युक्ति बहुत ही काम की है जैसे किसी वक्र का यदि $(r - m - g)^2 = a^2 - y^2$ यह समीकरण हो तो इस पर से r का एक मान $r = m + g + \sqrt{(a^2 - y^2)}$ यह दूसरा $m + g - \sqrt{(a^2 - y^2)}$ यह होगा ।

यहाँ $f_1(y) = m + g + \sqrt{(a^2 - y^2)}$ और $f_2(y) = m + g - \sqrt{(a^2 - y^2)}$ मान ले तो $f_1(y) - f_2(y) = 2\sqrt{(a^2 - y^2)}$ इस लिये वक्रशाखा और कोट्यन्तर से उत्पन्न फल $2 \int_{-a}^a \sqrt{(a^2 - y^2)} dy$ तब यह होगा । यहाँ y का परमात्म

मान $-a$ और परमाधिक a मान ले तो पहले वक्र का सम्पूर्ण फल = $2 \int_{-a}^a \sqrt{(a^2 - y^2)} dy = \pi a^2$ यही होगा ।

११७। अक्षीय भुजयुग्म पर से वक्र का फलानयन ।



सपत्र वक्र में मान लो कि ना भ्रुवस्थान नाय नियत रेखा नाप = श्रु । $\angle यनाप = प$ और श्रु = फ(प) । तो यदि नासप वक्रत्रिवाहु का फल = आ हो तो चलनकलन के १५८ वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{नाआ}}{\text{नाप}} = \frac{\text{श्रु}}{२} = \frac{\{ \text{फ(प)} \}^2}{२}$$

इस लिये आ = $\frac{१}{२} \int \{ \text{फ(प)} \}^2 \text{ताप} + \text{स्थि}$ । यहाँ वक्र में स बिन्दु को कोई निश्चित बिन्दु समझो ।

$$\text{मानो कि } \int \frac{\{ \text{फ(प)} \}^2 \text{ताप}}{२} = \text{फा(प)}$$

तो $आ = फा(प) + स्थि \dots \dots \dots (१)$

कल्पना करो कि जब $प = प_२$ तब $आ = आ_२$ और जब $प = प_१$ तब $आ = आ_१$

इस लिये (१) समीकरण से

$$आ_२ - आ_१ = फा(प_२) - फा(प_१) = \frac{१}{३} \int_{प_१}^{प_२} \{ फ(प) \}^३ ताप$$

यदि श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान भ रक्खो और ध्रुवस्थान से स्पर्शरेखा पर पड़े हुए लम्ब का मान ल मानो तो त्रिकोणमिति से

$$ज्याभ = \frac{लं}{श्रु} = श्रु \frac{ताप}{ताचा} \text{ (चलनकलन के १५५ वे प्रक्रम से)}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } आ &= \frac{१}{३} \int श्रु^३ ताप = \frac{१}{३} \int श्रु^३ \frac{ताप}{ताचा} \cdot ताचा \\ &= \frac{१}{३} \int \frac{श्रु \cdot ल}{श्रु} ताचा = \frac{१}{३} \int ल ताचा \dots \dots \dots (२) \end{aligned}$$

यहाँ ल का मान चा के फल रूप में वा $\frac{ताचा}{ताल}$ का मान ल के फल रूप में जानने से आ का मान चा वा ल के फल रूप में जान सकते हो ।

$$आ = \frac{१}{३} \int ल ताचा = \frac{१}{३} \int ल \frac{ताचा}{ताश्रु} ताश्रु = \frac{१}{३} \int \frac{लश्रु ताश्रु}{\sqrt{(श्रु^२ - ल^२)}} \dots \dots (३)$$

७५ प्रक्रम के (६)वें समीकरण से ।

ऊपर दिखलाये हुए तीनों समीकरण पर से अनेक वक्र का फल जान सकते हैं ।

११८। सामासिक सर्पिल का फलानयन (जिस वक्र के समीकरण वा नाम इत्यादि मे संशय पड़े तो चलनकलन का २८६ प्रक्रम देखना चाहिये) ।

यहाँ $श्रु = अ इ क$ इस लिये ११७ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$आ = \frac{१}{३} \int अ^२ इ क = \frac{अ^२ क}{४ इ क} + स्थि ।$$

$$\text{और } आ_२ - आ_१ = \frac{अ^२ क}{४} \left[\frac{२प_२}{इ क} - इ \frac{२प_१}{क} \right] = \frac{क}{४} (श्रु_२^३ - श्रु_१^३)$$

इस लिये $श्रु_२, श्रु_१$ ये दो भुज और तदन्तर्गत वक्र का चाप इन से जो क्षेत्र होगा उस का फल $\frac{क}{४} (श्रु_२^३ - श्रु_१^३)$ यही होगा ।

११९। अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन ।

चलनकलन के १०८ प्रक्रम से ।

यहाँ $\theta = \frac{अ}{कोज्या^{\frac{१}{२}}}$ इस लिये

$$\begin{aligned} आ &= \frac{अ^2}{२} \int \frac{ताप}{कोज्या^{\frac{१}{२}} \pi} = अ^2 \int (१ + स्प^2 \frac{१}{२} \pi) तास्प \frac{१}{२} \pi \\ &= अ^2 (स्प^{\frac{१}{२}} \pi + \frac{स्प^{\frac{१}{२}} \pi}{२}) + स्थि । \end{aligned}$$

इस लिये $आ_२ - आ_१ = अ^2 (स्प^{\frac{१}{२}} \pi_२ + \frac{स्प^{\frac{१}{२}} \pi}{२}) - अ^2 (स्प^{\frac{१}{२}} \pi_१ - \frac{१}{२} स्प^{\frac{१}{२}} \pi_१)$

इस में यदि $\pi_१ = ०$ और $\pi_२ = \frac{\pi}{२}$ तो

$आ_२ - आ_१ = अ^2 (१ + \frac{१}{२}) = \frac{३}{२} अ^2 = \frac{३}{२} \frac{अ \times २ अ}{१}$ अर्थात् परवलय के नाभिग कोटि, तत्सम्बन्धि शिरःस्थान से भुज और परवलय का चाप इन से बने क्षेत्र का फल $\frac{३}{२} अ \times २अ$ यह वही सिद्ध हुआ जो १०५ वें प्रक्रम से सिद्ध होता है ।

१२०। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण $\theta = अ(प + ज्याप)$ यह है उस का फलानयन ।

यहाँ $आ = \frac{१}{२} अ^2 \int (प + ज्याप)^2 ताप = \frac{अ^2}{२} \int (प^2 + २प ज्याप + ज्या^2 प) ताप$

परन्तु $\int प ज्याप = -पकोज्याप + ज्याप$ ।

और $\int ज्या^2 प ताप = \frac{१}{२} \int (१ - कोज्या^2 प) ताप = \frac{१}{२} (प - \frac{ज्या^2 प}{२})$

इस लिये

$आ = \frac{अ^2}{२} \left\{ \frac{प^2}{२} - २पकोज्याप + २ज्याप + \frac{प}{२} - \frac{१}{२} ज्या^2 प \right\} + स्थि$

यहाँ यदि ० और $\frac{\pi}{२}$ के बीच प के मान में फल लावे तो

$फल = \frac{अ^2}{२} \left(\frac{१}{२} \frac{३}{२} + \frac{१}{२} + २ \right) ।$

१२१। यदि वक्र का अक्षीय समीकरण $\theta = २ अ \frac{कोज्याप - \sqrt{(कोज्या^2 प)}}{ज्याप}$

ऐसा हो तो

$आ = २ अ^2 \int \frac{कोज्या^2 प + को ज्या^2 प - २ को ज्याप \sqrt{(कोज्या^2 प)}}{ज्या^2 प} ताप$

$$= 2a^2 \int \frac{\text{कोज्या}^2\phi + \text{कोज्या}2\phi}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} - 4a^2 \int \frac{\text{कोज्या}\phi \sqrt{\text{कोज्या}2\phi}}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप}$$

$$\text{परन्तु } \int \frac{\text{कोज्या}^2\phi + \text{कोज्या}2\phi}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} = \int (2\text{कोस्प}^2\phi - 1) \text{कोछे}^2\phi \text{ताप}$$

$$= \text{कोस्प}\phi - \frac{2}{3} \text{कोस्प}^3\phi ।$$

$$\text{और } \int \frac{\text{कोज्या}\phi \sqrt{(\text{कोज्या}2\phi)}}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} = \int \frac{\sqrt{(1 - 2\text{ज्या}^2\phi)} \text{ताज्या}\phi}{\text{ज्या}^3\phi}$$

इस में मानो कि ज्या $\phi = \frac{1}{2}$ तो

$$\int \frac{\sqrt{(1 - 2\text{ज्या}^2\phi)}}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} = - \int \sqrt{(d^2 - 2)} d\text{ताद}$$

$$= -\frac{1}{3} (d^2 - 2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\text{ज्या}^2\phi} - 2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

$= -\frac{1}{3} (\text{कोछे}^2\phi - 2)^{\frac{3}{2}}$ इन का उत्थापन आ में देने से

$$\text{आ} = 2a^2 \text{कोस्प}\phi - \frac{4a^2}{3} \text{कोस्प}^3\phi + \frac{4a^2}{3} (\text{कोछे}^2\phi - 2)^{\frac{3}{2}} + \text{स्थि}$$

$$= 2a^2 \text{कोस्प}\phi + \frac{4a^2}{3} \left\{ (\text{कोछे}^2\phi - 2)^{\frac{3}{2}} - \text{कोस्प}^3\phi \right\} + \text{स्थि}$$

$$= 2a^2 \text{कोस्प}\phi + \frac{4a^2}{3} \left\{ \frac{(1 - 2\text{ज्या}^2\phi)^{\frac{3}{2}} - \text{ज्या}^3\phi \text{कोस्प}^3\phi}{\text{ज्या}^3\phi} \right\} + \text{स्थि}$$

$$= 2a^2 \text{कोस्प}\phi + \frac{4a^2}{3} \frac{(\text{कोज्या}2\phi)^{\frac{3}{2}} - \text{कोज्या}^3\phi}{\text{ज्या}^3\phi} + \text{स्थि}$$

१२२। जिस सर्पिल का अक्षीयसमीकरण $\text{श्रु} = a\phi^n$ यह है उस का फलानयन ।

$$\text{यहाँ आ} = \frac{1}{3} \int \text{श्रु}^2 \text{ताप} = \frac{1}{3} \int a^2 \phi^{2n} \text{ताप} = \frac{a^2}{2} \int \phi^{2n} \text{ताप}$$

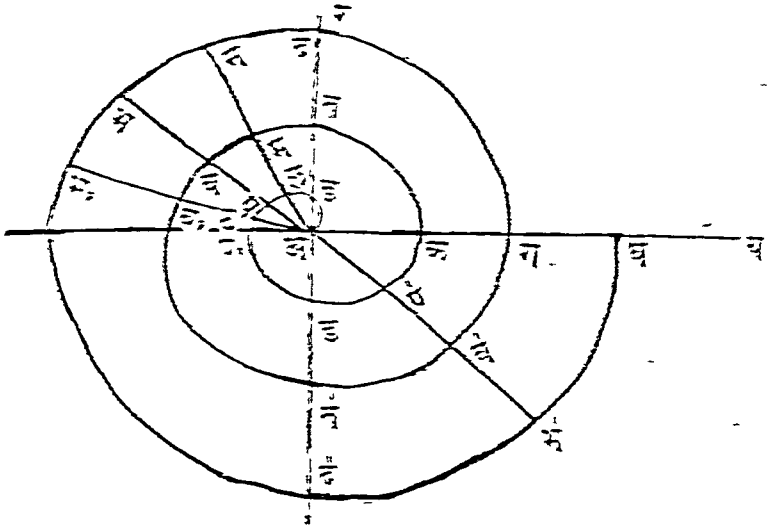
$$= \frac{a^2}{2(2n+1)} \phi^{2n+1} + \text{स्थि} = \frac{a^2 \phi^{2n} \times \phi}{2(2n+1)} + \text{स्थि} = \frac{\text{श्रु}^2 \times \phi}{2(2n+1)} + \text{स्थि}$$

$$= \frac{\text{श्रु}^2 \times \left(\frac{\text{श्रु}}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}{2(2n+1)} + \text{स्थि} = \frac{\text{श्रु}^{\frac{2n+1}{n}}}{2a^{\frac{1}{n}}(2n+1)} + \text{स्थि}$$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से जब $\phi = 0$, $\text{श्रु} = 0$ और $\text{फल} = 0$ इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा । इस में यदि $n = 1$ तो सर्पिल आर्किमिडिज़ का हो जायगा इस की

आकृति चलन कलन के २८६ प्रक्रम में लिखी है यहाँ भी बोध के लिये तीरे लिखा है ।

इस में अ ध्रुव, अय स्थिर रेखा जिस से प की गणना है । य से त अं और घन गणना है । जब प = ० तब श्रु = अ.प = ० । जब प = ६० तब श्रु = ६० = अड । जब प = ९० तब श्रु = अग = अय ।



इसी तरह जब प = २० तब श्रु = २ अ = अक । इस लिये अ के चारों ओर श्रुति के एक बार घूमने में अडलपट्टय ३ अ का लफ्ट उत्पन्न हुआ ।

इस तरह और अक श्रुति से जो क्षेत्र बना है उसका फल ऊपर फल के

समीकरण में अर्थात् $\frac{3अ - १}{१}$ इस में न के स्थान में १ और श्रु के स्थान में $२अ (२अ + १)$

स्थान में $२अ =$ का उत्पन्न देने से $\frac{श्रु^२}{६अ} = \frac{६अ \times अ^२}{६अ} = \frac{४अ^३}{३} = \frac{१ \times (२अ)^३}{३}$
 $= \frac{४अ^३}{३}$ ऐसा होगा यदि श्रु = २ अ = । और जब श्रुति का जो फल होगा तब ४

$= ४ अ^३ = २श्रु$ इस का फल में उत्पन्न देने से $\frac{१ (२श्रु)^३}{३श्रु}$ यह मान जो

आयेगा इस में अ के चारों ओर श्रुति के दो बार घूम जाने के कारण अडलपट्टय घट एक दो बार आजायगा इस लिये श्रुति के दो बार फेरा करने में

संश्लि का ठीक फल $= \frac{१ (२श्रु)^३}{३श्रु} - \frac{४अ^३}{३} = \frac{४अ^३}{३}$ यह होगा और

$$\text{दोनों फेरों के चापों के अन्तर में } \frac{9\pi\theta^2}{3} - \frac{\pi\theta^2}{3} = \frac{8\pi\theta^2}{3}$$

$= 2\pi\theta^2$ यह फल होगा ।

इसी तरह श्रुति के न वार फेरा करने में $\theta = n\theta$ और $n-1$ वार फेरा करने में $\theta = (n-1)\theta$ ।

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \theta \text{ के } n \text{ वार फेरा करने में फल} &= \frac{\pi}{3} \frac{(n\theta)^2 - (n-1)^2\theta^2}{\theta} \\ &= \frac{\pi\theta^2}{3} \left\{ n^2 - (n-1)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{और } n+1 \text{ वार फेरा करने में फल} = \frac{\pi\theta^2}{3} \left\{ (n+1)^2 - n^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } n \text{ और } n+1 \text{ वार फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर में} \\ \text{फल} &= \frac{\pi\theta^2}{3} \left\{ (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2n^2 \right\} = \frac{\pi\theta^2}{3} \times 4n = 2n\pi\theta^2 \end{aligned}$$

= प्रथम और दूसरे फेरे के चापों के अन्तर सम्बन्धी फल का n गुना यह सिद्ध होता है ।

इस सर्पिल के विषय में आगे कुछ और विचार किया जायगा ।

१२३। इलामूलक के फल का आनयन ।

यहाँ $\theta^2 = 2$ क कोज्या २ ष

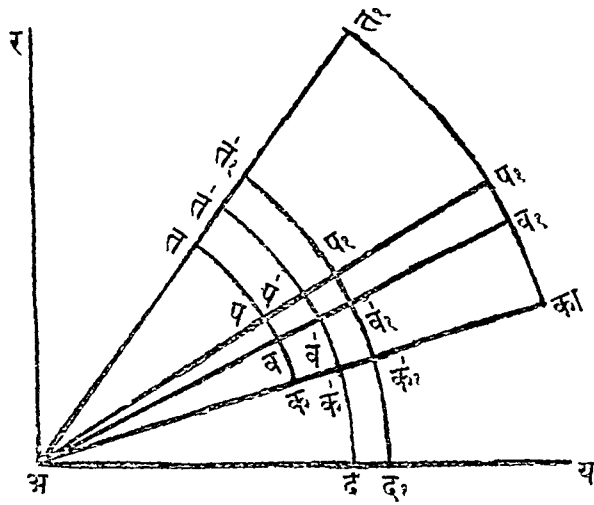
$$\text{इस लिये आ} = \frac{2}{2} \int \text{कोज्या } 2 \text{ ष ताष} = \frac{2}{2} \text{ज्या } 2 \text{ ष} + \text{स्थि} ।$$

यहाँ वक्र के लक्षण से जब $\phi = 0$ तब $\text{आ} = 0$ इस लिये $\text{स्थि} = 0$ ।

तब $\text{आ} = \frac{2}{2} \text{ज्या } 2 \text{ ष}$ इस में ϕ के स्थान में $\frac{\pi}{4}$ का उत्थापन देने से

चतुर्थांश फल $= \frac{2}{2}$ इस को ४ से गुणने से संपूर्ण इलामूलक का फल $= 2$ क

१२४। दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन । कल्पना करो कि अ ध्रुवस्थान और अय, अर अक्ष से जो काव, प, त, कवपत वक्र के चाप और काक, तत, श्रुत्यन्तर से क्षेत्र है उस के फल का ज्ञान करना है ।



अव_१, अप_१ अत्यन्त निकट दो श्रुति रेखा खींचो । अव = श्रु, अप = श्रु + Δ श्रु । अव_२ = श्रु_२ । अप_२ = श्रु_२ + Δ श्रु_२ । और \angle व_१ अप_१ = Δ प । और कवपत वक्र का समीकरण श्रु = फ(प) और का व_१प_१त_१ का समीकरण श्रु_२ = फ_२(प) समझो तो पव और प_२व_२ को अत्यल्प होने के कारण सरल रेखा मान लेने से

अकव, अकप वक्र त्रिभुज का अन्तर = Δ अवप = $\frac{१}{३} \Delta$ प श्रु (श्रु + Δ श्रु) और काअव_२ काअप_२ का अन्तर = Δ अव_२प_२ = $\frac{१}{३} \Delta$ प श्रु_२(श्रु_२ + Δ श्रु_२)

इस लिये दोनों का अन्तर = काकपप_२ - काकवव_१ = व_२वपप_२ = Δ आ = $\frac{१}{३} \Delta$ प { श्रु_२(श्रु_२ + Δ श्रु_२) - श्रु(श्रु + Δ श्रु) }

$$\text{इस लिये } \frac{\Delta \text{आ}}{\Delta \text{प}} = \frac{१}{३} \{ \text{श्रु}_2(\text{श्रु}_2 + \Delta \text{श्रु}_2) - \text{श्रु}(\text{श्रु} + \Delta \text{श्रु}) \}$$

इसमें प मान शून्य मानने से श्रु_२ = ०, श्रु = ०, इस लिये

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताप}} = \frac{१}{३} (\text{श्रु}_2^2 - \text{श्रु}^2) = \frac{१}{३} [\{ \text{फा}(प) \}^2 - \{ \text{फ}(प) \}^2]$$

$$\text{इस लिये आ} = \frac{१}{३} \int [\{ \text{फा}(प) \}^2 - \{ \text{फ}(प) \}^2] \text{ताप}$$

यदि \angle यअका = अ_१, \angle यअत = क_१ तो काकवपतत,प,व,का का फल आ =

$$\frac{१}{३} \int_{\text{प}_1}^{\text{क}_1} [\{ \text{फा}(प) \}^2 - \{ \text{फ}(प) \}^2] \text{ताप} \quad (१)$$

$$\text{जब } \int \text{श्रु ताश्रु} = \frac{\text{श्रु}^2}{२} \pm \text{स्थि इस लिये } \int \frac{\text{फा}(प)}{\text{फ}(प)} \text{श्रु ताश्रु}$$

= $\frac{1}{2} [\{ \text{फा}(p) \}^2 - \{ \text{फ}(p) \}^2]$ इस पर से (१) समीकरण को द्विगुण चलानयन की रीति से $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \frac{\text{फा}(p)}{\text{फ}(p)} \text{श्रु ताश्रु ताष}$ ऐसे लिख सकते हो ।

१२५। इसी जगह यदि $p = \text{फ}(\text{श्रु})$, $p_1 = \text{फा}(\text{श्रु})$ ऐसे दो समीकरण के वक्र के चापों से और $\text{श्रु} = \text{अ}$, $\text{श्रु}_1 = \text{क}$ ऐसे समीकरण के दो वृत्तों के चापों से वने क्षेत्र का फल जानना हो तो मान लो कि ककककका , ततततत , दो वक्र के चाप और कवपत , $\text{कावप}_1\text{त}_1$ दो वृत्त के चाप हैं जिन का अ केन्द्र है । अ केन्द्र से दकवपत , और $\text{दकव}_1\text{प}_1\text{त}_1$ वृत्त का चापखण्ड बनावो जिनके व्यासार्ध श्रु , $\text{श्रु}_1 + \text{श्रु}$ हैं । तो चलनकलन के १५९ वें प्रक्रम से $\text{ततततप}_1\text{व}_1\text{ककवपत}$ का फल = आ

$$= \frac{ \{ \text{श्रु} (p_1 - p) + (\text{श्रु} + \Delta \text{श्रु})(p_1 - p) \} \Delta \text{श्रु} }{2}$$

$$\frac{\text{आ}}{\text{श्रु}} = \frac{\text{श्रु}(p_1 - p) + (\text{श्रु} + \Delta \text{श्रु})(p_1 - p)}{2}$$

इस लिये

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताश्रु}} = \text{श्रु} (p_1 - p) = \text{श्रु} \{ \text{फा}(\text{श्रु}) - \text{फ}(\text{श्रु}) \}$$

इस लिये अभीष्ट क्षेत्र का फल

$$= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{श्रु} \{ \text{फा}(\text{श्रु}) - \text{फ}(\text{श्रु}) \} \text{ताश्रु} = \text{आ} \quad \dots \quad (१)$$

जब $\int \text{श्रुताष} = \text{श्रु} \int \text{ताष} = \text{श्रुप}$, श्रु को स्थिर मानसे से

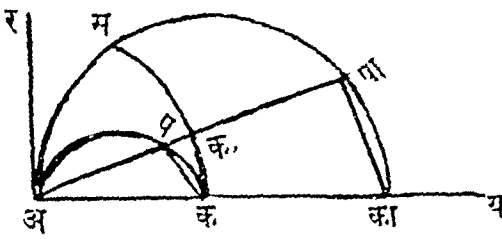
$$\text{इस लिये } \int \frac{\text{फा}(\text{श्रु})}{\text{फ}(\text{श्रु})} \text{श्रुताष} = \text{श्रु} \{ \text{फा}(\text{श्रु}) - \text{फ}(\text{श्रु}) \}$$

इस लिये द्विगुणचलानयन की रीति से ऊपर के फल को

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \frac{\text{फा}(\text{श्रु})}{\text{फ}(\text{श्रु})} \text{श्रुताष ताश्रु} \text{ ऐसे लिख सकते हो । यदि यहाँ दो वक्रों}$$

के चापान्तर्गत सीमित दोनों कर्णों के अनेक विभाग कर ध्रुव बिन्दु से प्रत्येक विभाग पर गया ऐसा अनेक वृत्त बना डालो और वक्र चापों का भी अनेक विभाग कर प्रति विभागों में जो रेखा लगा दो तो रेखा और वृत्त के चापखण्डों से अनेक चतुर्भुज होंगे जिन में किसी एक का फल = श्रुप यह होगा ।

१२६। जैसे अपक, अपाका वृत्तार्द्ध के चापो से और कका रेखा से बने



क्षेत्र का फल जानाना है तो मानो
 अक = ग, अका = च
 \angle काअपा = प, तो अप = श्रु =
 गकोज्याप, अपा = श्रु, = चकोज्याप

इस लिये १२४ प्रक्रम से

$$\text{अभीष्ट फल} = \int_{अ}^{क} \frac{फा(प)}{फ(प)} \text{श्रुताश्रु ताप} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{चकोज्याप}}{\text{गकोज्याप}} \text{श्रुताश्रु ताप}$$

$$\text{अब यहाँ } \int \frac{\text{चकोज्याप}}{\text{गकोज्याप}} \text{श्रुताश्रु} = \frac{1}{2} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) \text{कोज्या}^2 \text{प}$$

$$\text{इस लिये अभीष्ट फल} = \frac{1}{2} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^2 \text{प ताप}$$

$$\text{इस में } \int \text{काज्या}^2 \text{प ताप} = \int \frac{1 + \text{कोज्या}^2 \text{प}}{2} \text{ताप} = \frac{\text{प}}{2} + \frac{\text{ज्या}^2 \text{प}}{4}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^2 \text{प ताप} = \frac{\pi}{4} \text{ इस का उत्थापन फल में देने से फल} =$$

$$\frac{\pi}{8} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) ।$$

इसी क्षेत्र का यदि अक व्यासार्द्ध से बना कक, स वृत्त चाप से दो चण्ड करें तो पहले अस, रुक, अपक, वृत्त चापो से बने क्षेत्र का फल १२५ वें प्रक्रम से, मान लो कि कपस एक वृत्त का चाप, और दूसरे वृत्त का अ बिन्दु रूप चाप, एक वक्र अपक वृत्तार्द्ध चाप, और दूसरा अस वड़े वृत्तार्द्ध का चाप इन से बना हुआ क्षेत्र है। यहाँ श्रु = गकोज्याप । और दूसरी श्रु = चकोज्याप

$$\text{इस लिये प} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}, \text{ और प} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}, \text{ क} = \text{ग}, \text{ अ} = 0$$

इन का उत्थापन देने से

$$\int_{अ}^{क} \int_{फ}^{पा} \frac{\text{श्रु}}{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}} \text{श्रुताप ताश्रु} = \int_0^{\text{ग}} \int_{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}}^{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}} \text{श्रुतापताश्रु}$$

$$\text{यहाँ } \int \frac{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}}{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}} \text{श्रुताथ} = \text{श्रु} \left[\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} \right]$$

$$\text{और } \int \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{ताश्रु} = \frac{1}{2} \left\{ (2\text{श्रु}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{श्रु} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{श्रु}^2)} \right\} ।$$

$$\int \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} \text{ताश्रु} = \frac{1}{2} \left\{ (2\text{श्रु}^2 - \text{ग}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} - \text{श्रु} \sqrt{(\text{ग}^2 - \text{श्रु}^2)} \right\}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\text{ग}} \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{ताश्रु} = \frac{1}{2} \left\{ (2\text{ग}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{ग}}{\text{च}} - \text{ग} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} + \text{च}^2 \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{और } \int_0^{\text{ग}} \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} \text{ताश्रु} = \frac{1}{2} \left\{ \text{ग}^2 \frac{\pi}{2} \right\}$$

इस लिये

$$\int_0^{\text{ग}} \int_0^{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{श्रुताथताश्रु}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (2\text{ग}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{ग}}{\text{च}} - \text{ग} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} + \frac{\pi}{2} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) \right\} \text{ यह एक खण्ड का फल हुआ ।}$$

अब कस वृत्तचाप, कास वृत्तचाप, और कका रेखा से उत्पन्न क्षेत्र के फल साधन में एक वक्र के चाप को कका रेखा समझो और दूसरे वक्र को असका मान लो तो $y = 0 = f(\text{श्रु})$, $y_1 = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} = f_1(\text{श्रु})$, $k = \text{च}$, $a = \text{ग}$ ।

इसका उत्थापन १२५ वें प्रक्रम के (१) समीकरण के दूसरे रूप में देने से

$$\int_a^k \int_{f(\text{श्रु})}^{f_1(\text{श्रु})} \text{श्रुताथताश्रु} = \int_0^{\text{च}} \int_0^{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{श्रुताथताश्रु}$$

यहाँ भी पहले खण्ड के फल साधन के ऐसा

$$\int_0^{\theta} \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{श्रुताप} = \text{श्रु कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}$$

$$\int \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{ताश्रु} = \frac{1}{\text{च}} \left\{ (2\text{श्रु}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{श्रु} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{श्रु}^2)} \right\}$$

इस लिये

$$\int_{\text{च}}^{\text{ग}} \int_0^{\theta} \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{श्रु ताष ताश्रु}$$

$$= \int_{\text{ग}}^{\text{च}} \text{श्रु कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{ताश्रु}$$

$$= \frac{1}{\text{च}} \left\{ \text{ग} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} - (2\text{ग}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{ग}}{\text{च}} \right\}$$

यही दूसरे खण्ड का फल हुआ ।

अब इन दोनों खण्डों का योग करो तो $\frac{\pi}{2}(\text{च}^2 - \text{ग}^2)$ यह सम्पूर्ण क्षेत्र का फल ठीक पहले ही के तुल्य आया ।

१२७। यदि अक्षीय समीकरण पर से ११५ प्रक्रम के अलक क्षेत्र का फल साधन करे तो यहाँ न को ध्रुव स्थान मानने से परवलय का समीकरण

$\text{श्रु} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{प}}{2}}$ जहाँ प का मान नक रेखा से लिया गया है । और वृत्त

का अक्षीय समीकरण $\text{श्रु} = 2\text{अ}$ । इस लिये पहले श्रु के वश चलानयन

करने से अलक का फल = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\text{अछै}^{\frac{\text{प}}{2}}}^{2\text{अ}} \text{श्रु ताश्रु ताप}$

इसी जगह यदि प के वश से प_1 और प_2 मान्यन करें तो प_1

$$= \text{कोज्या}^{-1} \frac{2\text{अ} - \text{श्रु}}{\text{श्रु}} \text{मान लेने से अलक का फल} = \int_{\text{अ}}^{2\text{अ}} \int_0^{\text{प}_1} \int \text{श्रुतापताश्रु} ।$$

यदि घलग का फल अपेक्षित हो तो घग का अक्षीय समीकरण

$\text{श्रु} = \frac{2\text{अ}}{\text{कोज्याप}}$ और नग = 4अ , \angle कनग = $\frac{2\pi}{3}$, और मान लो कि प_1

$$= \text{कोज्या}^{-1} \frac{2\text{अ} - \text{श्रु}}{\text{श्रु}} \text{और } \text{प}_2 = \left[\frac{-2\text{अ}}{\text{श्रु}} \right] । \text{अब यहाँ पहले प के वश}$$

चलानयन करने से घलग का फल = $\int_{2a}^{2a+p} \int_{\phi}^{\psi} \text{श्रु ताश्रुताश्रु}$ । इसी का

फल नग रेखा से दो भाग कर पृथक् पृथक् लावे तो पहले उस

खण्ड का फल जिस में लग चाप है $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{2a}^{2a+p} \text{अच्छे}^2 \text{श्रुताश्रुताप}$

यह होगा फिर दूसरे खण्ड का फल = $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \int_{2a}^{2a+p} \text{अच्छे}^2 \text{श्रुताश्रुताप}$ यह होगा

और इन दोनों का योग ठीक पहले के वरावर क्षेत्र फल निकल आवेगा । इस तरह से जहाँ पर जैसा सुभीता जान पड़े तहाँ पहले श्रु के वश अथवा ष के वश चलानयन करो ।

१२८। १२२ प्रक्रम में जो आर्किमिडिज़ का सर्पिल है उस में वक्र को एक वक्रचाप और भः भन को दूसरे वक्र का चापखण्ड मान लो तो १२४ प्रक्रम की युक्ति से वः भः नम का फल = $\int_{\phi}^{\psi} \int \frac{\text{फा}(\phi)}{\text{फ}(\phi)} \text{श्रु ताश्रु ताप}$

ऐसा होगा । यहाँ फ(ϕ) = अϕ और फा(ϕ) = अ(ϕ + २π) मानो तो

$$\int \frac{\text{फा}(\phi)}{\text{फ}(\phi)} \text{श्रु ताश्रु} = \frac{1}{2} \left[\{ \text{फा}(\phi) \}^2 - \{ \text{फ}(\phi) \}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 \phi^2 + 4a^2 \phi \pi + 4a^2 \pi^2 - a^2 \phi^2) = \frac{a^2}{2} \left\{ (\phi + 2\pi)^2 - \phi^2 \right\}$$

$$\text{और } \int \frac{a^2}{2} \left\{ (\phi + 2\pi)^2 - \phi^2 \right\} \text{ताप} = \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{(\phi + 2\pi)^3}{3} - \frac{\phi^3}{3} \right\}$$

इस लिये

$$\int_{\phi}^{\psi} \int \frac{\text{फा}(\phi)}{\text{फ}(\phi)} \text{श्रुताश्रुताप} = \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{(\phi_2 + 2\pi)^3 - \phi_2^3}{3} - \frac{(\phi_1 + 2\pi)^3 - \phi_1^3}{3} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{3\phi_2^2\pi + 12\phi_2\pi^2 + 8\pi^3 - 3\phi_1^2\pi - 12\phi_1\pi^2 - 8\pi^3}{3} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ 2\pi(\phi_2^2 - \phi_1^2) + 4\pi^2(\phi_2 - \phi_1) \right\}$$

यह फल हुआ । इस में यदि $p_2 = 2n\pi$ और $p_1 = 2\pi(n-1)$ हो तो n और $n+1$ वार श्रु के फेरा करने में दोनों चापो के अन्तर का फल

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ 2\pi(p_2 - p_1) + 4\pi^2(p_2 - p_1) \right\} \\ = \frac{a^2}{2} \left\{ 2\pi(2n^2\pi - 2\pi^2(n-1)) + 4\pi^2 \right\} \\ = \frac{a^2}{2} (16n^2\pi^2) = 8na^2\pi^2 = 2\pi n \times 4\pi a^2 = 2\pi n \text{श्रु}^2$$

यही ठीक १२२वें प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था परन्तु इस क्रिया से बहुत ही स्पष्ट रूप से उपपन्न होता है और १२२वें प्रक्रम में जो युक्ति लिखी है वह बड़े गाम्भीर्य विचार करने से तब मन में बैठती है ॥

१२९। अपचक्रालद के अक्षीय समीकरण पर से फलानयन । (११७)

प्रक्रम का (३) समीकरण देखो) फल = आ = $\frac{1}{2} \int \frac{\text{लश्रुताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}}$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से $\text{ल} = \frac{g\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2)}}$ (८२ प्रक्रम देखो)

इस लिये फल = $\frac{1}{2} \int \frac{g\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}\text{श्रुताश्रु}}{\text{अ}\sqrt{(g^2 - \text{श्रु}^2)}} = \frac{g}{2\text{अ}} \int \frac{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{(g^2 - \text{श्रु}^2)}}$

= $\frac{g}{2\text{अ}} \int \frac{\text{व}^2\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - \text{व}^2)}}$ यदि $\text{व}^2 = \text{श्रु}^2 - \text{अ}^2$

अव $\int \frac{\text{व}^2\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - \text{व}^2)}} = \int \frac{\text{व}^2 - (g^2 - \text{अ}^2)}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - \text{व}^2)}} \text{ताव}$

+ $(g^2 - \text{अ}^2) \int \frac{\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - \text{व}^2)}} = (g^2 - \text{अ}^2) \int \frac{\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - \text{व}^2)}}$

- $\int \sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - \text{व}^2)}\text{ताव} = \frac{g^2 - \text{अ}^2}{2} \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{व}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2)}}$

- $\frac{\text{व}\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - \text{व}^2)}}{2} = \frac{g^2 - \text{अ}^2}{2} \text{ज्या}^{-1} \frac{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2)}}$

- $\frac{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}\sqrt{(g^2 - \text{श्रु}^2)}}{2}$ इस पर से

$\text{श्रु} = \text{अ}$ और $\text{श्रु} = g$ इस के भीतर का मान = $\frac{g^2 - \text{अ}^2}{2}$ इस

को $\frac{g}{2a}$ से गुण देने से $\frac{g}{2a} \cdot \frac{g^2 - a^2}{2}$ इस में g के स्थान में $a + 2k$ का उत्थापन देने से

$\frac{(a + 2k) k (a + k)\pi}{2a}$ इस को ढूना करने से चलितवृत्त के एक वार घूम जाने से जो वक्र का अवयव और तत्सम्बन्धी श्रुतियाँ से उत्पन्न क्षेत्र का फल $= \frac{(a + 2k) k (a + k)\pi}{a}$ ।

यहां पर दोनो श्रुतियाँ स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध $= a$ है और तदन्तर्गत स्थिरवृत्त का चाप चलितवृत्त के परिधि $2k\pi$ तुल्य है इस लिये उस वृत्तखण्ड का फल $= ak\pi$ इस को ऊपर के फल में घटा देने से स्थिरवृत्त के परिधि और वक्र चाप से उत्पन्न फल

$$= \frac{(a + 2k) k (a + k)\pi}{a} - ak\pi$$

$$= \frac{k(a^2 + 2ak + 2k^2)\pi - a^2k\pi}{a} = \frac{\pi k^2}{a} (2a + 2k)$$

इसी तरह से अतिचक्रालद में यदि $a > k$ तो k का चिह्न बदल देने से फल $\frac{\pi k^2}{a} (2a - 2k)$ यह होगा ।

१३०। एक वक्र का $f\left(\frac{y}{a}, \frac{r}{k}\right) = g \dots (१)$ यह समीकरण और दूसरे वक्र का $f(y, r) = g$ यह समीकरण है इस को (२) कहो अब इन दोनो वक्रो के किसी साजात्य अवयव के फलों का सम्बन्ध जानना है ।

(१) में यदि $\frac{y}{a} = y'$ और $\frac{r}{k} = r'$ तो (१) में

$$ताय = अताय' इस लिये (२) का फल = \int र'ताय' = \int \frac{r}{k} \cdot \frac{ताय}{a} = \frac{१}{अक} \int रताय$$

अर्थात् (२) का फल $= \frac{१}{अक} \times (१) का फल$

इस लिये $अक \times (२) का फल = (१) का फल ।$

जैसे (१) दीर्घवृत्त में यदि केन्द्र को मूल बिन्दु मानो तो

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = १ \dots (१)$$

और वृत्त में $y^2 + r^2 = 1$ (जिस का व्यासार्ध = १ है) • (२)

इस लिये (२) का फल \times अक = (१) का फल

अर्थात् (१) का समग्र फल = (२) का समग्र फल \times अक = अक π
 $= \frac{अ}{क} अ^३ \pi$ यही पहले १०४ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था

$$(२) \text{ अतिपरवलय में } \frac{y^2}{अ^२} - \frac{r^2}{क^२} = १ \quad (१)$$

और समातिपरवलय में $y^2 - r^2 = १$ • (२)

इस लिये (२) का फल \times अक = (१) का फल ।

(३) जिस वक्र का $\left[\frac{y^2}{अ^२} + \frac{r^2}{क^२} \right]^२ = \frac{y^२}{त^२} + \frac{r^२}{म^२}$ यह समीकरण है उस
 के फल को जानना है । इस में यदि $y = अ^२ \sin^२$ और $r = क^२ \cos^२$ तो वक्र
 के समीकरण का रूपान्तर $(\sin^२ + \cos^२)^२ = \frac{अ^२ \sin^४}{त^२} + \frac{क^२ \cos^४}{म^२}$ (२)

अब इस के फल को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र का फल ऊपर की युक्ति से
 हो जायगा ।

(२) के फल जानने के लिये इस का अशुद्ध समीकरण बनावो तो

$$\text{शु}^४ = \frac{अ^४ \sin^४}{त^२} + \frac{क^४ \cos^४}{म^२}, \text{ शु}^४ \text{ का भाग दे देने से}$$

$$\text{शु}^४ = \frac{अ^४ \text{कोज्या}^४ \text{प}}{त^२} + \frac{क^४ \text{ज्या}^४ \text{प}}{म^२}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये फल} &= \frac{१}{३} \int \text{शु}^४ \text{ताप} = \frac{१}{३} \int \frac{अ^४ \text{कोज्या}^४ \text{प}}{त^२} \text{ताप} + \frac{१}{३} \int \frac{क^४ \text{ज्या}^४ \text{प}}{म^२} \text{ताप} \\ &= \frac{अ^४}{३त^२} \int \frac{१ + \text{कोज्या}^२ \text{प}}{२} \text{ताप} + \frac{क^४}{३म^२} \int \frac{१ - \text{कोज्या}^२ \text{प}}{२} \text{ताप} \\ &= \frac{अ^४}{३त^२} \int \left(\frac{प}{३} + \frac{\text{ज्या}^२ \text{प}}{२} \right) + \frac{क^४}{३म^२} \int \left(\frac{प}{३} - \frac{\text{ज्या}^२ \text{प}}{२} \right) \end{aligned}$$

प का मान ० और π मानने से

$$\text{चतुर्थांश फल} = \frac{अ^४}{३त^२} \frac{\pi}{४} + \frac{क^४}{३म^२} \frac{\pi}{४}, \text{ इस को } ४ \text{ गुना कर देने से समग्र}$$

$$\text{फल} = \frac{\pi}{३} \left[\frac{अ^४}{त^२} + \frac{क^४}{म^२} \right] \text{ और इस को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र}$$

$$\text{का समग्र फल} = \frac{\text{अकग}}{२} \left[\frac{\text{अ}^२}{\text{त}^२} + \frac{\text{क}^२}{\text{म}^२} \right]$$

ऊपर के सिद्धान्त अर्थात् $f\left(\frac{y}{\text{अ}}, \frac{r}{\text{क}}\right) = \text{ग}$ । $f(y, r) = \text{ग}$ इस में यदि $\text{अ} = \text{क}$ तो (१) का फल $= \text{अ}^२ \times (२)$ का फल ऐसा होगा अर्थात् दोनो वक्र सजातीय होंगे और (२) के फल को $\text{अ}^२$ से गुण देने से (१) का फल होगा । देखो ऐसे दो वक्रों में सजातीय भुज वा कोटि में $\text{अ}:१$ का सम्बन्ध रहेगा और फल में $\text{अ}^२:१$ इस का सम्बन्ध । इस लिये रेखा-गणित से जैसा सजातीय क्रजुवहुभुज क्षेत्रों में धर्म सिद्ध होता है वैसा ही ऊपर की युक्ति से सजातीय वक्रों में भी सिद्ध हुआ ।

१३१। वक्र चाप और वक्र के अवलत चाप से बने क्षेत्र का फलानयन । ९६ प्रक्रम के (१) और (२) क्षेत्र में $v_१$ व $v_२$ को तनिक सा उठावो तो दूसरा वक्रजातीयव्यासार्द्ध का मान होगा दोनों को बहुत पास होने से यदि $\text{ताव}_१$ मानो और $v_१$ के पास ही चलित बिन्दु मानो और इन दोनों व्यासार्द्धों से उत्पन्न कोण का मान $v_१$ मान लो तो स्वल्पान्तर से दोनों व्यासार्द्ध, और वक्र का चाप इन से बने वृत्तखण्ड का फल Δ आ $= \frac{१}{३} v_१ \Delta v_१$

$$\text{और } \frac{\Delta \text{आ}}{\Delta v_१} = \frac{१}{३} v_१ \text{ अव इस में } \Delta v_१ = ० \text{ मानो ती ठीक ठीक } \frac{\text{ताआ}}{\text{ताव}_१}$$

$= \frac{१}{३} v_१$ यह अभीष्ट क्षेत्र के फल का तात्कालिक सम्बन्ध $\text{ताव}_१$ के वश से उत्पन्न हुआ ।

यहाँ यदि आ को अवलत का चाप, वक्र का चाप, और दो वक्रजातीय-व्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्रका क्षेत्रफल समझो और दोनों वक्रजातीयव्यासार्द्ध सम्बन्धी $v_१$ का मान $v_२$, $v_२$ मान लो तो

$$\text{आ} = \frac{१}{३} \int_{v_२}^{v_१} v_१ v_२ \text{ताव}_१ \text{ यह होगा}$$

यहाँ $v_१$ वक्रजातीयव्यासार्द्ध के स्थान में $v_१ = \frac{\text{ताआ}}{\text{ताव}_१}$ (चलन-कलन के १७१वें प्रक्रम से) इस का उत्थापन दे दें तो

$$\text{आ} = \frac{१}{३} \int v_१ \text{ताआ} = \frac{१}{३} \int v_१ \frac{\text{ताआ}}{\text{ताव}_१} \text{ताव}_१ \text{ ऐसा होगा}$$

१३२। कातन्वली उसका अवलत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्र का फलानयन ।

यहाँ चा = ग · स्पव, (१४ प्रक्रम से)

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1} = \text{वि} = \text{ग छे}^3 \text{व}_1$$

$$\text{और } \text{आ} = \frac{1}{2} \int_{\text{व}_2}^{\text{व}_3} \text{वि}^2 \text{ता व}_1 = \frac{1}{2} \int_{\text{व}_2}^{\text{व}_3} \text{ग}^2 \text{छे}^6 \text{व}_1 \text{ता व}_1$$

$$= \frac{\text{ग}^2}{2} \int_{\text{व}_2}^{\text{व}_3} \text{छे}^6 \text{व}_1 \text{ता व}_1$$

$$\text{यहाँ } \int \text{छे}^6 \text{व}_1 \text{ता व}_1 = \text{स्पव}_1 + \frac{1}{3} \text{स्प}^3 \text{व}_1 + \text{स्थि}$$

इस पर से व₃, व₂ का इष्टमान मानने से अभीष्ट क्षेत्र का फल जान सकते हो ।

१३३। वक्र के प्रतिविन्दु सम्बन्धि स्पर्शरेखाओ के ऊपर कोई स्थिर विन्दु से (जो कि उसी धरातल मे है जिस मे कि वक्र है) लम्ब डाले और इन लम्बमूलों मे लगाकर एक वक्र रेखा कर दे तो इस वक्र को पहले वक्र का पाददल कहते है ।

जिस स्थिरविन्दु से लम्ब डाले गये है इसको पाददल का मूलविन्दु कहते है और जिस वक्र का पाददल वक्र बनावोगे उसे पाददल का मूलवक्र कहते है ।

१३४। पिछले प्रक्रमो से स्पष्ट है कि मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओ पर दो लम्ब डाले जायें तो पाददल का चाप और इन दोनो लम्बो से बने क्षेत्र का फल = $\frac{1}{2} \int \text{ल}^2 \text{ताप}$ (जहाँ कोई नियत रेखा और लम्ब से उत्पन्न कोण = प है) क्योकि पाददल मे मूल वक्र के स्पर्शरेखा पर जो मूलविन्दु से लम्ब डाला जायगा वह लम्बही श्रुति होगी ।

कल्पना करो कि अ, अ' दो मूलविन्दुओ से दो पाददल एकही मूलवक्र से बने हैं । और मूलवक्र के किसी दो स्पर्शरेखा पर दोनो मूलविन्दुओ से ल, ल' लम्ब डाले गये हैं । नियतरेखा समानान्तर है । अ मूलविन्दु से अ' की श्रुति, श्रु और श्रु और नियतरेखा से उत्पन्न कोण प₁ है तो प के दो मानो के भीतर पहले

पाददल का फल = आ = $\frac{1}{2} \int \text{ल}^2 \text{ताप}$, और प के उन्ही दो मानो के भीतर दूसरे

पाददल का फल = आ' = $\frac{1}{2} \int \text{ल}'^2 \text{ताप}$

परन्तु ल' = ल — श्रु कोज्या (प — प₁)

इस लिये $ल^२ = ल^२ + २लश्रु कोज्या (प-प_१) + श्रु^२कोज्या^२(प-प_१)$

इस लिये $आ = ३. \int ल^२ताप - \int श्रुलकोज्या (प-प_१)ताप$

$= ३. \int श्रु^२ कोज्या^२ (प-प_१)ताप$

$= आ - \int लश्रुकोज्या (प-प_१)ताप + ३. \int श्रु^२ कोज्या^२(प-प_१) ताप$

$= आ - \int लश्रु (कोज्याप कोज्याप_१ + ज्याप ज्याप_१) ताप$

$+ ३. \int श्रु^२ (कोज्याप कोज्याप_१ + ज्याप ज्याप_१)^२ताप$

$= आ - \int ल(यकोज्याप_१ + रज्याप) ताप$

$+ ३. \int (य^२कोज्या^२प + यरज्या^२प + र^२ज्या^२प) ताप$

यदि $य = श्रुकोज्याप_१$ । $र = श्रुज्याप_१$ (१)

(१) में $\int लकोज्यापताप = च$, $\int लज्यापताप = ज$

$३ \int कोज्या^२प ताप = त$, $३ \int ज्या^२पताप = न$, $३ \int ज्यापकोज्यापताप = म$

इन का उत्थापन दे देवो जहाँ सर्वत्र प की दोनो सीमाये एकही है तो $आ = आ - (चय + जग) + तय^२ + २मयर + नर^२$ (२)

१३५। कल्पना करो कि किसी वक्र का $अय^२ + कयर + गर^२ + घय + चर + फ = ०$ यह समीकरण है । इच्छा है कि यह पता लगावे कि यह कौन सा वक्र है।

यदि यह वक्र मूलविन्दु में भी गया होगा तो स्पष्ट है कि $फ = ०$ । कल्पना करो कि मूलविन्दु मे नहीं गया है तब फ का दोनों पक्षो मे भाग देने से लब्धिओ को क्रम से अ, क इत्यादि मान लेने से ऊपर के समीकरण का रूप

$$अ^१ य^२ + क^१ यर + ग^१ र^२ + घ^१ य चर + १ = ०$$

जिस विन्दु का वक्र के मूलविन्दु से त, द भुज कोटि है उसको मूलविन्दु मानने से वक्र का $भु = य = य^१ + त$, $र = र^१ + द$ इनका उत्थापन

$$अय^२ + कयर + गर^२ + घय + चर + फ = ० \quad \dots \quad (१)$$

इस में देने से

$$\begin{aligned} & अ(य^२ + २तय^१ + त^२) + क(य^१र^१ + य^१द + र^१त + तद) + ग(र^२ + २र^१द + द^२) \\ & + घय + घत + चर^१ + चद + फ \\ & = अय^२ + २तअय^१ + अत^२ + कय^१र^१ + कदय^१ + कत^१ + कतद + गर^२ + २गदर^१ \\ & + गद^२ + घय^१ + घत + चर^१ + चद + फ \\ & = अय^२ + कय^१र^१ + गर^२ + (२तअ + कद + घ)य^१ + (२गद + कत + च)र^१ + फ = ० \dots (२) \end{aligned}$$

$$\text{जहाँ } फ^१ = अत^२ + कतद + घत + चद + फ, \quad \dots \quad (३)$$

कल्पना करो कि इस में सम्भव है कि त, और द के ऐसे मान हैं कि य^१ र^१ के गुणक शून्य के तुल्य होते हैं तो

$$२तअ + कद + घ = ० \text{ और } २गद + कत + व = ०$$

$$\text{इन पर से } त = \frac{२गघ - कच}{क - ४अग}, \text{ और } द = \frac{२अग - कघ}{क - ४अग}$$

इस लिये निश्चय हुआ कि यदि क^१-४अग यह शून्य के तुल्य न हो तो त, द का मान ऐसा मान सकते हैं जिस पर से य^१, र^१ के गुणक शून्य हो। पहले मानो कि क^१-४अग यह शून्य नहीं है तो त, द के मान भी सान्त होंगे। और तव (२) का रूप अय^१ + कय^१र^१ + गर^१ + फ^१ = ० . . . (४)

अब यह (४) समीकरण दिखलाता है कि धन, य_१, र_१ के वा, ऋण य_१, र_१ के मान में फल एक ही होगा इस लिये (१) समीकरण के वक्र का दूसरा मूलविन्दु (जिम्हा का भु = त, को = द प्रथम मूलविन्दु के अभिप्राय से है) केन्द्र होगा।

त, द के मान का उत्थापन (३) में देने से

$$फ^१ = फ + \frac{गघ^१ + अग^१ + कगघ}{क^१ - ४अग} \text{ ऐसा होगा।}$$

(४) में स्वर चिह्न उड़ा देने से

$$अय + कय^१र + गर^१ + फ = ०, . . . (५)$$

इस में कल्पना करो कि मूल विन्दु तो वही है परन्तु य अक्ष नया पहले य अक्ष से प तुल्य कोण बनाने वाली रेखा को माना और इस पर मूल विन्दु पर जो रेखा लम्ब होगी वह नया र अक्ष माना तो इन अक्ष सम्बन्धी भुज = य^१, को = र^१ तो पहले अक्ष सम्बन्धी

य = य^१कोज्याप — र^१ज्याप, र = य^१ज्याप + र^१कोज्याप, इन का उत्थापन (५) में देने से

$$य^१(अकोज्या^१प + गज्या^१प + कज्यायकोज्याप)$$

$$+ र^१(अज्या^१प + गकोज्या^१प — कज्यायकोज्याप)$$

$$+ य^१र^१ \{ २(ग — अ)ज्यापकोज्याप + क(कोज्या^१प — ज्या^१प) \} + फ^१ = ०, (१)$$

मान लो कि य^१र^१ का गुणक शून्य है तो

$$२(ग — अ)ज्यायकोज्याप + क(कोज्या^१प — ज्या^१प) = ०$$

$$= (ग — अ)ज्या२प + ककोज्या२प$$

$$\text{इस लिये स्प२प} = \frac{क}{ग-अ} "$$

(७) वॉ दिखलाता है कि सर्वदा y का मान ऐसा मान सकते हैं जिस में y' का गुणक शून्य हो। y' के गुणक को शून्य करने से (६) वें का रूप y'' (अकोज्या^२ ϕ + गज्या^२ ϕ + कज्या ϕ कोज्या ϕ)

$$+ r''(अज्या^२ ϕ + गकोज्या^२ ϕ - कज्या ϕ कोज्या ϕ) + फ^१ = आय^२ + कार^२ + फ^१ = ०, \dots \dots \dots (८)$$

$$\text{जहाँ आ} = \frac{१}{३} \{ अ + ग + (अ - ग)कोज्या२\phi + कज्या२\phi \}$$

$$\text{का} = \frac{१}{३} \{ अ + ग - (अ - ग)कोज्या२\phi - कज्या२\phi \}$$

$$\text{परन्तु स्पर्श} = \frac{क}{अ-ग} \therefore \text{कोज्या२}\phi = \frac{अ-ग}{\sqrt{\{ क + (अ-ग)^२ \}}}$$

और ज्या२ ϕ = $\frac{क}{\sqrt{\{ क + (अ-ग)^२ \}}}$ इन का उत्थापन देने से

$$\text{आ} = \frac{१}{३} [अ + ग + \sqrt{\{ क + (अ - ग)^२ \}}]$$

$$\text{का} = \frac{१}{३} [अ + ग - \sqrt{\{ क + (अ - ग)^२ \}}]$$

y' के स्वर चिह्न को उड़ा देने से और ϕ का भाग देकर पक्षान्तरानयन से

$$(८) \text{ वें का रूप } - \frac{\text{आ}}{\phi} y^२ - \frac{\text{का}}{\phi} r^२ = १ \text{ यह समीकरण दिखलाता है}$$

कि यदि

(१) आ, का, ϕ एक ही चिह्न के होंगे तो वक्र असम्भव होगा ।

(२) यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और उस से विरुद्ध चिह्न ϕ का हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा जिस के व्यासार्द्ध क्रम से $\sqrt{(-\frac{\phi}{\text{आ}})}$, $\sqrt{(-\frac{\phi}{\text{का}})}$ हैं।

(३) यदि आ, का विजातीय चिह्न के हों तो वक्र अतिपरवलय होगा ।

(४) यदि आ = का और एक चिह्न के हों और उन से विजातीय ϕ हो तो वक्र वृत्त होगा ।

(५) यदि $\phi = ०$ तो (८) वे समीकरण पर से आय^२ + कार^२ = ० इस लिये वक्र मूलबिन्दुरूप होगा यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और यदि भिन्न चिह्न के हो तो वक्र दो सरलरेखा रूप होगा जिन का समीकरण $r = \pm \sqrt{(-\frac{\text{आ}}{\phi})}$ य यह होगा।

ऊपर जो आ, का का मान ले आये हैं उन का यदि घात करो तो

$$\text{आ} \times \text{का} = \frac{(अ + ग)^२ - क^२ - (अ - ग)^२}{४} = \frac{४अग - क^२}{४}$$

इस लिये यदि आ, का भिन्न भिन्न चिह्न के होंगे तो ४अग - कं यह क्रणात्मक होगा अन्यथा धन होगा ।

इस लिये यदि वक्र असम्भव और विन्दुरूप न हो और वृत्त को भी एक प्रकार का दीर्घवृत्त ही समझे जिस का कि दोनों व्यासार्द्ध तुल्य हैं तो कह सकते हैं कि यदि ४अग - कं यह धनात्मक हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा यह सिद्धान्त हुआ । इस में ४अग - कं यह जब शून्य के तुल्य होगा तब त, और द के मान अनन्त होंगे इस स्थिति में वक्र का केन्द्र अनन्त दूर पर होगा अर्थात् वक्र परवलय ठहरेगा । इस में और भी अनेक विचार और सिद्धान्त हैं जिन का वर्णन करना चलराशिकलन में व्यर्थ है ।

१३६। १३४ प्रक्रम (२) समीकरण में यदि पक्षान्तरानयन करो तो तय + २मयर + नर - चय - जर - (आ - आ) = ० ऐसा होगा ।

इस की यदि १३५ प्रक्रम के (१) समीकरण के साथ तुलना करो तो अ = त, २म = क, ग = न, घ = -च, च = -ज, फ = -आ-आ ऐसा होगा । इस लिये

$$४अग - क^२ = ४तन - ४म^२ = ४ (तन - म^२)$$

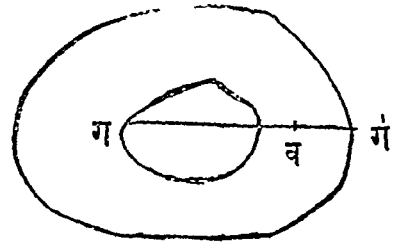
$$= (\int \text{कोज्या}^२ \text{पताय}) (\int \text{ज्या}^२ \text{पताय}) - (\int \text{ज्यापकोज्यापताय})^२$$

परन्तु यहाँ दहना पक्ष चतुर्थाध्याय के १९ वे प्रश्न से धनात्मक होगा इस लिये उन पाददलों के मूलविन्दु सब एक दीर्घवृत्त के परिधि में होंगे जो मूलवक्र के नियत दो स्पर्शरेखान्तर्गत लम्ब और अपने चाप से तुल्य फल बनाते हैं । यदि इस दीर्घ वृत्त के भुज कोटि को इस के केन्द्र से गणना करे तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से य, और र के गुणक शून्य होंगे अर्थात् च = ०, और ज = ० । इस लिये अनुमान कर सकते हो कि कोई पाददल का मूलविन्दु ऐसा भी होगा जिसमें च = ०, ज = ० । कल्पना करो कि अ के वदले इस को प्रथम मूलविन्दु माना तो १३४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$आ = आ + \frac{३}{२} \int \text{श्रु}^२ \text{कोज्या}^२ (प - प_१) \text{ताप ऐसा होगा}$$

यहाँ दहने पक्ष का दूसरा खण्ड सर्वदा धनात्मक है इस लिये आ का मान आ से सर्वदा अधिक होगा । उस पर से यह सिद्ध होता है कि जिस पाददल के मूलविन्दु से च = ०, ज = ० हों उस का फल सब से छोटा होगा ।

१३७। निर्दिष्ट लम्बाई की गग रेखा है इस का एक अग्र ग छोटे वक्र की परिधि पर और दूसरा अग्र बड़े वक्र की परिधि पर घूमता है इस लिये इस तरह से गग रेखा के घूमने से गग रेखास्थ व विन्दु भी किसी वक्र में घूमेगा। इच्छा है कि इस व विन्दु के वक्र का फल ग और ग विन्दु के वक्रों के फलो से जाने।



कल्पना करो कि गव = ग, वग = ग और कोई परस्पर लम्बरूप अक्षों के वश से y_1, r_1, y, r और y_2, r_2 क्रम से ग, व, और ग के भुज कोटि है। गग रेखा और र अक्ष से उत्पन्न कोण प समझो तो चलनकलन के ११ वे अध्याय से।

$$y_1 = y - गज्याप, r_1 = r - गकोज्याप ।$$

$$y_2 = y + गज्याप, r_2 = r + गकोज्याप ।$$

$$\text{इस लिये } ताय_1 = ताय - गकोज्यापताप$$

$$\text{और } r_1 ताय_1 = (r - गकोज्याप) (ताय - गकोज्यापताप)$$

$$= रताय - गकोज्याप (रताप + ताय) + ग^2 कोज्या^2पताप$$

इसी तरह $r_2 ताय_2 = रताय + गकोज्याप (रताप + ताय) + ग^2 कोज्या^2पताप$ पहले को ग और दूसरे को ग से गुण कर जोड़ देने से

$$ग र_1 ताय_1 + ग र_2 ताय_2 = (ग + ग) रताय + (ग + ग) ग^2 कोज्या^2पताप$$

$$ग \int r_1 ताय_1 + ग \int r_2 ताय_2 = (ग + ग) \int रताय$$

$$+ (ग + ग) ग^2 \int कोज्या^2पताप$$

$$= (ग + ग) \int रताय + (ग + ग) ग^2 \int \frac{१ + कोज्या^2प}{२} ताय$$

$$= (ग + ग) \int रताय + (ग + ग) ग^2 \left(\frac{प}{३} + \frac{ज्या^2प}{४} \right)$$

यदि गग रेखा एक वार पूरा भ्रमण कर फिर अपने स्थान पर पहुंचे तो स्पष्ट है कि प, ० और २π के बीच होगा, इस लिये सान्तचलानयन से

$$ग (गा) + ग (गा) = (ग + ग) (वा) + (ग + ग) गग \pi$$

$$= \frac{ग (गा) + ग (गा)}{ग \times ग} = (वा) + \pi गग, \text{ यहाँ } (गा), (वा), (गा), \text{ क्रम से } ग, व, ग$$

विन्दुसम्बन्धि वक्रों के सम्पूर्ण फल हैं।

यदि ग, ग रेखा के अग्र एकही वक्र की परिधि पर घूमे तो $(गा) = (गा)$

(गा) = (वा) + π गर्ग और (गा) - (वा) = π गर्ग इसलिये वक्र की परिधि और व विन्दुत्पन्न वक्र की परिधि के बीच जो क्षेत्र होगा उस का फल π गर्ग यह होगा ।

ग, ग विन्दु, घूमने के बदले झूल कर उलटा झलुअे के ऐसा यदि फिर पीछे से अपने स्थान पर पहुँचे तो स्पष्ट है कि (गा) = ०, (गा) = ० इसलिये (वा) = - π गर्ग । ऋण चिह्न दिखलाता है कि जिधर गर्ग रेखा घूमती है उस से विरुद्ध दिशा से फल उत्पन्न हुआ है । यदि घूमने के बदले गर्ग रेखा ही आगे पीछे चले तो (वा) = ० इस से सिद्ध होता है कि व विन्दु से दो तुल्य फन्दे के ऐसे वक्र होंगे जिन मे एक धनात्मक दूसरा इस से उलटा ऋणात्मक होगा ।

१३८। जिन वक्रों मे भुज का कौन फल कोटि है इस का ज्ञान न हो वा \int र ताय इस के मान का ठीक ठीक पता न लगे वहाँ स्वल्पान्तर से भुज का अनेक समान खण्ड कर प्रति भागो पर लम्ब खड़ा करने से अनेक पास पास मे दो दो कोटि और तदन्तर्गत भुजखण्ड और वक्र की पूर्णज्या से समलम्ब चतुर्भुज बनाकर पृथक् पृथक् फल साधन कर सब का योग करो तो वक्रक्षेत्र का आसन्न फल होगा । (५)वे प्रक्रम से स्पष्ट है कि भुज का जितनाही अधिक विभाग करोगे उतनाही सूक्ष्म फल होगा ।

(१) कल्पना करो कि भुज का न खण्ड जो समान कर डाला उसका मान = च और कोटियो का मान $r_0, r_1, r_2, r_3, \dots, r_n,$

तो स्पष्ट है कि जितने समलम्बचतुर्भुज होंगे सभो मे आद्यन्त कोटियो को छोड़ और सब कोटियो एक वार आधार दूसरे वार मुख होगी और लम्ब सर्वत्र च यही रहेगा ।

इस लिये r_0, r_n दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर, और वक्र का चाप इन से बने क्षेत्र का आसन्न फल = च $\left\{ \frac{r_0 + r_n}{2} + r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{n-1} \right\}$ यह होगा ।

इस पर से यह फल जानने के लिये क्रिया उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि के योगार्द्ध में और बीचवाली सब कोटियो को जोड़ दो योग को भुजखण्ड च से गुणदेने से वक्र का स्वल्पान्तर से फल होगा ।

(२) कल्पना करो कि एक ऐसा परवलय है जिसका मूलविन्दु ग, कोटि का मूल, और समीकरण $r = अ + कय + गर्ग$ यह है और यह, वक्र

के r_0, r_1, r_2 कोट्यग्र पर होके जाता है तो $r_0 = अ - कच + गच^2$,
 $r_1 = अ$, $r_2 = अ + कच + गच^2$

और पहली और तीसरी कोटि के बीच फल = $\int_{-च}^{च} (अ + कय + गय^2) ताय$
 $= २ च \left(अ + ग \frac{च^2}{३} \right)$

परन्तु $r_0 + r_2 = २r_1 + २गच^2$ इस लिये

$$फल = \frac{च}{३} \{ r_0 + ४r_1 + r_2 \}$$

अब समझो कि न का मान सम है अर्थात् r_0, r_n कोटि के बीच भुजान्तर का सम विभाग किया है तो ऊपर की युक्ति से तीन तीन कोट्यग्र पर गये हुए परवलयों के फल

$$\frac{च}{३} \{ r_0 + ४r_1 + r_2 \}, \frac{च}{३} \{ r_2 + ४r_3 + r_4 \}, \frac{च}{३} \{ r_4 + ४r_5 + r_6 \} \dots \text{इत्यादि होंगे}$$

इस लिये इन सब फलों का योग

$$\frac{च}{३} \{ r_0 + r_n + ४(r_1 + r_3 + r_5 + \dots) + २(r_2 + r_4 + r_6 + \dots) \}$$

यह स्वल्पान्तर से वक्र का फल हुआ।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि r_0, r_n के बीच य अक्ष का समान भाग कर कोटियों का मान जानलो फिर आद्यन्त कोटियों के योग में चौगुना अवशिष्ट विषम कोटियों का योग और दूना बाकी कोटियों का योग मिला कर तीन से भाग देदो लब्धि को च से अर्थात् दो कोटियों के बीच के अन्तर से गुण दो तो गुणनफल स्वल्पान्तर से वक्र का फल होगा।

इस रीति को सिम्पशन ने सन् १७४३ में निकाला है इसी लिये इसे सिम्पशन की रीति (Simpson's Rule) कहते हैं (See Simpson's mathematical Dissertations 1743, page 109)

इस के लिये एक उदाहरण दिखाते हैं। कल्पना करो कि जिस वक्र का $r = \frac{१}{१ + य^२}$ यह समीकरण है उस का फल सिम्पशन की रीति से जानना है $r_0 = १$, $r_n = \frac{१}{३}$ इस के बीच में।

यहाँ $r_0 = १$ तब $य = ०$, और $r_n = \frac{१}{३}$, तब $य = १$, मानो कि $n = १०$

इस लिये $च = \frac{१}{१०} = ०.१$, और

$$r_1 = \frac{₹}{₹ 0.1} = ९९००९९०१, r_2 = \frac{₹}{₹ 0.8} = ०.९६१५३८४५$$

$$r_3 = \frac{₹}{₹ 0.0} = ०.९१७४३१११९, r_4 = \frac{₹}{₹ १.६} = ८६२०६८९६, r_5 = \frac{₹}{₹ 2.4} = ८०००००००$$

$$r_6 = \frac{₹}{₹ 3.६} = ७३५२९४१२, r_7 = \frac{₹}{₹ ४.९} = ०.६७११४०९४, r_8 = \frac{₹}{₹ ६.४} = ६०९७५६१०$$

$$r_9 = \frac{₹}{₹ ८.१} = ५५२४८६१९, r_{10} = \frac{₹}{₹ + १} = ५०००००००$$

₹ ००००००००

₫ ५०००००००

इस लिये $r_0 + r_n = ₹ ५,००,००,०००$

$r_1 = ९९,००,९९,०१$

$r_2 = ९१,७४,३१,११९$

$r_3 = ८०,००,००,०००$

$r_4 = ०,६७,११,४०,९४$

$r_5 = \underline{५५,२४,८६,१९}$

सब का योग = ३,९३,११,५,७३३

४

$४(r_1 + r_2 + r_3 + \dots) = ₹ ७,२४,६२,९३२$

$r_6 = ०,९६,१५,३८,४५$

$r_7 = ८६,२०,६८,९६$

$r_8 = ७३,५२,९४,१२$

$r_9 = \underline{६०,९७,५६,१०}$

₹ १,६८,६४,९१८

२

$६,३३,७२,९८,३६ = २(r_6 + r_7 + r_8 + r_9)$

$₹ ७,२४,६२,९३२ = ४(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)$

$₹ ५,००,००,००० = r_0 + r_{10}$

यो = २३,५६,१,९२,७६८

= $r_0 + r_{10} + ४(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + २(r_6 + r_7 + r_8 + r_9)$

फल = $\frac{च \times यो}{३} = .७८५३९७५८९$ इस में यदि ६ स्थान तक ग्रहण करें तो .७८५३९८ यह मान होगा

परन्तु $\frac{१}{१+य^३} = २$ इस वक्र का य के ० और १ के बीच मान में चलानयन

की रीति से ठीक फल $\int_0^1 \frac{ताय}{१+य^३} = \frac{\pi}{८} = \frac{३.१४१५९२६५\dots}{४} = .७८५३९८\dots$

यह हुआ इस लिये यदि यहाँ भी दशमलव का मान ६ स्थान तक ले तो सिम्पसन की रीति से बहुत ही ठीक ठीक फल आया यह प्रत्यक्ष देखने में आता है ।

(३) प्रत्येक दो कोटियों के बीच में जो भुजान्तर च माना है उसे २ ज के तुल्य मानें और कल्पना करे कि एक प्रकार के परवलय का $२ = अ + कय + गय^३ + घय^३$ यह समीकरण है जो कि $२_०, २_१, २_२, २_३$ इन चार कोट्यग्र पर होकर जाता है और जिसका मूलविन्दु य अक्ष में $२_१, २_२$ कोटियों के बीच में है तो

$$२_० = अ - ३ कज + ९ गज^३ - २७ घज^३$$

$$२_१ = अ - कज + गज^३ - घज$$

$$२_२ = अ + कज + गज^३ + घज^३$$

$$२_३ = अ + ३ कज + ९ गज^३ + २७ घज^३$$

इस लिये $२_० + २_३ = २(अ + ९ गज^३)$, $२_१ + २_२ = २(अ + गज^३)$

$$अ + ९ गज^३ = \frac{२_० + २_३}{२} \dots \dots \dots (१)$$

$$अ + गज^३ = \frac{२_१ + २_२}{२} \dots \dots \dots (२)$$

$$अ + ५ गज^३ = \frac{२_० + २_३ + २_१ + २_२}{४} \text{। (१) और (२) को जोड़कर २का भाग देने से}$$

$$\text{इस लिये } २अ + ६ गज^३ = \frac{२_० + २_३ + ३२_१ + ३२_२}{४} \dots \dots (३)$$

परंतु परवलयका $२_०, २_३$ कोटिसीमा से फल = $\int_{-३ज}^{३ज} (अ + कय + गय^३ + घय^३)ताय$
 $= ३ज(२अ + ६ गज^३) = \frac{३ज}{४} \{ २_० + २_३ + ३(२_१ + २_२) \}$, ज के स्थान में $\frac{३}{४}$ का उत्थापन देने से फल = $\frac{३\sqrt{३}}{४} \{ २_० + २_३ + ३(२_१ + २_२) \}$

इसी तरह $२_३, २_४, २_५, २_६$ के अग्र पर गये परवलय का $२_३, २_६$ कोटि के बीच

मे फल $\frac{3\sqrt{3}}{2} \{ r_3 + r_4 + 3(r_0 + r_1) \}$ इसी तरह चार चार कोट्यग्र पर गये हुए परवलयो के फल, $\frac{3\sqrt{3}}{2} \{ r_5 + r_6 + 3(r_0 + r_1) \}$ ।

$\frac{3\sqrt{3}}{2} \{ r_7 + r_8 + 3(r_{10} + r_{11}) \}$ इत्यादि होंगे । यदि अभीष्ट वक्र के फल को इन परवलयो के फल योग तुल्य स्वल्पान्तर से मान लो तो वक्र का फल $= \frac{3\sqrt{3}}{2} \{ r_0 + r_n + 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots) + 3(r_5 + r_6 + r_7 + r_8 + \dots) \}$ यह हुआ । इस पर से यह रीति उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि योग मे r_0 के आगे तीसरी तीसरी कोटियों का दूना योग और बाकी कोटियों का तिगुना योग मिला दो । योग को च के $\frac{3}{2}$ से गुण देने से वक्र का फल हो जायगा ।

इस को भी सिम्पशन की रीति कहते हैं परन्तु वास्तव मे यह न्यूटन का निकाला हुआ है (See Opusula, method Diff, Prop 6 Scolium) ऊपर की रीतियो मे कोटि की संख्या ज्यो ज्यो बढ़ाते जायगे त्यो त्यो फल सूक्ष्म आवेगा ।

१२९। किसी वक्र मे सिद्ध है कि $y = \text{श्रु कोज्याप}$, $r = \text{श्रु ज्याप}$ इस लिये $\text{स्पप} = \frac{r}{y}$ और $\text{तास्पप} = \frac{\text{ताप}}{\text{कोज्याप}} = \frac{\text{यतार} - \text{रताय}}{y}$ ।

इस लिये $\text{श्रुताप} = \text{यतार} - \text{ताय}$

और $\frac{3}{2} \int \text{श्रुताप} = \frac{3}{2} \int (\text{यतार} - \text{रताय})$

इस पर से सिद्ध होता है कि $\frac{3}{2} \int \text{श्रुताप}$ इस के स्थान मे

$\frac{3}{2} \int (\text{यतार} - \text{रताय})$ इस को लेकर भी उचित सीमाओ के भीतर फल साधन कर सकते हैं ।

१४०। वक्र रेखा से घिरे हुए किसी क्षेत्र के फल जानने के लिये बुद्धिमानो ने यान्त्रिक विद्या के चल से यन्त्र बनाये हुए है इस यन्त्र को धरातलमापक (Planimeters) कहते है यह कई प्रकार के है उन मे प्रोफेसर आमस्टलर (Professor Amstler of Schaffhausen) का सब से सहज और उत्तम है । इस मे दो भुज ऐसे जुटे हुए है कि स्वतन्त्र एक धरातल मे घुस सकते है । एक भुज के अग्र पर एक बिन्दु स्थिर बनी हुई है जिस के चारो ओर यन्त्र फिरा

अब, जब क वक्र की परिधि में घूमते घूमते फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचे गा उस समय ताप, के जितने मान होंगे सब का योग धन ऋण के तुल्य होने से शून्य हो जायगा क्योंकि अक रेखा का एक ओर जितने झुकाव से चलना होगा फिर उतने ही झुकाव से विरुद्ध दिशा में चलना होगा । इस लिये वक्र के चारो ओर घूमने में यौ ताचा = यौ ताचा अर्थात् अ विन्दु पर चक्र के केन्द्र को स्थिर रखने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही अक रेखा में कही केन्द्र रहने से होगा ।

अब कल्पना करो कि यन्त्र के केन्द्र अर्थात् प्रथम भुज के ग विन्दुगत लम्बरूप अक्ष युग्म के अभिप्राय से क के भुज = य, कोटि = र है, और अग = अ, अक = क, \angle अगय = प, और कल्पना करो कि अक रेखा बढ़ाने से य अक्ष से प_१ कोण बनाती है तो सरलत्रिकोणमिति से

$$य = अकोज्याप + ककोज्याप_१, \quad र = अज्याप + कज्याप_१$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{ताय} = -\text{अज्यापताप} - \text{कज्याप_१ताप_१},$$

$$\text{तार} = \text{अकोज्यापताप} + \text{ककोज्याप_१ताप_१}$$

$$\text{और} \quad \text{यतार} = \text{अकोज्या_१पताप} + \text{अककोज्यापकोज्याप_१ताप_१}$$

$$+ \text{अककोज्यापकोज्याप_१ताप} + \text{ककोज्या_१प_१ताप_१}$$

$$\text{रताय} = -\text{अज्या_१पताप} - \text{अकज्यापज्याप_१ताप_१}$$

$$- \text{अकज्यापज्याप_१ताप} - \text{कज्या_१प_१ताप_१}$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{यतार} - \text{रताय} = \text{अताप} + \text{अककोज्या}(प - प_१)\text{ताप}$$

$$+ \text{अककोज्या}(प - प_१)\text{ताप} + \text{कताप_१}$$

$$= \text{अताप} + \text{अककोज्या}(प - प_१)\text{ता}(प + प_१) + \text{कताप_१}$$

$$\text{और ताचा} = \text{अन} = \text{अअज्याअअन} = \text{अतापकोज्या}(प - प_१)$$

$$\text{परन्तु } प + प_१ = २प - (प - प_१)$$

$$\text{इस लिये अककोज्या}(प - प_१)\text{ता}(प + प_१)$$

$$= २\text{अककोज्या}(प - प_१)\text{ताप} - \text{अककोज्या}(प - प_१)\text{ता}(प - प_१)$$

$$= २\text{कताचा} - \text{अककोज्या}(प - प_१)\text{ता}(प - प_१)$$

इस के उत्थापन से

$$\text{यतार} - \text{रताय} = \text{अताप} + \text{कताप_१}$$

$$+ २\text{कताचा} - \text{अककोज्या}(प - प_१)\text{ता}(प - प_१)$$

परन्तु १३९वें प्रक्रम से क विन्दु के भ्रमण से उत्पन्न निर्दिष्ट वक्र का फल
 $= \frac{1}{2} \int (यतार - रताय) यह होगा ।$

अब निर्दिष्ट वक्र के परिधि पर क विन्दु के पूरा भ्रमण करने में कुछ आगे पीछे घसकते घसकते अक, अग फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचेंगे इस लिये ऊपर की युक्ति से $\int अताय, \int कताय,$

$\int अककोज्या(प-प_१) ता(प-प_१)$ ये शून्य के तुल्य हो जायेंगे इस लिये वक्र का पूरा फल $= \frac{1}{2} \int (यतार - रताय) = क \int ताचा = कचा$

जहाँ चा लम्ब के गमन का प्रमाण है जो कि चक्र स्वयं वतलाता है । इस लिये चक्र में पहले ही से लम्ब के गमन के प्रमाण को क गुना कर अङ्कन कर डालें तो जो उस समय चक्र में अङ्कन की संख्या होगी वही वक्र का समग्र फल होगा ।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। समातिपरवलय में जिसका $य^२ - र^२ = १$ यह समीकरण है

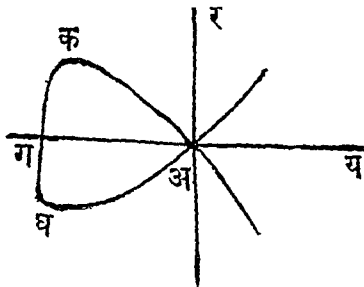
यदि केन्द्राभिप्राय से भुज, श्रुति, वक्र का चाप, इन से उत्पन्न वक्रत्रिभुज का फल = स हो तो सिद्ध करो कि

$$य = \frac{इ^म + इ^{-म}}{२} \text{ और } र = \frac{इ^म - इ^{-म}}{२}$$

२। जिस वक्र का $अ^२ र^२ = य^२ (२ अ - य)$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा । उ० $\pi अ^२$

३। जिस वक्र का $य^२ = र^२ (अ - य)$ यह समीकरण है उसके चाप और असीमपथ और य अक्ष से बने क्षेत्र का फल बताओ । उ० $\frac{३}{२} \pi अ^२$

४। जिस वक्र का $अ^२ र^२ = य^२ (क + य)$ यह समीकरण है उसकी आकृति नीचे लिखी हुई है इसमें अ क ग घ अ फन्दे का फल बताओ ।



$$\text{उ० } \frac{८क^{\frac{३}{२}}}{३.५७अ^{\frac{३}{२}}}$$



इस वक्र में अक = अ,

अग = क और इस का समीकरण $g^2 = (y-a)(y-k)^2$ यह है । ग क के बीच जो फन्दा है उस का फल बताओ ।

$$\text{उ० } \frac{2(k-a)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 2g^{\frac{3}{2}}}$$

६। $y^2 = 4a^2 (2a-y)$ यह एक विटचरी (Witch) का समीकरण है इसके और ससीमपथ के बीच क्षेत्र का फल बताओ ।

$$\text{उ० } 8a^3$$

७। जिस दीर्घवृत्त का $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = 1$ यह समीकरण है उसके अवलूत

का सम्पूर्ण फल क्या होगा ।

$$\text{उ० } \frac{2\pi(a^2-k)^2}{4ak}$$

८। सिद्ध करो कि जिसका अक्षीय समीकरण $r\sin\theta = a$ यह है उसके कोई दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्रों के फलों में वही सम्बन्ध होगा जो उस काल की दो श्रुतियों के अन्तर में होगा ।

९। $y^2 + r^2 = 2a$ अथवा r इस समीकरण के वक्र में जो एक फन्दा होगा उसका क्या फल होगा । यहाँ अक्षीय समीकरण बनाओ तो

$$r = \frac{2a \cos\theta}{1 + \cos\theta} \text{ ऐसा होगा फिर}$$

$$\text{फल} = \frac{2a}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{(1 + \cos\theta)^2} d\theta$$

इसके जानने के लिये मानो कि $\tan\theta = t$ तो

$$\text{इस का रूप } \frac{2a}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2a}{2}$$

१०। सिद्ध करो कि जिस वक्र का $r^2(y^2 + a^2) = g^2(a-y)$ यह समीकरण है उसका फल $y=0$ से $y=a$ तक $g^2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{ ला } 2)$ यह है ।

११। $r^2 = \frac{y^2(a+y)}{a-y}$ इस समीकरण के वक्र में जो फन्दा होगा उसका

फल क्या होगा ।

$$\text{उ० } 2a^2(1 - \frac{1}{2})$$

१२। $r^2 \cos\theta = a^2 \sin\theta$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ ।

$$\text{उ० } \frac{2a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \text{ ला } 2$$

१३। यदि वक्र में $\text{श्रु} = (\text{कोज्या } २\text{ प} + \text{ज्या } २\text{ प})$ तो सम्पूर्ण फल क्या होगा । उ० πa^2

१४। जिस वक्र का $(y^2 + r^2)^2 = 4\frac{a^2}{k}y^2 - r^2$ यह समीकरण है उसके एक फन्दे का फल बतावो । उ० $\frac{\pi a^2}{2k}$

१५। जहाँ $(y^2 + r^2)^2 = 4ay^2 + 4k^2r^2$ ऐसा समीकरण है उस वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा । उ० $2\pi(a^2 + k^2)$

१६। जिस वक्र का $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = \frac{1}{g^2} \left[\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} \right]^2$ यह समीकरण है उस का फल सम्पूर्ण क्या होगा उ० $\frac{\pi g^2}{2ak}(a^2 + k^2)$

(१३०) प्रक्रम का ३ उदाहरण देखो)

१७। जहाँ $\text{श्रु कोज्याप} = \text{अकोज्या } २\text{ प}$ उस वक्रके फन्दे का फल बतावो उ० $(2 - \frac{\pi}{2})a^2$

१८। यदि $a > k$ तो $\text{श्रु} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - k^2 \text{ कोज्या}^2\text{प})}} + k\text{कोज्याप}$ इस

समीकरण के वक्र का क्या फल होगा । उ० $\frac{\pi a^3}{\sqrt{(a^2 - k^2)}} + \frac{\pi k^2}{2}$

१९। दो श्रुति और कर्णच्छेद (Conchoid) के चाप से बने क्षेत्र के फल का मान बतावो । जहाँ कर्णच्छेद का $\text{श्रु} = \text{अ} + k$ कोलेप यह समीकरण है ।

२०। दीर्घवृत्त के केन्द्र से दो श्रुति जो दीर्घवृत्त के परिधिस्थ दो बिन्दुओं तक खींची गई हैं उन से और दीर्घवृत्त के चाप से बने क्षेत्र का फल बतावो ।

२१। परवलय का चाप और शिरःस्थान से दो श्रुति इन से बने क्षेत्र का फल कैसा होगा ।

२२। यदि वक्र का समीकरण $\text{श्रु} = \text{अ}(\text{छेप} + \text{स्पप})$ और इस के असीम-पथ का समीकरण $\text{श्रु कोज्याप} = २\text{ अ}$ यह हो तो वक्र और असीमपथ के भीतर का क्षेत्रफल क्या होगा ।

२४। सिद्ध करो कि $\text{श्रु} = \text{अ}(१ + २\text{ कोज्याप})$ इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल $a^2 \left[2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right]$ यह और इस के भीतरी फन्दे का फल

अं $\left[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right]$ यह होगा ।

२५। लाघुरिकृथिक सर्पिल में दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्र का फल बताओ ।

२६। यदि वक्र की श्रुति श्रु. मूलबिन्दु से किसी स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल और इस लम्ब और नियत रेखा से उत्पन्न कोण = ϕ और सीमितवक्र का सम्पूर्ण फल स और इस के सीमित पाइडल का सम्पूर्ण फल स_१ हो तो सिद्ध करो कि $२स_१ = स + \frac{१}{३} \int श्रुं$ ताव जहाँ वक्र और पाइडल का एक ही मूलबिन्दु है ।

२७। सिद्ध करो कि पाइडल का मूल स्थान दीर्घवृत्त के भीतर ही दीर्घवृत्त के केंद्र से ग डूरी पर है उसका सम्पूर्ण फल = $\int (अं + कं + गं)$ यह होगा ।

२८। श्रु = अकोज्यानप + कज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ ।

$$उ० \frac{१}{३} (अं + कं)$$

२९। श्रुं = अंकोज्यानप + कंज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ ।

$$उ० \frac{\sqrt{(अं + कं)}}{३}$$

३०। अंरं = यं(अं - यं) इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा ।

$$उ० \frac{८अं}{५}$$

३१। श्र = अकोज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ ।

$$उ० \frac{अं}{३}$$

३२। श्रु = अज्यानप इस समीकरण के वक्र में सब फन्दों का फल बताओ ।

$$उ फल = \begin{cases} \frac{अं - यं}{४} & \text{यदि न विषम} \\ \frac{अं}{२} & \text{यदि न सम} \end{cases}$$

३३। दीर्घवृत्त के एक नाभि से जितनी श्रुतियाँ हैं उन्हे अपनी सीध में बढ़ा

कर ग तुल्य काट उन पर एक वक्र रेखा कर दिया । इस से और दीर्घवृत्त की परिधि से उत्पन्न जो क्षेत्र हुआ उसका फल बतावो ।

उत्तर ग (२क + ग)

जहाँ क = दीर्घवृत्त का लघुव्यासार्द्ध ।

३४। श्रु^म = अ^म कोज्यामप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल यदि आ और वक्र के मूलविन्दु ही इस के पाददल की मूलविन्दु जहाँ है वैसे पाददल का सम्पूर्ण फल आ_१ तो सिद्ध करो कि

$$आ_१ = आ (१ + \frac{म}{३})$$

३५। नाभि से जो परवलय में दो श्रुतियाँ हों उन से और परवलय के चाप से जो क्षेत्र बना उसका फल सिद्ध करो कि ।

$$\frac{अ^{\frac{३}{२}}}{३} \left\{ \left(\frac{श्रु + श्रु + ग}{२} \right)^{\frac{३}{२}} - \left(\frac{श्रु + श्रु - ग}{२} \right)^{\frac{३}{२}} \right\}$$

जहाँ परवलय की कोटि $r = \sqrt{४अय}$ और परवलय के चाप की पूर्णज्या ग है ।

३६। दीर्घवृत्त के केन्द्र न से बृहद्व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनाया गया उसको सहायक वृत्त कहो और न को नाभि । दीर्घवृत्त की परिधि में व विन्दु लेकर इस के कोटि को अपनी सूत्र में बढ़ा कर मानो कि सहायक वृत्त की परिधि में प विन्दु पर लगी, और दीर्घवृत्त के व्यासार्द्धाग्र अ अक्ष में अ विन्दु पर मानो तो यदि $\angle अ न प = ज$ तो सिद्ध करो कि अनाव दीर्घवृत्तखण्ड का फल $= \frac{अक}{२} (ज - इज्याज)$ यह होगा ।

जहाँ अ, क बृहद्व्यासार्द्ध हैं ।

३७। $४अ^२र^३ = क^२य^२(अ^२ - २अय)$ इस समीकरण के वक्र में फन्दे का फल बतावो ।

$$उ० \frac{अ.क}{१५}$$

३८। जिन दो वक्रों के $र^२ - ४अय = ०$, $य^२ - ४अर = ०$ ये समीकरण हैं उनके चापों से बने क्षेत्र का फल बतावो ।

$$उ० \frac{१६ अ^३}{३}$$

३९। जिस वक्र का $र = ग$ ज्या $\frac{य}{अ}$ ला ज्या $\frac{य}{अ}$ यह समीकरण है उसका फल० से लेकर अ^म तक य के मान में क्या होगा । उ० २अग (१-ला२)

४०। जिस दीर्घवृत्त का अर्ध + २कयर + गर = १ यह समीकरण है उसका फल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi}{\sqrt{(अग-क^2)}}$$

(११६ प्रक्रम का अन्तिम वाक्य देखो)

४१। जिस दीर्घवृत्त का अर्ध + २कयर + गर + २घय + २चर + फ = ० यह समीकरण है उसका क्षेत्रफल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi (अच^2 + गघ^2 + फक^2 - २ चजक - अगफ)}{(अग-क^2)^{3/2}}$$

४२। जिस वक्र का $\frac{४}{२} (अ^2 + य^2) - ८अर(अ^2 - य^2) + २ (अ^2 - य^2)^2 = ०$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा ।

$$उ० \quad अ^2 \pi \left\{ ४ - \frac{५५}{२} \right\}$$

४३। केन्द्र से दीर्घवृत्त की कोटियों पर बने अर्द्धवृत्त पर स्पर्शरेखा कर देने से स्पर्श बिन्दुओं पर जानेवाला जो वक्र हो उसका फल क्या होगा ।

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} = १$ यह है

उ० वक्र का अक्षीय समीकरण दीर्घवृत्त के केन्द्र को

$$\text{ध्रवस्थान मान } थ्रु^2 = \frac{अ^2 क^2}{क^2 + ४अ^2 स्प^2}$$

$$\text{और फल} = \frac{\pi (अ \times क)}{२(२अ + क)}$$

४४। जिस परवलय का $र^2 = ४अय$ यह समीकरण है उसके भीतर स्थिर (२ ग) पूर्णज्या घूमती है । उसके दोनों प्रान्तों पर परवलय में जो दो स्पर्शरेखा हैं उनके योगबिन्दु के गमन से जो वक्र होगा उसके और परवलय के भीतर समग्र फल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{ग^2}{२}$$

(परवलय के तिर्यक्भुजकोटि का समीकरण देखो)

४५। एक लड़के ने सात हाथ डंडे के दोनों शिरो को एक दीर्घवृत्त की परिधि पर रखकर चारों ओर घुमाने लगा । उस डंडे के बीच में नीचे एक लोहे की नोखदार कील लगी थी । इसके कारण डंडे के चारों ओर घूम जाने से दीर्घवृत्त के भीतर एक नया वक्र बन गया । लड़के ने हँसकर अपने गुरु से जो कि उसे हिसाब पढ़ाता था पूछा कि गुरुजी दीर्घवृत्त और नये वक्र के भीतर एक

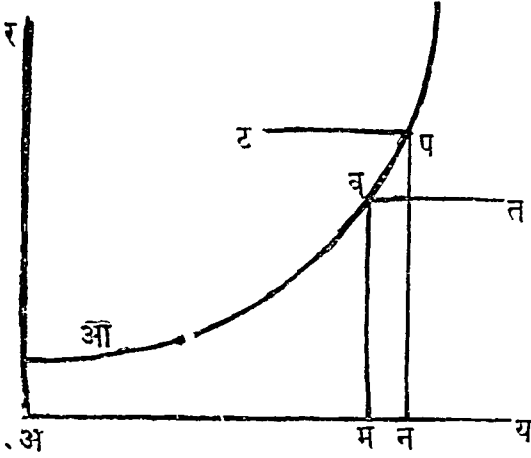
वर्गहस्त पत्थर की कितनी पटिया फर्श के लिये लगेंगी । वताओ गुरु ने क्या उत्तर दिया । यहाँ बृहद्व्यास १४ हाथ का समझो ।

यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{३७}{९}$ मानो तो पत्थर के पटिये की संख्या ३८ $\frac{१}{३}$

इति सप्तमाध्याय ।

वक्र के पृष्ठफल और घनफल का आनयन ।

१४१। कल्पना करो कि अर, अय लम्बरूप अक्ष, आ स्थिरविन्दु



चा = आव, व विन्दु का भु = य, को = र है। व के पास प एक और विन्दु लो और आवप वक्र को अ य अक्ष के चारो ओर घुमा दो तो एक घनक्षेत्र बन जायगा जिसके आव चाप के घूमने से जो पृष्ठफल होगा उसके गति का

सम्बन्ध चाप के गति के वरा से $\frac{\text{ता पृ}}{\text{ताचा}} = २\pi r$ (चलनकलन का १६० वाँ प्रक्रम देखो)

$$\text{इस लिये } \text{पृ} = \int २\pi r \text{ ता चा} \quad (१)$$

$$\text{इसी तरह से } \text{पृ} = \int २\pi r \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} \text{ ताय} \quad (२)$$

$$\text{पृ} = \int २\pi r \frac{\text{ताच}}{\text{तार}} \text{ तार} \quad (३)$$

$$\text{पृ} = \int २ r \text{ ता चा} = \int २\pi r \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ ताप} = \int २\pi \text{श्रुज्या प} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ ताप} (४)$$

$$\text{जहाँ } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{\left\{ \text{श्रु} + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^2 \right\}}$$

किसी स्थान में पृष्ठफल के लिये इन चारों समीकरणों में से गणितलाघव समझ कर एक को चुन सकते हो। जहाँ सहज में र, चाप के फल रूप में आ सके वहाँ (१) पहले को जहाँ $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}}$ सहज में र के फलरूप में आ सके वहाँ (३) को और जहाँ अक्षीयसमीकरण मालूम हो वहाँ (४) को ले सकते हो। प्रायः (२) बहुत ही कामका है क्योंकि वक्र के समीकरण से र और

$\frac{\text{ताच}}{\text{ताय}}$ दोनों प्रायः सहज में य के फलरूप में आजाते हैं इस लिये इसी को बहुधा लोग लेते हैं ।

प्रत्येक समीकरणों से उचित सीमा के भीतर चाप से बने पृष्ठ का फल मालूम हो जायगा ।

१४२। अ य अक्ष से अ दूरी पर अ य के समानान्तर अ य के चारो ओर यदि एक अपरिमित रेखा घूमे तो स्पष्ट है कि समतलमस्तकरूप एक शङ्कु बन जायगा इस लिये y_2, y_1 भुज के भीतर इस शङ्कु का पृष्ठफल (२) समीकरण लेने से $(r = a, \frac{\text{ताच}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2} = 1)$

$$\int_{y_1}^{y_2} 2\pi a \text{ ताय} = 2\pi a (y_2 - y_1) \text{ यह होगा ।}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि इस शङ्कु के आधार परिधि को ऊँचाई के अन्तर से गुण देने से दोनों उचाइयों के भीतर का पृष्ठफल हो जायगा ।

१४३। अ विन्दु पर अ य अक्ष से अ तुल्य कोण बनाने वाली रेखा यदि अ य के चारो ओर घूमे तो स्पष्ट है कि समसूची का पृष्ठ उत्पन्न हो जायगा जहाँ किसी विन्दु का भु = य और को = र = य स्प अ

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ताच}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2\right\}} = \sqrt{(1 + \text{स्प}^2 \text{अ})} = \text{छे अ ।}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$p = 2\pi \int \text{स्प अ छे अ य ताय} = \pi \text{ स्प अ छे अ य}^2 + \text{स्थि}$$

और y_2, y_1 के भीतर पृष्ठफल = $\pi \text{ स्प अ छे अ } (y_2^2 - y_1^2)$ यही पृष्ठफल उस घनक्षेत्र का भी होगा जिसे भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में वापी क्षेत्र कहा है ।

इस में यदि $y_1 = 0$ और मूलस्थान से y_2 दूरी पर अ य अक्ष पर लम्बरूप धरातल से सूचीपृष्ठसूत्रों को काटें तो कटे हुए परिधि का व्यासार्द्ध = त्रि = y_2 स्पअ इसलिये समसूच्याकारशङ्कु का पृष्ठफल = $\pi \text{कोछेअत्रि}^2$ इसी में यदि परिधि = $p = 2\pi$ त्रि और सूची का पृष्ठसूत्र = $p \text{सू} = \text{को छे अ त्रि}$ तो पृष्ठफल = $\frac{p \times p \text{सू}}{2}$ । इस का साधन हमने अपने चलनकलनके १५९वें प्रक्रम में केवल क्षेत्रयुक्ति ही से किया है ।

१४४। गोल के पृष्ठफल का आनयन ।

कल्पना करो कि वृत्त का समीकरण $x^2 = a^2 - y^2$ यह है और यह वृत्त y अक्ष के चारों ओर घूमकर एक गोल को बनाया है तो $\frac{ताय}{ताय} = -\frac{य}{र}$

$$\text{और } \frac{ताय}{ताय} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{ताय}{ताय} \right)^2 \right\}} = \sqrt{\left(1 + \left[\frac{य^2}{र^2} \right] \right)} = \frac{अ}{र}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$पृ = २\pi \int \frac{अ}{र} ताय = २\pi अ \int ताय = २\pi अ य + स्थि$$

कल्पना करो कि मूलविन्दु से y_1, y_2 दूरी पर y अक्ष पर लम्बरूप जो दो धरातल हैं उन से गोल को काटा तो कटे हुए खण्ड का पृष्ठफल $= २\pi अ (y_2 - y_1) = प (y_2 - y_1)$, (यदि $प =$ गोल की परिधि ।) इस पर से सिद्ध होता है कि कटे खण्ड का पृष्ठफल $y_2 - y_1$ इसके अर्थात् उसके उँचाई के वश से घटता बढ़ता है अर्थात् खण्डों की उँचाइयों में जो सम्बन्ध है वही उनके पृष्ठफल में सम्बन्ध होता है ।

यहाँ यदि $y = अ$ और $y_2 = -अ$ तो गोल का समग्र पृष्ठफल $= ४\pi अ^2 = ४ \times$ वृत्तफल ।

अर्थात् वृत्त के फल को चार गुना कर देने से वृत्त से बने गोल का पृष्ठफल होता है । भारतवर्ष में सब से पहले इस गोल के पृष्ठफल को भास्कराचार्य ने निकाला है और यद्यपि उन से इस की सच्ची उपपत्ति न हुई तथापि गोल का बहुत सा खण्ड कर और प्रत्येक खण्डों का फल साधन कर उनके योग पर से अटकर से सच्चा ही पृष्ठफल निकाला और लल्लु ने जो अशुद्ध पृष्ठफल का साधन किया था उसका खण्डन किया ।

भास्कराचार्य ने अपने गोलाध्याय में यह भी दिखलाया है कि गोल के परिधि के आधे को व्यास मान एक कपड़े का वृत्त बनाया जाय और इस से यदि गोल को ढाँके तो गोल का आधे से अधिक खण्ड ढँक जाता है इस लिये कपड़े के वृत्त का जो फल उसके दूने से गोल का पृष्ठफल अल्प ही होगा और गणित से निश्चय है कि गोल के वृत्त के फल से कपड़े के वृत्त का दूना फल पाँच गुना के आसन्न है इस लिये वृत्त के फल को पाँच गुना करने से गुणनफल गोल के पृष्ठफल से अधिक होगा इस लिये लल्लु ने जो अपने गणित में लिखा है कि

(वृत्तफलं परिधिघ्नं समन्ततो भवति गोलपृष्ठफलम्) वृत्तफल को परिधि से गुण देने से पृष्ठफल होता है यह बहुत ही अशुद्ध है ।

१४५। वृहद्व्यास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसको दीर्घगोल कहो तो इस के पृष्ठफल के आनयन के लिये कल्पना करो कि दीर्घवृत्त का समीकरण $a^2r^2 + k^2y^2 = a^2k^2$ यह है

$$\text{तो यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{k^2y}{a^2r} \text{ और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left[1 + \frac{k^2y^2}{a^2r^2}\right]}$$

$$= \frac{k(\sqrt{(a^2 - k^2y^2)})}{ar}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$p = \frac{2\pi k}{a} \int \sqrt{(a^2 - k^2y^2)} \text{ ताय} = \frac{2\pi k^2}{a} \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{k^2} - y^2\right)} \text{ ताय} \dots (१)$$

$$= \frac{\pi k^2}{a} \left\{ y\sqrt{\left[\frac{a^2}{k^2} - y^2\right]} + \frac{a^2}{k^2} \text{ज्या}^{-1} \frac{ky}{a} \right\}$$

यदि ०, अ के भीतर य के मान में पृष्ठफल का साधन करें तो दीर्घगोल का आधा पृष्ठफल = π अक $\left\{ \sqrt{(1 - k^2)} + \frac{\text{ज्या}^{-1}k}{k} \right\}$

(दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

यदि y_2, y_1 के भीतर चलानयन करें तो (१) से

$$p = \frac{2\pi k^2}{a} \int \frac{y_2}{y_1} \sqrt{\left(\frac{a^2}{k^2} - y^2\right)} \text{ ताय}$$

यह दिखलाता है कि जिस दीर्घवृत्त का $\frac{a}{k}$ वृहद्व्यासार्द्ध और क लघुव्यासार्द्ध है उसका y_2, y_1 सम्बन्धि द्विगुण कोटियों के भीतर जो खण्ड है उसे π से गुण देने से y_2, y_1 भुज सम्बन्धि अपने दीर्घवृत्त का पृष्ठफल हो जायगा ।

इसी तरह यदि दीर्घवृत्त लघुव्यास के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल भुज और कोटि को बदल देने से

$$p = 2\pi \int y \text{ ताचा} = 2\pi \int \left[a^2 + \frac{a^2 k^2}{k^2 r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ तार}$$

$$= 2\pi \frac{a^2 k^2}{k^2} \int \left[r^2 + \frac{k^2}{a^2 k^2} \right] \text{ तार}$$

$$= 2\pi \frac{a^2 h}{k^2} \left\{ \frac{r}{h} \sqrt{(r^2 + \frac{k^4}{a^2 h^2})} + \frac{k^4}{a^2 h^2} \text{ला} \left\{ r + \sqrt{\left[r^2 + \frac{k^4}{a^2 h^2} \right]} \right\} \right\}$$

$$= \pi \frac{ar}{k^2} (a^2 h^2 r^2 + k^4)^{\frac{3}{2}} + \pi \frac{k^2}{h} \text{ला} \frac{a^2 h r + \sqrt{(a^2 h^2 r^2 + k^4)}}{a^2 h}$$

०, क के बीच में चलानयन करने से और उसको दूना कर देने से समग्र पृष्ठफल = $2\pi a^2 + \pi \frac{k^2}{h} \text{ला} \frac{1+h}{1-h}$

यदि $\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2 h^2 r^2}{k^2} = 1$ इस अतिपरवलय का y_1, y_2 के भीतर फल साधन करो तो स्पष्ट होगा कि इस फल से π गुना ऊपर के घनक्षेत्र का y_1, y_2 भुजसम्बन्धी पृष्ठफल होगा ।

१४६। परवलय का चाप y अक्ष के चारों ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसके पृष्ठफल का आनयन ।

कल्पना करो कि परवलय का समीकरण $r^2 = 4ax$ यह है तो

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{2a}{r} \quad \frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{4a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(4a^2 + r^2)}}{2a} \quad \text{इस लिये १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से}$$

$$P = \int 2\pi r \frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} \text{तार} = \frac{\pi}{a} \int r \sqrt{(4a^2 + r^2)} \text{तार}$$

$$= \frac{\pi}{2a} \int \sqrt{(4a^2 + r^2)} 2r \text{तार} = \frac{\pi}{2a} \times \frac{2}{3} (4a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{3a} (4a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} + \text{स्थि}$$

$$०, \text{ और } r_1 \text{ के भीतर पृष्ठफल} = \frac{\pi}{3a} \left\{ (4a^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}} - 4a^3 \right\}$$

१४७। कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन ।

इस का $r = \frac{y}{h} \left(e^{\frac{y}{h}} + e^{-\frac{y}{h}} \right)$ यह समीकरण है

और जहाँ $y = 0$ वहाँ से गणना करने से चा = $\frac{\pi}{h} \left(e^{\frac{y}{h}} - e^{-\frac{y}{h}} \right)$

(७३वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये यदि y अक्ष के चारों ओर वक्र के घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो उसका पृष्ठफल १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$\int 2\pi r \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}$ ताय यह होगा परन्तु यहाँ वक्र के लक्षण से

$$r^2 = \frac{g^2}{\delta} \left(\sqrt{\frac{2y}{g}} + \sqrt{-\frac{2y}{g}} + 2 \right) = \frac{g^2}{\delta} \left(\sqrt{\frac{2y}{g}} - 2 + \sqrt{-\frac{2y}{g}} + \delta \right) = \text{चा}^2 + g^2$$

इस लिये r तार = चा ताचा । $\frac{r}{\text{चा}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ता}} \text{ और } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\delta} \left(\sqrt{\frac{2y}{g}} - 2 + \sqrt{-\frac{2y}{g}} \right)$

$= \frac{\text{चा}}{g}$ इस लिये $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{r}{g}$ ।

$$\begin{aligned} \text{पृ} &= 2\pi \int r \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} \text{ताय} = 2\pi \int \frac{r^2 \text{ताय}}{g} = \frac{2\pi}{g} \int \frac{g^2}{\delta} \left(\sqrt{\frac{2y}{g}} + \sqrt{-\frac{2y}{g}} + 2 \right) \text{ताय} \\ &= \frac{\pi g}{\delta} \int \left(\sqrt{\frac{2y}{g}} + \sqrt{-\frac{2y}{g}} + 2 \right) \text{ताय} = \frac{g^2 \pi}{\delta} \left(\sqrt{\frac{2y}{g}} - \sqrt{-\frac{2y}{g}} \right) + g^2 \pi y \\ &= \pi (r \text{चा} + g y) \end{aligned}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि चाप और कोटि के घात में g गुणित भुज जोड़ कर उसको व्यास मानो तो इस व्यास पर से जो परिधि हो वही कातन्वली घनक्षेत्र का पृष्ठफल होगा ।

इसी स्थान में यदि r अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो पृष्ठफल =

$$2\pi \int y \text{ताचा} = 2\pi \int \frac{y r \text{ताय}}{g} = \pi \int y \left(\sqrt{\frac{2y}{g}} + \sqrt{-\frac{2y}{g}} \right) \text{ताय}$$

$$\text{परन्तु } \int y \sqrt{\frac{2y}{g}} \text{ताय} = g y \sqrt{\frac{2y}{g}} - g \int \sqrt{\frac{2y}{g}} \text{ताय} = g y \sqrt{\frac{2y}{g}} - g^2 \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$\text{और } \int y \sqrt{-\frac{2y}{g}} \text{ताय} = -g y \sqrt{-\frac{2y}{g}} + g \int \sqrt{-\frac{2y}{g}} \text{ताय} = -g y \sqrt{-\frac{2y}{g}}$$

$-g^2 \sqrt{-\frac{2y}{g}}$ खण्डचलानयन से ।

इस लिये

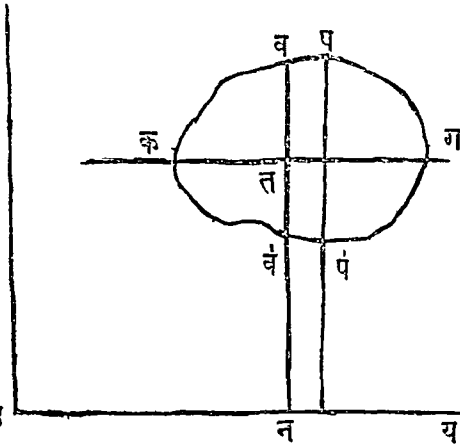
$$0, y \text{ के बीच में } \text{पृ} = \pi \int_0^y y \sqrt{\frac{2y}{g}} \text{ताय} + \pi \int_0^y y \sqrt{-\frac{2y}{g}} \text{ताय}$$

$$= \pi \left(g y \sqrt{\frac{2y}{g}} - g^2 \sqrt{\frac{2y}{g}} + g^2 - g y \sqrt{-\frac{2y}{g}} - g^2 \sqrt{-\frac{2y}{g}} + g^2 \right)$$

$$= 2\pi \left\{ g^2 + y \left[\frac{y}{r} \left(\frac{y}{g} - \frac{y}{g} \right) \right] - g \left[\frac{y}{r} \left(\frac{y}{g} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\}$$

$$= 2\pi (g^2 + yचा - गर) ।$$

१४८। कल्पना करो कि कवपग पव^१ क एक ऐसा सीमितवक्र है जिस का



कग रेखा के दोनों ओर तुल्य अवयव है। कग रेखा अय अक्ष के समानान्तर और अय अक्ष क्षेत्र के बाहर है।

अय अक्षके चारो ओर इस क्षेत्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का पृष्ठफल १४१ प्रक्रम से यदि व, प और

व^१प^१ को बहुत ही पास पास समझो और अय अक्ष पर व न लम्ब को र, व^१न लम्ब को र^१ और क ग के दोनों ओर सब तरह से क्षेत्र के समान भाग होने से वप चाप = व^१प^१ चाप तो $2\pi \int (r+r^1) ताचा = ४\pi क ताचा$ यहाँ क = तन इस लिये यदि समग्र वक्र की लम्बाई अर्थात् परिधि कवपगपव^१ क का मान संचा हो तो समग्र पृष्ठफल = $2\pi क \times संचा$ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि ऐसे क्षेत्रो का पृष्ठफल उन के परिधि और व अक्ष से समानान्तर रेखा का अन्तर जो हो उस को व्यासार्द्ध मानने से जो वृत्त की परिधि हो वन के घात के तुल्य होता है ।

जैसे यदि वृत्त का समीकरण $(y-c)^2 + (x-z)^2 - g^2 = 0$ ऐसा हो तो स्पष्ट है कि य अक्ष के समानान्तर केन्द्रगामिनी रेखा जो होगी उस का य अक्ष से अन्तर ज होगा इस लिये य अक्ष के चारो ओर वृत्त के घूमने से गोलमुद्रिका होगी उस का पृष्ठफल = गोलपरिधि \times ज व्यासार्द्ध की परिधि = $2\pi ग \times 2\pi ज$

यहाँ यदि १४१वे प्रक्रम से समानान्तर रेखा के ऊपरी भाग का पृष्ठफल साधन करो तो $पृ = 2\pi \int [ज + \sqrt{g^2 - (y-c)^2}] ताचा$

$$= 2\pi \int ज ताचा + 2\pi \int \sqrt{g^2 - (y-c)^2} ताचा$$

$$= 2^{\pi}जचा + 2^{\pi} \int \sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}} ताचा = 2^{\pi}जचा + 2^{\pi}गय$$

लघुरूप करने से ।

इसी प्रकार रेखा के नीचे के भाग का पृष्ठफल = $2^{\pi}जचा - 2^{\pi}गय$ ऐसा होगा ।

$$\text{इस लिये समग्र घनफल} = 2^{\pi}ज \times 2चा = 2^{\pi}गज \times गो प$$

१४९। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण $\text{श्रु} = अ(१ + कोज्याष)$ यह है, स्थिर रेखा के चारों ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस के पृष्ठफल का ज्ञान करना हो तो १४९वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$पृ = 2^{\pi} \int \text{श्रुज्याष} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ताष} ।$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{\{ \text{श्रु}^2 + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^2 \}} = अ \sqrt{\{ (१ + कोज्याष)^2 + ज्या^2ष \}}$$

$$= अ \sqrt{(२ + २कोज्याष)} = २अ कोज्या^{\frac{प}{३}}$$

$$\text{इस लिये पृ} = ४^{\pi}अ^2 \int (१ + कोज्याष) कोज्या^{\frac{प}{३}} ज्याष \text{ताष}$$

$$= १६ \pi अ^2 \int कोज्या^{\frac{प}{३}} ज्या^{\frac{प}{३}} \text{ताष} = - \frac{३२^{\pi}अ^2}{५} कोज्या^{\frac{प}{३}} + स्थि ।$$

$$०, \pi \text{ के भीतर } ष \text{ के मान में समग्र घनक्षेत्र का पृष्ठफल} = \frac{३२^{\pi}अ^2}{५}$$

१५०। कल्पना करो कि परस्पर लम्बरूप तीन धरातलों के योग रेखाओं के वश से किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का $f(y, r, l) = ०$ यह समीकरण है (१८वाँ प्रक्रम देखो) तो इस पर से स्पष्ट है कि

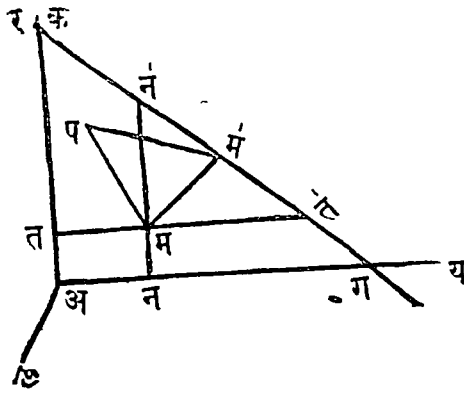
$ल = फा (य, र)$ ऐसा होगा । जिस पृष्ठविन्दु का $भु = य$, $को = र$, $शं = ल$ है उस विन्दु पर घनक्षेत्र में स्पर्शधरातल करने की इच्छा है ।

स्पर्शधरातल उसे कहते हैं जिस के और वक्र के पृष्ठ के बीच दूसरा धरातल न बन सके । इस धरातल के जानने के लिये पहले साधारण किसी धरातल का समीकरण बनाते हैं ।

कल्पना करो कि किसी इष्टधरातल में $प$ कोई विन्दु है जिस के शङ्कु $ल$ का मूल $य$ र धरातल में $म$ और $य$ र धरातल और इष्ट धरातल की योगरेखा कग है ।

म विन्दुसे अय और अर अक्ष पर क्रम से मन, मत लम्ब डाल कर बढ़ा दो और मान लो कि कग रेखा में इन दोनों लम्बों का योग न, और त विन्दु में है ।

प विन्दु से कग रेखा पर लम्ब पम है ।



अब यहाँ घनक्षेत्रमिति से शं = ल = पम, भु = य = अन और कोटि = र = मन । \angle ममप = यर धरातल और इष्टधरातल से उत्पन्न कोण = इ, \angle क = क, \angle ग = ग ।

नग = अग-अन = अग-य . नन = नग कोस्प न = (अग-य) कोस्पक
और नम = नन-मन = (अग-य) कोस्पक-र . मम = नम ज्यान
= (अग-य) कोज्याक-रज्याक परन्तु मम = पम कोस्प \angle पमम
= लकोस्पइ । इस लिये

(अग-य)कोज्याक-रज्याक = अगज्याग-यज्याग-रज्याक = लकोस्पइ
वा य ज्याग + रज्याक + लकोस्पइ-अगज्याग = ०, . . . (१)

इस में ज्याग, ज्याक, कोस्पइ, और-अगज्याग इन स्थिराङ्कों को इन के महत्तमापवर्त्तन से भाग दे कर इन के स्थान में क्रम से आ, का, खा, गा का उत्थापन देवो तो धरातल का समीकरण

आय + कार + खाल + गा = ० . . . (२) यह हुआ

कल्पना करो कि पृष्ठ के उस विन्दु पर गये धरातल का समीकरण

आय + कार + खाल + गा = ० यह है तो इस के दूसरे विन्दु के भु = य, को = र, शं = ल से आय + कार + खाल + गा = ० ऐसा समीकरण होगा ।

इस लिये दोनों के अन्तर से आ(य-र) + का(र-ल) + खा(ल-ल) = ०

इसलिये ल—ल = आ Δ य + का Δ र जहाँ— $\frac{आ}{खा} = आ - \frac{का}{खा} = -का$
 परन्तु य + Δ य, र + Δ र भुजकोटि के वश से घनवक्र के पृष्ठ का शङ्कु
 = ल + $\frac{ताल}{ताय} \Delta$ य + $\frac{ताल}{तार} \Delta$ र

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{ताल}{ताय^2} (\Delta य)^2 + 2 \frac{ताल}{ताय तार} \Delta य \Delta र + \frac{ताल}{तार^2} (\Delta र)^2 \right\} + \dots$$

(चलनकलन का ढव्वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये घनक्षेत्र के पृष्ठ के शङ्कु में धरातल के शङ्कु को घटा देने से

$$अन्तर = अं = \left(\frac{ताल}{ताय} - आ \right) \Delta य + \left(\frac{ताल}{तार} - का \right) \Delta र$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{ताल}{ताय^2} (\Delta य)^2 + 2 \frac{ताल}{ताय तार} \Delta य \Delta र + \frac{ताल}{तार^2} (\Delta र)^2 \right\} + \dots$$

यर धरातल में जिन बिन्दुओं का य, र और य + Δ य, र + Δ र भुजकोटि है उन पर गई रेखा य अक्ष से यदि व कोण बनावे तो Δ र = यस्पव अन्तर मे इन का उत्थापन देने से

$$अं = \left\{ \left[\frac{ताल}{ताय} - आ \right] + \left[\frac{ताल}{तार} - का \right] स्पव \right\} \Delta य + \left[\frac{ताल}{ताय^2} + 2 \frac{ताल}{ताय तार} स्प व + \frac{ताल}{तार^2} स्प^2 व \right] \frac{(\Delta य)^2}{2} + \dots$$

इस लिये

$$\frac{अं}{\Delta य} = \left[\frac{ताल}{ताय} - आ \right] + \left[\frac{ताल}{तार} - का \right] स्प व + \left\{ \frac{ताल}{ताय^2} + 2 \frac{ताल}{तायतार} स्प व + \frac{ताल}{तार^2} स्प^2 व \right\} \frac{\Delta य}{2}$$

यह समीकरण दिखलाता है कि Δ य अत्यल्प लेने से $\frac{अं}{\Delta य}$ यह $\left(\frac{ताल}{ताय} - आ \right) + \left(\frac{ताल}{तार} - का \right) स्प व$ इस के तुल्य हो सकता है इस में यदि

Δ य, Δ र ऐसे हों कि स्प व = $-\frac{\frac{ताल}{ताय} - आ}{\frac{ताल}{तार} - का}$ तो स्पष्ट है कि एक दिशा में

परमाल्प अन्तर शून्य के लगभग होगा ।

परन्तु यदि $\frac{ताल}{ताय} = आ$ और $\frac{ताल}{तार} = का$ तो सब दिशाओं में परमाल्प अन्तर शून्य के लग भग होगा और Δ य के स्थान में ताय रखने से ठीक ही ठीक शून्य के तुल्य होगा ऐसी दशा में वह धरातल स्पर्शधरातल होगा

और उस का समीकरण आ, का के स्थान में $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{ल}}{\text{ल}} - \frac{\text{ल}}{\text{ल}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} (\text{य}^1 - \text{य}) + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} (\text{र}^1 - \text{र}) \text{ यह होगा } \cdot \cdot (३)$$

(१) समीकरण का रूपान्तर करने से

ल = अग स्प इ ज्या ग—य स्प इ ज्या ग—र स्प इ ज्या क

और $\frac{\text{ल}}{\text{ल}} = \text{अ ग स्प इ ज्या ग—य}^1 \text{ स्प इ ज्या ग—र}^1 \text{ स्प इ ज्या क}$

इस लिये $\frac{\text{ल}}{\text{ल}} - \frac{\text{ल}}{\text{ल}} = -\text{स्प इ ज्या ग} (\text{य}^1 - \text{य}) - \text{स्प इ ज्या क} (\text{र}^1 - \text{र}), (४)$

(३) और (४) का तुलना करने से

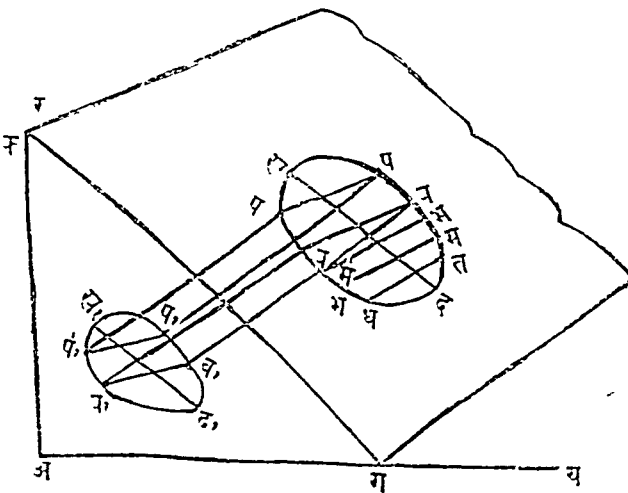
$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = -\text{स्पइज्याग}, \quad \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = -\text{स्पइज्याक} = -\text{स्पइकोज्याग}$$

$$\text{इस लिये } \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 = \text{स्प}^2 \text{ इ}$$

$$\text{इस लिये छे इ} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}} \quad (५)$$

मे यहाँ पर घनक्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का वर्णन नहीं करता हूँ किन्तु घन-क्षेत्रमिति के बल से कुछ चलराशि के सिद्धान्त को दिखलाया चाहता हूँ। हिन्दी मापा मे घनक्षेत्रमिति के न होने से उपयोगी सिद्धान्तों का कुछ वर्णन कर दिया है। डिमार्गन (Demorgan) साहव ने चलनकलन और चलराशिकलन के १५ वे अध्याय मे इस विषय पर बहुत बढ़ाकर लिखा है। चलराशिकलन मे घन-क्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का लिखना मैं अनावश्यक समझता हूँ।

१५१। कल्पना करो कि यर धरातल से जो इष्टधरातल इ तुल्य कोण बनाता है उसमे ख प व भ म त द ध ख एक कोई क्षेत्र है इसके सीमा के प्रति-



विन्दु से यर धरातल पर लम्ब डाल लम्बमूलों मे रेखा कर देने से यर धरातल मे एक नया क्षेत्र ख,प,व,द,व,प,ख, उत्पन्न हुआ इस का फल जानना हो तो पहले क्षेत्र मे कोई ख विन्दु लेकर धरातलों के योगरेखा क ग के समानान्तर खद रेखा खींचो।

इस का छोटा छोटा च के समान बहुतसा विभाग कर प्रति भागों पर पर,

वव, भभ, इत्यादि लम्ब खड़ा कर दो इस तरह से इस क्षेत्र का समानलम्ब-चतुर्भुज रूप बहुत खण्ड हो गये जिन में किसी एक पप व व चतुर्भुज का फल = च $\left[\frac{पप + वव}{२} \right]$ और इस चतुर्भुज के वश से यर धरातल में नये क्षेत्र में भी लम्बमूल के वश से एक समान लम्ब प.प, व.व, चतुर्भुज उत्पन्न होगा जिस में $प_१ प_१ = कोज्याइ \times प प$, $व_१ व_१ = कोज्याइ \times व व$ और इस में लम्ब मान वही च के तुल्य होगा इस लिये इस का फल = च $\left[\frac{प_१ प_१ + व_१ व_१}{२} \right] = च \left[\frac{प प + व व}{२} \right]$ कोज्या इ = पहले चतुर्भुज का फल \times कोज्या इ ॥ इसी तरह सब पहले चतुर्भुजों के फल को कोज्याइ से गुण देने से नये क्षेत्र के चतुर्भुजों का सब फल होगा इस लिये सब चतुर्भुजों का योग नये क्षेत्र का फल = पहले क्षेत्र के चतुर्भुजों का योग \times कोज्याइ = पहले क्षेत्र का फल \times कोज्याइ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि जिस धरातल में जो कोई क्षेत्र हो उसके प्रान्त से दूसरे धरातल में लम्ब डाल इस क्षेत्र को दूसरे धरातल में परिणामन करे तो परिणत क्षेत्र का फल पहले क्षेत्र के फल को धरातलों के झुकाव की कोटिज्या से गुण देने से होगा ।

१५२। कल्पना करो कि किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ (य, र, ल) = ० यह समीकरण है । पृष्ठ के प विन्दु का भु = य, को = र, —श = ल और प विन्दु के बहुत ही पास जो व विन्दु है उस का भु = य + Δ य, को = र + Δ र, शं = ल + Δ ल । प, विन्दु पर एक स्पर्शधरातल बना लो और प और व विन्दुओं में लगा कर य ल, र ल, धरातलों के समानान्तर धरातलों को बनाओ तो समानान्तर धरातलों से जो स्पर्शधरातल में अवयव उत्पन्न हुआ उसके प्रान्त से य र धरातल पर यदि लम्ब डालें तो उस का परिणत रूप एक आयत होगा जिसका भुज = Δ य, को = Δ र इस लिये स्पर्शधरातल के अवयव का फल = $\frac{\Delta य \times \Delta र}{कोज्या इ}$ । १५१ प्रक्रम से इस में

स्पष्ट है कि Δ य के स्थान में यदि ताय को रख दे तो स्पर्शधरातल का अवयव घनक्षेत्र के पृष्ठ का अवयव हो जायगा । परन्तु जब य = ताय तो र = तार इस लिये रल धरातल के समानान्तर दोनों

$$\text{धरातलो के बीच का पृष्ठफल} = \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याइ}} \text{ और समग्र पृष्ठफल}$$

$$= \int \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याइ}} = \iint \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 \right\}} \text{ तार ताय}$$

१५० प्रक्रम और द्विगुण चलानयन से

यहाँ यदि पहले तार को स्थिर मान चलानयन करो तो यल धरातल के समानान्तर धरातल जो है उन के बीच का पहले पृष्ठफल आवेगा फिर इस पर से तार के वश से समग्र पृष्ठफल आ जायगा ।

पृष्ठ के समीकरण के वश से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ के मान विदित हो जायेंगे फिर य, और र के उचित सीमाओं पर से अभीष्ट पृष्ठखण्ड का फल $\iint \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 \right\}} \text{ तार ताय}$ इस पर से विदित हो जायगा ।

जैसे (१) जिस गोल के पृष्ठ का $y^2 + r^2 + l^2 = a^2$ यह समीकरण है उस के अष्टमांग का पृष्ठफल जानना है तो यहाँ

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = -\frac{y}{l}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = -\frac{r}{l}$$

$$\text{इसलिये पृ} = \iint \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{l^2} + \frac{r^2}{l^2} \right)} \text{ तार ताय}$$

$$= \iint \frac{\text{अतार ताय}}{\sqrt{(a^2 - y^2 - r^2)}}$$

$$= \text{अ} \iint \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(a^2 - y^2 - r^2)}} = \text{अ} \iint \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)}} \text{ यदि } a^2 - y^2 = r_1^2$$

$$\text{परन्तु } \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)}} = \text{ज्या}^{-1} \frac{r}{r_1}$$

यहाँ यदि $l = 0$ तो यर धरातल मे जो गोलपृष्ठ का अवयव लगा है उस का समीकरण $a^2 - y^2 = r^2 = r_1^2$ ऐसा होगा इस मे यदि $r = 0$, और $r = r_1$ मानें तो अय अक्ष के ऊपर से य र धरातल और गोलपृष्ठ के सम्पात तक रल धरातल के समानान्तर धरातलो के बीच का

$$\text{पृष्ठफल} = \int_0^{r_1} \frac{\text{तार}}{\sqrt{(r_1^2 - r^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

इसलिये पृ = $\frac{\text{अ}\pi}{2}$ \int ताय इस मे यदि ० और अ के बीच य के मान

में चलानयन करें तो गोल के अष्टमांश पृष्ठ का फल = $\frac{\pi a^2}{2}$ इस लिये
समग्र पृष्ठफल = $8\pi a^2$ ।

इसी स्थान में यदि पहले ताय और फिर तार के वश से चलानयन करें तो ऊपर की युक्ति से अष्टमांश पृष्ठ का फल

$$= \int_0^a \int_0^{y_1} \frac{\text{अताय तार}}{\sqrt{(a^2 - r^2 - y^2)}} \quad | \quad \text{जहाँ } y_1^2 = a^2 - r^2$$

(२) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का $l^2 + (y \text{ कोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)^2 - a^2 = 0$
यह समीकरण है उस के पृष्ठ फल का क्या मान होगा ।

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = - \frac{\text{कोज्या } a_1 (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)}{l}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = - \frac{\text{ज्या } a_1 (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)}{l}$$

$$\text{इसलिये पृ} = \iint \frac{\text{अतारताय}}{l} = \iint \frac{\text{अतार ताल}}{\sqrt{\{a^2 - (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)^2\}}}$$

यर धरातल घनपृष्ठ को जहाँ काटता है उस का समीकरण

$a = \pm (\text{यकोज्या } a_1 - r \text{ ज्या } a_1)$ यह है । यहाँ धनचिह्न ग्रहण करने से धन पद में $r = (a - \text{यकोज्या } a_1) \text{ कोछे } a_1$

$$\text{अव } \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{\{a^2 - (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)^2\}}}$$

$$= \frac{1}{\text{ज्या } a_1} \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1}{a} \quad \text{इस का } r = 0 \text{ और}$$

$r = (a - \text{यकोज्या } a_1) \text{कोछे } a_1$ के भीतर का मान

$$= \frac{1}{\text{ज्या } a_1} \left(\frac{\pi}{2} - \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्या } a_1}{a} \right)$$

$$\text{इस लिये पृ} = \frac{a}{\text{ज्या } a_1} \int \left(\frac{\pi}{2} - \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्या } a_1}{a} \right) \text{ ताय}$$

इस में यदि $\text{ज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्या } a_1}{a} = s$, तो $\frac{\text{अज्यास}}{\text{कोज्या } a_1} = y$ और

$$\frac{\text{अकोज्यासतास}}{\text{कोज्याअ}_r} = \text{ताय}$$

इसलिये

$$\int \text{तायज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्याअ}_r}{\text{अ}} = \int \frac{\text{असकोज्यासतास}}{\text{कोज्याअ}_r} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_r} \int \text{सकोज्यासतास}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_r} (\text{सज्यास} + \text{कोज्यास})$$

अब ० और $\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_r}$ के भीतर य के मान में

$$\text{पृ} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_r} \int \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_r} \left(\frac{\pi}{2} - \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्याअ}_r}{\text{अ}} \right) \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_r} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_r} + \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_r} - \frac{\pi}{2} \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_r} \right) = \frac{\text{अ}^2}{\text{ज्याअ}_r \text{कोज्याअ}_r}$$

यह पृष्ठफल घन पद में जो घनक्षेत्र का खण्ड है उस का हुआ ।

यदि ध्यान दे कर विचार करो तो जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण ऊपर लिख कर दिखाया है वह एक समतलमस्तक रूप शङ्कु है जिस के अक्ष का समीकरण $\text{ल} = 0$, $\text{य कोज्याअ}_r + \text{रज्याअ}_r = 0$ ऐसा होगा ।

१५३। बहुत से घनक्षेत्र के पृष्ठ ऐसे होते हैं जिन के पृष्ठ का अवयव जो १५२ प्रक्रम में देखा गया है एक ही होते हैं । जैसे जिस पृष्ठ का $\text{रअल} = \text{य}^2 + \text{र}^2$ यह समीकरण है उस में

$$\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 = \frac{\text{य}^2 + \text{र}^2}{\text{अ}^2} \text{ और जिस के पृष्ठ का समीकरण}$$

$$\text{अल} = \text{यर यह है उस में भी } \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 = \frac{\text{य}^2 + \text{र}^2}{\text{अ}^2}$$

वही सिद्ध होता है इस लिये दोनों में पृष्ठ का परमात्ममान अर्थात् तात्कालिकी गति एक ही है । ऐसे पृष्ठों का यूलर (Euler) ने Congruent नाम रक्खा है मैं इन्हे समगतिक पृष्ठ कहता हूँ ।

इसी प्रकार $(\text{ल}-\text{ग}) = \{ (\text{य}-\text{अ})^2 + (\text{र}-\text{क})^2 \}$ स्पष्ट इस शङ्कु और

यकोज्याअ, + र कोज्याक, + ल कोज्याइ = घ इस ध्रुगतल में भी पृष्ठ का अवयव एक ही है । जहाँ कोज्याअ, + कोज्याक, + कोज्याइ = १ इसी तरह

$$२अल = य^२ + र^२$$

$$२अल = (य^२ - र^२)ग + २यर\sqrt{(१ - ग^२)}$$

$$२अल = \{ (य^२ + र^२)^२ - ४कयर + २ग(य^२ - र^२) + क^२ + ग^२ \}^{\frac{१}{२}}$$

इत्यादि सब पृष्ठ समगतिक पृष्ठ हैं ।

१५४। यदि स्पर्शध्रुगतल में ऐसा एक अवयव ले जिस का यर ध्रुगतल में परिणत मान श्रुताश्रुताप यह हो तो

$$पृ = \int \int \sqrt{ \left\{ १ + \left(\frac{नाल}{नाय} \right)^२ + \left(\frac{तार}{तार} \right)^२ \right\} } श्रुताश्रुताप$$

जैसे जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का यर = अल यह समीकरण है वह य^२ + र^२ = ग^२ इस वृत्त से काटा गया तो कटे खण्ड का पृष्ठफल जानना हो तो यहाँ

$$छेड = \sqrt{ \left(१ + \frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{अ^२} \right) } = \frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} \text{ क्योंकि य^२ + र^२ = श्रु^२}$$

$$इस लिये पृ = \int_०^{२र} \int_३ \frac{ग \sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} श्रुताश्रुताप$$

$$\text{परन्तु } \int \frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} श्रुताश्रु = \frac{१}{३अ} (अ^२ + श्रु^२)^{\frac{३}{२}}$$

$$\text{इस लिये } \int_०^ग \frac{ग \sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} श्रुताश्रु = \frac{१}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\}$$

$$\text{और } \int \frac{१}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\} ताप = \frac{प}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये अभीष्ट पृष्ठफल} &= \int_०^{२र} \int_०^ग \frac{ग \sqrt{(अ^२ + ग^२)}}{अ} श्रुताश्रुताप \\ &= \frac{२ग}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\} \end{aligned}$$

१५५। यदि पृष्ठ का अक्षीय समीकरण लें अर्थात्

$y = \text{श्रुज्याप कोज्याप}_1$, $r = \text{श्रुज्यापज्याप}_1$, $l = \text{श्रु कोज्याप}$

और इन पर से ताय, तार इत्यादि का मान बना कर

$$पृ = \iint \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right]^2 + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right]^2 \right\}} \text{ तार ताय}$$

इस में उत्थापन दे तो

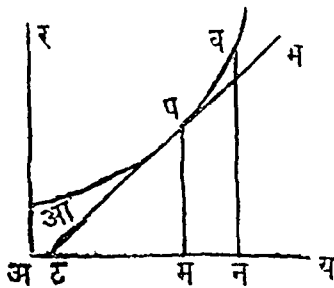
$$पृ = \iint \sqrt{\left\{ \text{श्रुज्या}^2 \text{प} + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^2 \text{ज्या}^2 \text{प} + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_2} \right]^2 \right\}} \text{श्रुताप ताप}_2$$

ऐसा सिद्ध होगा। जहाँ सुभीता समझ पड़े तहाँ इस पर से भी उचित सीमाओं के भीतर पृष्ठफल जान सकते हो विस्तार के भय से बहुत बढ़ाना नहीं चाहते। २५० प्रक्रम के (३) उदाहरण तक पहुँचोगे तो स्पष्ट घनक्षेत्र हो जायगा।

वक्र का घनफलानयन ।

१५६। कल्पना करो कि आ, वक्र में नियत बिन्दु और प कोई बिन्दु है

जिस का भु = अम = य, को = पम = र और मान लो कि आ के भुज से य बड़ा है।



धरातलों के बीच में के घनफल को घ कहें तो चलनकलन के १६० वे प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताघ}}{\text{ताय}} = r^2$$

इस लिये $घ = \int r^2 \text{ ताय}$

वक्र के समीकरण से r का जादू y के फल के रूप में आजायगा। समझ लो कि $\int r^2 \text{ ताय} = \text{फा}(y)$ तो

$$घ = \text{फा}(y) + \text{स्थि}$$

कल्पना करो कि जिस बिन्दु का भु = y_1 , उस का घनफल = $घ_1$ और जिस बिन्दु का भु = y_2 , उस का घनफल = $घ_2$ है तो

$$घ_१ = फा(य_१) + स्थि$$

$$घ_२ = फा(य_२) + स्थि$$

$$\text{इस लिये } घ_२ - घ_१ = फा(य_२) - फा(य_१) = \int_{य_१}^{य_२} \pi r^2 \text{ ताय} = \pi \int_{य_१}^{य_२} r^2 \text{ ताय}$$

१५७। समसूच्याकार शङ्कु का घनफलानयन ।

कल्पना करो कि एक सरल रेखा अ मूल बिन्दु में हो कर गई है और य अक्ष से अ तुल्य कोण बनाती है तो य अक्ष के चारों ओर इस के घूमने से समसूची उत्पन्न होगी (१४३वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये यहाँ $r = y \cdot \text{स्पअ}$

$$घ = \int \pi \text{स्पअ}^2 y^2 \text{ ताय} = \frac{\pi \text{स्पअ}^2 y^3}{३} + स्थि$$

$$\text{और } घ_२ - घ_१ = \frac{\pi \text{स्पअ}^2}{३} (y_२^3 - y_१^3)$$

कल्पना करो कि $y_१ = ०$ और $\text{त्रि} = y_२ \cdot \text{स्पअ}$ अर्थात् $y_२ = \frac{\text{त्रि}}{\text{स्पअ}}$ तो

समसूच्याकार शङ्कु (जिसके आधार परिधि का व्यासार्द्ध त्रि है) का

$$\text{घनफल} = \frac{\pi \text{स्पअ}^2}{३} \times \frac{\text{त्रि}^3}{\text{स्पअ}^3} = \frac{\pi \text{त्रि}^3}{३ \text{स्पअ}} = \frac{\pi \text{त्रि}^3 y_२}{३}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि समखात फल की तिहाई सूची का घनफल होता है। इस को भास्कराचार्य ने भी अपनी लीलावती में लिखा है।

१५८। गोल का घनफलानयन ।

$$\text{यहां } r^2 = अ^2 - y^2$$

$$\text{इस लिये } घ = \int \pi r^2 \text{ ताय} = \pi \int (अ^2 - y^2) \text{ ताय}$$

$$= \pi \left(अ^2 y - \frac{y^3}{३} \right) + स्थि । \text{ य} = ० \text{ और } \text{य} = अ \text{ मानने से आधे गोल का}$$

$$\text{घनफल} = \frac{2 \pi अ^3}{३} \text{ इस लिये सम्पूर्ण घनफल} = \frac{4 \pi अ^3}{३} = \frac{4 \pi अ^2 \times २अ}{६}$$

$$= \frac{\text{पृफ} \times \text{व्या}}{६} \text{ अर्थात् पृष्ठफल को व्यास से गुण कर छ का भाग देने से}$$

गोल का घनफल होता है। इस को भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में लिखा है।

१५९। जिस परवलय का $r^2 = ४अय$ यह समीकरण है य अक्ष के चारों ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$$घ = \int \pi r^2 \text{ ताय} = \pi \int \delta \text{अय ताय} = \delta \text{अ} \pi \int \text{यताय} = 2\text{अ} \pi \text{य}^2 + \text{स्थि}$$

इस लिये $घ_2 - घ_1 = 2\text{अ} \pi (\text{य}_2^2 - \text{य}_1^2)$ इस में यदि $\text{य}_1 = 0$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_1 = 0$ इस लिये r_2 कोटि से बने वृत्त और शिरः स्थान के

$$\text{भीतर का घनफल} = 2\text{अ} \pi \text{य}_2^2 = \frac{\delta \text{अय}_2 \pi \text{य}_2}{2} = \frac{\pi r_2^2 \text{य}_2}{2}$$

अर्थात् जिस समतलमस्तकपरिधि शङ्कु का आधार r_2 त्रिज्या से उत्पन्न परिधि हो और उँचाई य_2 हो उस के घनफल के आधे के बराबर उसी उँचाई और उसी आधार से जो परवलय का घनक्षेत्र होगा उस का घनफल होगा ।

१६०। चलनकलन के ३८८ पृष्ठ में जो चक्रालद (Cycloid) का समीकरण $r = क (\text{अ} + \text{ज्याअ})$, $\text{य} = क (१ - \text{कोज्याअ})$ यह लें तो य अक्ष के चारों ओर इस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$$घ = \int \pi r^2 \text{ ताय} = \pi क^3 \int (\text{अ} + \text{ज्याअ})^2 \text{ज्याअताअ}$$

$$= \pi क^3 \int (\text{अ}^2 + 2\text{अज्याअ} + \text{ज्या}^2 \text{अ}) \text{ज्याअताअ}$$

यहाँ खण्डचलानयन से

$$\int \text{अ}^2 \text{ज्याअताअ} = - \text{अ}^2 \text{कोज्याअ} + 2 \int \text{अकोज्याअताअ}$$

$$= - \text{अ}^2 \text{कोज्याअ} + 2\text{अज्याअ} + 2\text{कोज्याअ} ।$$

$$\int 2\text{अज्याअ}^2 \text{ताअ} = \int \text{अ} (१ - \text{कोज्याअ})^2 \text{ताअ}$$

$$= \frac{\text{अ}^2}{2} - \frac{\text{अज्याअ}^2}{2} - \frac{\text{कोज्याअ}^2 \text{अ}}{4} ।$$

$$\text{और } \int \text{ज्या}^2 \text{अताअ} = \frac{\text{कोज्याअज्याअ}^2 \text{अ}}{3} + \frac{2}{3} \int \text{ज्याअताअ}$$

$$= - \frac{\text{कोज्याअज्याअ}^2 \text{अ}}{3} - \frac{2\text{कोज्याअ}}{3} (१२ \text{ वे प्रक्रम के } १५ \text{ वे उदाहरण से) ।$$

अब आधे चक्रालद के घूमने से जो घनक्षेत्र होता है उस के घनफल का ज्ञान करना हो तो $\text{य} = 0$ और $\text{य} = 2क$ वा $\text{अ} = 0$, $\text{अ} = \pi$ के भीतर ऊपर के चर्चों का मान ले आने से

$$\int_0^\pi \text{अ}^2 \text{ज्याअताअ} = \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4$$

$$2 \int_0^\pi \text{अज्याअ}^2 \text{ताअ} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{2},$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \pi \text{ ज्या}^3 \text{ अताअ} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

इस लिये अभीष्टघनफल

$$= \pi k^3 \left\{ \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{2\pi}{3} \right\} = \pi k^3 \left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) ।$$

१६१। यदि वक्र र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो स्पष्ट है कि उस का घनफल य और र को बदल देने से $\int \pi y^2 \text{ तार}$ यह होगा । इस

$$\text{लिये } \varphi_2 - \varphi_1 = \pi \int_{r_1}^{r_2} y^2 \text{ तार} \text{ ऐसा होगा ।}$$

१६२। परवलय का $r^2 = 4ay$ यह समीकरण है और यह र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है तो इस का घन फल ऊपर के प्रक्रम से

$$\varphi = \int \pi y^2 \text{ तार} = \pi \int \frac{r^4}{16a^2} \text{ तार} = \frac{\pi r^5}{20a^2} + \text{स्थि}$$

$$\text{इस लिये } \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi(r_2^5 - r_1^5)}{20a^2} । \text{ इस में यदि } r_1 = 0 \text{ तो क्षेत्र के समी-}$$

करण से $\varphi_1 = 0$ इस लिये r_2 त्रिज्या से बने वृत्त और शिखर स्थान के भीतर का घनफल $= \frac{\pi r_2^5}{20a^2} ।$

१६३। यदि दो वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर दो घनक्षेत्र बनाते हों तो जो धरातल य अक्ष पर लम्ब है ऐसे दो धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों के काटने से उन के भीतर जो घनफल होंगे उन के अन्तर को घ कहो और पहले वक्र का $r = f(y)$ यह और दूसरे का $r = g(y)$ यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि $\varphi = \pi \int [\{ f(y) \}^2 - \{ g(y) \}^2] \text{ तार}$ यह होगा ।

जिन दोनों लम्बरूपी धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों को काटा है उन का समीकरण क्रम से यदि $y = y_1$, $y = y_2$ ऐसे हों तो ऊपर के चल में y_1 , y_2 के भीतर जो मान होगा वही घनफलों का अन्तर होगा ।

कल्पना करो कि एक सीमित वक्र ऐसा है कि एक सरल रेखा जिस का समीकरण $r = k$ है उस के सब कोटि खण्डरूपी पूर्णज्याओं का समान द्विभाग करती है (१४८वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) तो पूर्णज्या का मान यदि $f(y)$ हो तो रेखा के नीचे वक्र के भाग का समीकरण $r = a - f(y) = \varphi_a(y)$ और ऊपर

के भाग का समीकरण $r = k + f(y) = f(y)$ ऐसा होगा । इस लिये दोनों भागों से उत्पन्न घनक्षेत्र का फल $= \vartheta = \pi \int [\{ f(y) \}^2 - \{ f_a(y) \}^2] \text{ताय}$
 $= \vartheta \cdot k \int f(y) \text{ताय}$

कल्पना करो कि सीमित वक्र के दोनों प्रान्त के जहाँ कोटि वक्र की स्पर्शरेखा हो जाती है भुज क्रम से y_1, y_2 हैं तो y अक्ष के चारो ओर सीमित वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र उत्पन्न होगा उस का घन—

$$\text{फल} = \vartheta \cdot k \int_{y_1}^{y_2} f(y) \text{ताय यह होगा ।}$$

यह अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा इस वाक्य का तात्पर्य यह है कि y , और r अक्ष से जितने जितने अन्तर पर वक्र के प्रत्यवयव हैं उतने ही उतने ही अन्तर पर सर्वत्र रहें ऐसा वक्र को चारो ओर घुमाने से वक्र के आकार के वश से आकाश में जो घनाकृति उत्पन्न हो वही वक्रजन्य घनक्षेत्र है ।

ऊपर के घनफल मे अर्थात् $\pi \int [\{ f(y) \}^2 - \{ f_a(y) \}^2] \text{ताय}$ इस में यदि $f(y)$ के स्थान मे r और $f_a(y)$ के स्थान मे r' रख दे तो

$$\vartheta = \pi \int (r^2 - r'^2) \text{ताय} = \pi \int (r + r') (r - r') \text{ताय} = 2\pi k \int (r - r') \text{ताय}$$

ऐसा होगा परन्तु $\int (r - r') \text{ताय}$ यह पिछले अध्याय से सीमित वक्र का फल है ।

इस लिये यदि सम्पूर्ण वक्र का फल आ हो तो सम्पूर्ण घनक्षेत्र का फल $2\pi k \times$ आ होगा । यहाँ भी १४८ प्रक्रम के ऐसा समझ लेना चाहिये कि वक्र का सब भाग y अक्ष के ऊपर है । यदि वक्र का कुछ भाग y अक्ष के नीचे भी हो तो सहज मे दिखला सकते हो कि $2\pi k \times$ आ यह y अक्ष के नीचे और ऊपर के घनक्षेत्र विभागो के घन फलो का अन्तर होगा ।

जैसे १४८ प्रक्रम में जो $(y - c)^2 + (r - j)^2 - g^2 = 0$ इस वृत्त के y अक्ष के चारो ओर घूमने से गोलीय मुद्रिका होगी उस का घनफल ऊपर की युक्ति से $2\pi g^2 j$ यह होगा जहाँ g वृत्त का व्यासार्द्ध और j, y अक्ष से वृत्त के केन्द्र का लम्बरूपी अन्तर है ।

१६३। इसी तरह यदि दोनों वक्र जिन के समीकरण क्रम से

$$y = f(r), \quad y = f_a(r)$$

ये हैं r अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से घनफलान्तर $= \vartheta = \pi \int [\{ f(r) \}^2 - \{ f_a(r) \}^2] \text{तार यह होगा ।}$

फिर इस पर से पूर्ववत् विचार कर सकते हो ।

१६४। १५६वें प्रक्रम में घनफल के लिये जो युक्ति लिखी गई है उसी युक्ति से चाहै जैसा घनक्षेत्र हो सब का घनफल जान सकते हैं ।

जैसे किसी घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से काटे और कटे क्षेत्र का फल फ(य) कल्पना करे तो स्पष्ट है कि इस लम्बरूपी धरातल के बहुत ही पास जो दूसरा लम्बरूप धरातल है उस से भी जो कट कर दोनों धरातलो के बीच में घनक्षेत्र का घनफल Δ घ है वह फ(य) Δ य के समान होगा इसलिये

$$\frac{\Delta \text{घ}}{\Delta \text{य}} = \text{फ(य)} \quad \Delta \text{य को शून्य अर्थात् ताय मानने से}$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताय}} = \text{फ(य)} \quad \therefore \text{घ} = \int \text{फ(य)} \text{ ताय ऐसा होगा ।}$$

१६५। दीर्घवृत्तीय घनक्षेत्र जिसके पृष्ठ का समीकरण

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} + \frac{z^2}{g^2} = 1 \text{ यह है उसका घनफलानयन ।}$$

यहाँ यदि घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब धरातल से काटो जो कि मूल बिन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा है तो घनक्षेत्र के लक्षण से कटा हुआ प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिसके दोनों व्यासार्द्ध क्रम से

$$k\sqrt{\left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right]}, g\sqrt{\left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right]} \text{ ये हैं इस लिये छेदित प्रदेश का}$$

$$\text{फल} = \text{फ(य)} = \pi k g \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \text{ यह हुआ और अभीष्ट क्षेत्र का संपूर्ण घनफल}$$

$$= \int_{-a}^a \left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right] \pi k g \text{ ताय} = \frac{8\pi}{3} a k g$$

१६६। किसी सूची क्षेत्र का घनफलानयन ।

कल्पना करो कि सूची का आधार कोई बहुभुजक्षेत्र है जिस का फल आ है और सूची का वेध वा उँचाई वे है तो यदि भुज, कोटि शङ्कुओं का मूल बिन्दु सूची का शिरःस्थान मानें और य अक्ष को सूची के आधार पर लम्ब रूप मानें तो १६४ प्रक्रम की युक्ति से सूची का घनफल $\int_0^{\text{वे}} \text{फ(य)} \text{ ताय}$ यह होगा । अब यदि य अक्ष पर लम्बरूपी धरातल से सूची को काटें

तो स्पष्ट है कि छेदित प्रदेश आधार का सजातीय होगा इस लिये इस प्रदेश का फल = $f(y) = \frac{y^2 \text{आ}}{वे^2}$ इस लिये सूची का घनफल

$$= \int_0^{\text{वे}} f(y) \text{ताय} = \int_0^{\text{वे}} \frac{y^2 \text{आ}}{\text{वे}^2} \text{ताय} = \frac{\text{आ}}{\text{वे}^2} \int_0^{\text{वे}} y^2 \text{ताय} = \frac{\text{आ वे}}{3}$$

बहुभुज क्षेत्र रूपी आधार के स्थान में यदि कोई सीमित क्षेत्र हो तब भी यही घनफल आवेगा । इस पर से यह सिद्ध होता है कि आधार पर वेध तुल्य वेध में जो समखात का घनफल होता है उसके तृतीयांश के तुल्य सूची का घनफल होता है । इसको भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती के खातव्यवहार में लिखा है (समखातफलत्रयंशः सूचीखाते फलं भवति) परन्तु इसकी उपपत्ति कही नहीं लिखी है ।

१६७। कल्पना करो कि $\frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2} - \frac{l^2}{g^2} = 1$ यह एक आतिपरवल-

यिक घनक्षेत्र का समीकरण और $\frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2} - \frac{l^2}{g^2} = 0$ यह एक सम-

सूच्याकार शङ्कु का समीकरण है तो पहले घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब और मूल बिन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा हुआ जो धरातल है उस से काटे तो छेदित प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिस का फल $f(y) =$

π क ग $\left[\frac{y^2}{a^2} + 1 \right]$ यह होगा और उसी धरातल से शङ्कु का छेदित

प्रदेश भी दीर्घवृत्तही होगा जिसका फल = $f_a(y) = \frac{\pi \text{ क ग } y^2}{a^2}$ इस लिये

दोनों का अन्तर π क ग यह हुआ । इस लिये शङ्कु, आतिपरवल्यिक और दो लम्ब रूपी धरातल जो मूल बिन्दु से क्रम से y_1, y_2 तुल्य हट

कर य अक्ष में लगे हैं उनके भीतर का घनफल = $\int_{y_1}^{y_2} \pi \text{ क ग } \text{ताय}$

$$= \pi \text{ क ग } (y_2 - y_1)$$

१६८। जिन समानान्तर धरातलों से घनक्षेत्र को काट कर ऊपर के प्रकारों में घनफल साधन की युक्ति दिखाई है वे यदि य अक्ष पर लम्ब न हो किन्तु य अक्ष उन से a_1 तुल्य झुका हो तो स्पष्ट है कि $\int f(y) \text{ताय}$ इस

के स्थान में $\int f(y)$ ज्याअर्थाय इस को लेने से घनफल का मान आ जायगा ।

१६९। १६५वे प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int f(y)$ ताय इस लिये $f(y)$ को कल्पना कर लें कि किसी वक्र की कोटि r है तो १३८वें प्रक्रम की युक्ति से तीन समानान्तर वा चार समानान्तर धरातलों से जिन का परस्पर अन्तर = ch है छेदित प्रदेश के फलों से आद्यन्त धरातलान्तर्गत घन फल का स्वल्पान्तर से मान $\frac{ch}{3}$ ($आ_0 + ४ आ_1 + आ_2$) वा $\frac{3ch}{4}$ { $आ_0 + आ_2 + ३(आ_1 + आ_2)$ } यह होगा जहाँ r_0, r_1, r_2 इत्यादि के स्थान में $आ_0, आ_1$ इत्यादि को रख दिया है ।

१७०। १५६वे प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int \pi r^2$ ताय परन्तु

$\pi r^2 = \int 2 \pi r$ तार इस लिये द्विगुण चलानयन की रीति से घनफल को $\int \int 2 \pi r$ तार ताय = $2 \pi \int \int r$ तार ताय इससे प्रकाश कर सकते हैं। ११४वे प्रक्रम के क्षेत्र को यदि y अक्ष के चारों ओर घुमावें तो $d \tau$ चतुर्भुज से एक वलय उत्पन्न होगा जिसका घनफल स्वल्पान्तर से $2 \pi r \Delta y \Delta r$ यह होगा और एक स्तम्भ में जितने चतुर्भुज हैं सब से उत्पन्न वलयों के घनफल का योग $\Delta y \int_{f(y)}^{\text{फा}(y)} 2 \pi r$ तार अर्थात्

$$\Delta y \times 2 \pi \int_{f(y)}^{\text{फा}(y)} r \text{ तार} = \pi \Delta y [\{ \text{फा}(y) \}^2 - \{ f(y) \}^2] \text{ यह होगा}$$

इस लिये काता कत के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का घनफल

$$= \pi \int_{\text{अगा}}^{\text{अचा}} [\{ \text{फा}(y) \}^2 - \{ f(y) \}^2] \text{ ताय}$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \int_{f(y)}^{\text{फा}(y)} 2 \pi r \text{ तार ताय}$$

$$= 2 \pi \int_{y_1}^{y_2} \int_{f(y)}^{\text{फा}(y)} r \text{ तार ताय यदि अचा} = y_2, \text{ अगा} = y_1$$

ऊपर के $\pi \int_{\text{अचा}}^{\text{अचा}} [\{ \text{फा}(y) \}^2 - \{ \text{फ}(y) \}^2]$ ताय इस समीकरण मे
अगा

यदि फा(y) के स्थान मे फ (y) और फ (y) के स्थान मे फा(y) को रख दे तो ठीक १६३वें प्रक्रम का समीकरण हो जायगा ।

१७१। यदि जिन वक्रों के क्रम से $y = \text{फ}(r)$, $y = \text{फा}(r)$ ये समीकरण हैं उन के चाप से और जिन रेखाओ के क्रम से $r = r_1$, $r = r_2$ ये समीकरण हैं उन से बना हुआ क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो ऊपर की युक्ति से उसका घनफल $= 2 \pi \int_{r_1}^{r_2} \int_{\text{फा}(r)}^{\text{फ}(r)} r$ ताय तार ऐसा

होगा इस का ताय के वश यदि चल बना लो तो

$$\text{घ} = 2 \pi \int_{r_1}^{r_2} \{ \text{फ}(r) - \text{फा}(r) \} r \text{ तार}$$

१७२। ऊपर के प्रक्रमो की व्याप्ति दिखलाने के लिये ११६वें प्रक्रम का क्षेत्र लो । कल्पना करो कि अलक वक्र क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घन क्षेत्र बनाया उसका घनफल जानना है तो स्पष्ट है कि कनल के घूमने से जो अर्द्ध-गोल होगा और अनल के घूमने से जो परवलय संवन्धि घनक्षेत्र होगा उनके घनफलो के अन्तर के समान अभीष्ट घनफल होगा । इन दोनो घनक्षेत्रो का घनफल पिछले प्रक्रमों से विदित है इसलिये अभीष्टघनक्षेत्र का घनफल भी इन दोनो के अन्तर पर से विदित होगा इसलिये द्विगुण चलानयन से जो इसका घनफल निकलेगा उसकी जाँच अच्छी तरह से इस उदाहरण मे होगी अर्थात् दोनो रीति से फलो का मान एक हो जानेसे मन भर जायगा मानो कि न मूल विन्दु और नक य अक्ष मे धनात्मक मार्ग है तो अल वक्र का समीकरण $r^2 = 4a - y^2$ और कल का $r^2 = 4a' - y^2$ यह होगा ।

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से अभीष्ट घनफल

$$= \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} \frac{\sqrt{4a'^2 - r^2}}{4a} 2 \pi r \text{ ताय तार}$$

इसी जगह यदि यह इच्छा होकि पहले र के वश से चलानयन करे तो अलक का अफ रेखा से दो विभाग करने से

$\text{घ} =$ वृत्त खण्ड का घ फ + परवलय के खण्ड का घ फ

$$= \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{(4a^2 - y^2)}} \sqrt{(4a^2 - y^2)} \, 2\pi r \, \text{तार ताय}$$

$$+ \int_0^a \int_0^{\sqrt{(4a^2 - y^2)}} \sqrt{(4a^2 - y^2)} \, 2\pi r \, \text{तार ताय}$$

$$\sqrt{(4a^2 - 4ay)}$$

इसी जगह यदि य अक्ष के चारो ओर घलग के घूमने से जो घनक्षेत्र बने उसका घनफल अपेक्षित हो तो मान लो कि य अक्ष की घनात्मक दिशा नघ की ओर है तब न को मूल बिन्दु मानने से लग का समीकरण $r^2 = 4a - (a + y)$ और लघ का $r^2 = 4a^2 - y^2$ यह होगा ।

$$\text{इस लिये अपेक्षित घनफल} = \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{(4a^2 + 4ay)}} \sqrt{(4a^2 + 4ay)} \, 2\pi r \, \text{तार ताय}$$

$$\sqrt{(4a^2 - y^2)}$$

इसी स्थान मे यदि पहले य के चश से चल अपेक्षित हो तो लल, रेखा से अभीष्ट क्षेत्र का दो विभाग कर देने से

घ = वृत्तखण्ड का घ फ + परवलयखण्ड का घ फ

$$= \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{(4a^2 - r^2)}} \sqrt{(4a^2 - r^2)} \, 2\pi r \, \text{तार तार}$$

$$+ \frac{2a\sqrt{3}}{4a} \int_0^{r^2 - 4a^2} \sqrt{3} \, 2\pi r \, \text{तार तार}$$

१७३। यदि क्षेत्र र अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो य, र का परस्पर बदल देने से ऊपर की युक्ति से सहज मे सिद्ध हो जायगा कि

$$\text{घ} = \int \int 2\pi y \, \text{तार तार} ।$$

१७४। किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ में एक प बिन्दु और इस बिन्दु के बहुत ही पास दूसरी व बिन्दु लेकर दोनो बिन्दुओं में लगा कर यल, रल धरातलों के समानान्तर दो दो धरातलों को बनावो तो घनक्षेत्र के भीतर एक आयत आधार के ऊपर समखात बन जायगा जिस के आधार का भुज य, कोटि र और वेध, ल होगा इस लिये समखात का घनफल = ल Δ य Δ र । Δ य, Δ र को बहुत छोटा मानने से समखात का घनफल = ल तार ताय, इस लिये समग्र घनफल =

$$\int \int \text{ल तार ताय इस मे पहले यदि } \int \text{ल तार इस का मान निकालो तो स्पष्ट है}$$

कि यह y अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इसे यदि $f(y)$ के बराबर मान लो तो समग्र घनफल = $\int f(y)$ ताय यही १६४वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुआ है ।

इसी में यदि पहले $\int l$ ताय इस का मान निकालो तो यह r अक्ष पर लम्ब रूप धरातल जो होगा उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इस लिये इस को यदि $f(r)$ कहो तो ऊपर की युक्ति से समग्र घनफल = $\int f(r)$ तार। सर्वत्र सीमाओं का विचार कर घनफल निकालना चाहिये ।

१७५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का अष्टमांश घनफल (जिस के पृष्ठ का समीकरण $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = 1$ यह है) जानना हो तो यहाँ

$$l = g\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)}$$

इस लिये घ = $g \int \int \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)}$ तार ताय

यहाँ पहले $\int \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)}$ तार = $k \int \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)} \frac{tार}{k}$

$$= k \left\{ \frac{r}{2k} \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)} + \frac{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}{2} \text{ ज्या}^{-1} \frac{r}{k\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \right\}$$

इस में $r=0$ और $r=k\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}$ के भीतर का चल

$$= \frac{\pi k}{8} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)। \text{ इस लिये घ} = \int \frac{\pi k g}{8} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \text{ ताय}$$

$$= \frac{\pi k g}{8} \left[y - \frac{y^3}{3a^2} \right] \quad 0 \text{ और } a \text{ के बीच } y \text{ के मान में समग्र का } \frac{1}{2} \text{ घन}$$

फल = $\frac{\pi k g}{8} \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{\pi k g}{8} \frac{2a}{3} = \frac{\pi a k g}{4}$ इस को τ से गुण देने से

सम्पूर्ण घनफल = $\frac{\pi a k g}{4}$ । यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है ।

१७६। जिसके पृष्ठ का समीकरण $y = r = अल$ है उस से y र धरातल से और जिन चारो धरातलों का क्रम से $y = y_1, y = y_2, r = r_1, r = r_2$ ये समीकरण हैं उन से बने हुए घनक्षेत्र का घनफल जानना है ।

यहाँ १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{aligned} \text{घ} &= \frac{y_2}{y_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{y_1 r}{r_1} \text{ तार ताय} = \frac{y_2}{r_1} \int_{y_1}^{y_2} (r_2^2 - r_1^2) y \text{ ताय} \\ &= \frac{y_2}{r_1} (r_2^2 - r_1^2) (y_2^2 - y_1^2) \\ &= \frac{y_2}{r_1} (y_2 - y_1) (r_2 - r_1) \{ y_2 r_1 + y_2 r_2 + y_1 r_2 + y_1 r_1 \} \\ &= \frac{y_2}{r_1} (y_2 - y_1) (r_2 - r_1) (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) \end{aligned}$$

जहाँ l_1, l_2, l_3, l_4 ये चारो कोनो के क्रम से शङ्कु हैं

यहाँ पर यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर सर्वत्र $y < r$ धन है ।

१७७। जिस धरातल का समीकरण $z = 0$, वृत्त का $(y - c)^2 + (r - j)^2 = g^2$ और घन के पृष्ठ का $y = r = a$ ल यह है उन से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना है ।

यहाँ वृत्त के समीकरण से r की सीमा $j - \sqrt{g^2 - (y - c)^2}$ और $j + \sqrt{g^2 - (y - c)^2}$ ये होंगी इस लिये १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{aligned} \text{घ} &= \int \int \frac{y r}{a} \text{ तार ताय} = \frac{y}{a} \int \int y r \text{ तार ताय} \\ &= \frac{2j}{a} \int y \sqrt{g^2 - (y - c)^2} \text{ ताय} \end{aligned}$$

जहाँ y की सीमा $c - g, c + g$, ये हैं

$$\text{और } \frac{2j}{a} \int y \sqrt{g^2 - (y - c)^2} \text{ ताय} = \int (y - c) \sqrt{g^2 - (y - c)^2} \text{ ताय}$$

$+ c \int \sqrt{g^2 - (y - c)^2} \text{ ताय}$ यदि $y - c = t$ तो ऊपर का घनफल

$$= \frac{2j}{a} \int t \sqrt{g^2 - t^2} \text{ तात} + c \int \sqrt{g^2 - t^2} \text{ तात}$$

यहाँ t की सीमा $-g, +g$ है इस लिये सीमाओं के भीतर ऊपर के चल का मान निकालने से अभीष्ट घनफल $= \frac{j}{a} c g^2 \pi$,

यहाँ भी यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर $y < r$ धन है अर्थात् $(y - c)^2 + (r - j)^2 = g^2$ इस वृत्त का सब भाग प्रथम वा तृतीय पद में है ऐसा समझ कर तब ऊपर का घनफल निकाला गया है ।

१७८। यदि घनक्षेत्र को ऐसे धरातलों से काटें जिस में शङ्कु मूल के

अक्षीय समीकरण के वश श्रुताश्रुताय यह आधार का फल हो तो समखात का फल लश्रुताश्रुताय यह होगा इस लिये घ = \int लश्रुताश्रुताय । यहाँ $श्रु^2 = य^2 + र^2$

जैसे जिस धरातल का ल = ०, और दो पृष्ठों का $य^2 + र^2 = ४$ अ ल,

$र^2 = २$ गय— $य^2$ ये समीकरण हैं उन से बने घनक्षेत्र का फल जानना है तो यहाँ $\frac{श्रु^2}{४अ} = ल$ और श्रु, य की ऐसी सीमा होगी जिस में चल का फैलाव $र^2 = २$ गय - $य^2$ इस वृत्त के संपूर्ण फल तक हो तो यहाँ $श्रु_2 = २$ ग कोज्याय ऐसा मानने से अभीष्ट घनफल

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{श्रु_2} \frac{श्रु^2}{४अ} ताश्रु ताय = \frac{ग^2}{अ} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} कोज्या^2 पताय$$

$$= \frac{२ ग^2}{अ} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{३\pi ग^2}{८ अ} \text{ (खण्डचलानयन से)}$$

१७९। जिस पृष्ठ का ल = अ इ $\frac{य^2 + र^2}{ग^2} = अइ$ $\frac{श्रु^2}{ग^2}$ यह समीकरण है उस से और यर अक्ष से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना हो तो यहाँ पृष्ठ के समीकरण से स्पष्ट है कि मूल बिन्दु से चारों ओर अनन्त दूर तक पृष्ठ फैला हुआ है इस लिये य की सीमा ०, और २π होगी

और श्रु की ०, और ∞ होगी इस लिये घ = $\int \int अ इ - \frac{श्रु^2}{ग^2}$ श्रुताश्रुताय

इस में $\int इ - \frac{श्रु^2}{ग^2}$ श्रुताश्रु इस का मान = $-\frac{इ - \frac{श्रु^2}{ग^2}}{२} ग^2$ यह होगा

इस लिये $\int_0^{\infty} -\frac{श्रु^2}{ग^2}$ श्रुताश्रु = $\frac{ग^2}{२}$ और तब अभीष्ट घनफल का प्रमाण

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} -\frac{श्रु^2}{ग^2} श्रुताश्रुताय = अ \int_0^{2\pi} \frac{ग^2}{२} ताय = \frac{२\pi अ ग^2}{२} = \pi अ ग^2$$

१८०। १७४वे प्रक्रम में जो समखात का फल लतायतार यह निकाला है उसका ल अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उन से अनन्त विभाग कर डाले तो एक

विभाग वा समखात घनफल की तात्कालिकी गति = ताल तार ताय यह होगी इस लिये घनक्षेत्र के घनफल का मान त्रिगुण चलानयन की रीति से

\iiint ताल तार ताय यह होगा ।

१८१। जिस नलक का $y^2 + r^2 - 2ay = 0$ यह समीकरण है उसके यदि उस खण्ड का घनफल जानना चाहते हो जो कि $l = y$ स्पअ_१, $l = y$ स्पक_२ इन धरातलों से नलक के कटने से उत्पन्न हुआ है तो यहाँ नलक के समीकरण से $r^2 = 2ay - y^2 = r_1^2$, $r_1 = \sqrt{(2ay - y^2)}$

$$\begin{aligned} \text{अब १८० प्रक्रम की युक्ति से घ} &= \int_0^{2a} \int_{-r_1}^{r_1} \int_{y \text{ स्प अ}_2}^{y \text{ स्प क}_1} \text{तालतारताय} \\ &= \int_0^{2a} \int_{-r_1}^{r_1} (y \text{ स्प क}_1 - y \text{ स्प अ}_2) \text{तार ताय} \\ &= \int_0^{2a} (\text{स्प क}_1 - \text{स्प अ}_2) 2y \sqrt{(2ay - y^2)} \text{ताय} \\ &= 2(\text{स्प क}_1 - \text{स्प अ}_2) \frac{\pi a^3}{2} \end{aligned}$$

१८२। १७८वे प्रक्रम मे समखात का आधार जिस का फल, श्रुता श्रुताष यह है उसे मान लो कि यर के धरातल मे है अब इस आधार को स्थिररेखा अर्थात् य अक्ष के चारो ओर घुमाओ तो स्पष्ट है कि इस आधार के घूमने से एक घनवलय होगा जिसका घनफल = 2π श्रुताश्रुताष = 2π श्रुज्याष श्रुताश्रुताष यह होगा और पूरा फेरा करने में आधार का धरातल यर धरातल से 2π कोण उत्पन्न करेगा इस लिये दहुत पास पास के दो स्थानों मे आधार के धरातल के आने मे यर धरातल से उत्पन्न कोण का मान क्रम से $\phi_1, \phi_2 + \text{ताष}$ मानो तो घनवलय के घनफल का परमाल्प विभाग वा तात्कालिकी गति

= ताष, श्रुज्यायश्रुताश्रुताय = श्रुज्यापताश्रुतायताष, इस लिये उचित सीमाओं के वश से सम्पूर्ण घनक्षेत्र का घनफल घ = \iiint श्रुज्यापताश्रुताषताष,

जैसे जिस गोल का व्यासार्द्ध अ है उसके अष्टमांश का घनफल जानना है तो पहले $\int \text{श्रु}^3 \text{ताश्रु} = \frac{\text{श्रु}^3}{3}$ इस में ०, और अ के बीच श्रु के मान

$$\text{में चल} = \frac{अ^३}{३}$$

$$\text{तब घ} = \int \int \frac{अ^३}{३} \text{ ज्यापतापताप,}$$

इस तरह से पहले र के वश चल ले आने से श्रुज्याप श्रु प प, इन सब अवयवों का योग जो कि एक सूत्री के (जिसके आधार का फल = अज्याप प प, और वे = अ) समान है आया।

फिर प के वश चल ज्ञान करने से

$$\int \text{ज्याप ताप} = - \text{कोज्याप,}$$

यहाँ प की सीमा ० और $\frac{\pi}{३}$ मानने से

$$\text{घ} = \int \frac{अ^३}{३} \text{ ताप,}$$

इस तरह यहाँ प के वश चलानयन से $\frac{अ^३}{३}$ ज्याप Δ प Δ प, इस चाल को प, और प + प के भीतर जितनी सूत्रियाँ हैं उनका योग आया।

फिर सब के पीछे प के वश से चल ज्ञान करने से और प की सीमा ० और $\frac{\pi}{३}$ मानने से गोल के अष्टमांश घनफल का मान = घ = $\frac{\pi अ^३}{६}$

१८३। एक समसूच्याकार शङ्कु का शिरःस्थान एक गोल के पृष्ठ पर है और शिरःस्थान से गोलगर्भ तक जो रेखा गई है वही शङ्कु का अक्ष है। गोल का व्यासार्द्ध अ और शङ्कु का शिरःकोणार्द्ध अ, है तो शङ्कु के आधार के गोल के पृष्ठ में लगने से शङ्कु पृष्ठ और गोल पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल जानना हो तो शङ्कु के शिरःस्थान को मूलविन्दु मानने से गोल-पृष्ठ का अक्षीयसमीकरण

श्रु = २अकोज्याप यह होगा। इस लिये अभीष्ट

$$\text{घनफल} = \int_0^{२\pi} \int_0^{अ} \int_0^{२अकोज्याप} \text{श्रुज्यापताश्रुतापताप,}$$

१८४। इसी प्रकार श्रु = अ(१ + कोज्याप) इस वक्र के स्थिर रेखा के चारों ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल।

$$\text{घ} = \int_0^{२\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{अ(१ + कोज्याप)} \text{श्रुज्यापताश्रुतापताप,}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a (1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \, d\theta \, d\phi \, dz \quad (\text{दरवें प्रक्रम से})$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \, d\theta \quad \text{इसका मान १२वें प्रक्रम के १५वें}$$

उदाहरण से वा खण्डचलानयन से $\frac{\pi a^3}{3}$ यह होगा ।

१८५। जिन दो घनक्षेत्रों के पृष्ठ का समीकरण (१) फ $(\frac{y}{a}, \frac{r}{k}, \frac{l}{g}) = 0$

(२) फ(y, r, l) = 0 ये हों तो यदि

$$\frac{y}{a} = \frac{r}{k}, \frac{r}{k} = \frac{l}{g} \quad \text{तो}$$

$$\text{लतायतार} = \text{अकग ल ताय तार}$$

इस लिये १७४वें प्रक्रम से

$$(१) \text{ का घ} = \iint \text{लतायतार} = \iint \text{अकगलतायतार} = \text{अक} \times (२) \text{ का घ।}$$

जैसे दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण $\frac{a^2 y^2}{a^2} + \frac{a^2 r^2}{k^2} + \frac{a^2 l^2}{g^2} - a^2 = 0$

और गोल का $y^2 + r^2 + l^2 - a^2 = 0$ यह है इस लिये

$$\text{दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का घनफल} = \frac{\text{अकग} \times}{\text{अअअ}} \text{ गोल का घनफल}$$

$$= \frac{4\pi a^3 \times \text{अकग}}{3 \times a^3} = \frac{4\pi \text{अकग}}{3} \text{ यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।}$$

इस प्रकार से ऊपर कहे हुए सिद्धान्तों से सैकड़ों नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं जिन के बल से बड़े बड़े कठिन प्रश्नों का उत्तर सहज में निकल सकता है। विद्यार्थियों को चाहिये कि जिस प्रश्न में जिस सिद्धान्त से सहज में उत्तर निकालने की आशा पाई जाय उसका उत्तर बड़ी सावधानी से उसी सिद्धान्त से निकालें। उत्तर निकालने में सीमाओं का विचार बड़ी सावधानी से करना चाहिये क्योंकि सीमा ही से तो क्षेत्र बँधा है और जब सीमा ही विगड़ गई तो क्षेत्र ही दूसरा हो गया इस लिये जिस का फल अपेक्षित है उस का फल सीमाओं के विगड़ जाने से कथमपि न निकलेगा। जहाँ कही सीमाओं में संशय जान पड़े वहाँ वक्र क्षेत्र की आकृति बनाकर सीमाओं का ज्ञान कर लो।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। जिस वक्र का $y = a^x$ यह समीकरण है उसके चाप के y अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या पृष्ठफल होगा ।

२। $r = \frac{ky}{a}$ यह वक्र y अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफल क्या होगा ।

३। चक्रालद यदि शिरःस्थानगतस्पर्शरेखा के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा ।

$$उ० \frac{32r^2k^2}{3}$$

४। यदि चक्रालद अपने आधार के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा ।

$$उ० \frac{64\pi k^2}{3}$$

५। त्रीतर (Tractory) y अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल बतावो (९१वाँ प्रक्रम देखो) उ० $8\pi a^2$

६। एक गोल को दो तुल्य समतलपरिधि रूप शङ्कु से (जो कि गर्भक्षितिज पर लम्ब है और जिन के आधार वृत्त का व्यास गोल के व्यासार्द्ध तुल्य है और जिन के अक्ष गोल के उन व्यासार्द्धों का सम द्विभाग करते हैं जिनके योग से गर्भक्षितिज का व्यास बनता है) आर पार छेद डाला तो अवशिष्ट गोल के भाग का पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० अवशिष्ट भाग का पृष्ठफल गोल व्यास के वर्ग का दूना होगा (१५२ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो । सीमा का विचार अच्छी तरह से करलो)

७। जिस वक्र का $r = a \pm a \cos \frac{y}{a}$ यह समीकरण है वह यदि y अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो $y = a$, $y = -a$ इस के भीतर के खण्ड का क्या पृष्ठफल होगा ।

$$उ० 8a^2 \left\{ \sqrt{(1+k^2)} - \sqrt{2} + \frac{k(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{(1+k^2)}} \right\}$$

८। जिस वक्र के समीकरण पर से $r^2 \cos \theta = -(a^2 - r^2)^{3/2}$ रतार ऐसा सिद्ध हो y अक्ष के चारो ओर उसके घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा । उ० $2a^2$ ।

१। एक गोल को एक समतलमस्तकपरिधि रूप शङ्कु से छेद डाला तो छेदित प्रदेश का क्या पृष्ठफल होगा । इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि गोल की परिधि से शङ्कु की आधार परिधि आधी है और शङ्कु का एक पृष्ठसूत्र गोलगर्भ में होकर जाता है ।

उत्तर, यदि गोल का व्यासार्द्ध = अ तो अभीष्ट पृष्ठफल = $2\pi a^2 - 4a^2$ ।

१०। एक गोल जिसका व्यासार्द्ध १५ हाथ है उन दो समानान्तर धरातलों से काटा गया केन्द्र से जिनका अन्तर क्रम से ३, ७ हाथ हैं तो धरातलों के बीच में जो गोलखण्ड है उसका पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० ३७६.९९०८ वर्ग हस्त ।

११। पृथ्वी के पृष्ठ से कितनी ऊँचाई पर पृथ्वी के पृष्ठ भाग की तिहाई देख पड़ेगी ।

उ० पृथ्वी के व्यास के समान ऊँचाई पर ।

१२। एक समसूच्याकार शङ्कु के भीतर एक गोल बना हुआ है गोल का व्यासार्द्ध त्रि और गोल के केन्द्र और शङ्कुग्र का अन्तर (अ) है तो शङ्कु और गोल के पृष्ठफलों में क्या सम्बन्ध होगा । उ० स = $\frac{a^2 - t^2}{4a}$ त्रि

१३। अ, क गोल के व्यासार्द्ध क्रम से ३ और ४ हाथ हैं इन के पृष्ठफल के योग के समान ग गोल का पृष्ठफल है तो बतावो कि ग गोल का क्या व्यासार्द्ध होगा ।

उ० ५ हाथ

१४। यदि एक त्रिभुज जो कि य अक्ष के एकही ओर है य अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल कैसे निकालोगे । हर एक भुज को बढ़ाकर य अक्ष से मिला दो तो त्रिभुज के घूमने से वर्धित भुज भी घूमकर समसूची बनावेंगे फिर इन सूचियों के पृष्ठसूत्रों की सीमा तीनों भुज क्रम से कल्पना कर सूची खण्ड के पृष्ठफलों के योग से अभीष्ट पृष्ठफल जानलो ।

१५। दो समानान्तर धरातलों के काटने से एक गोल खण्ड ऐसा उत्पन्न हुआ कि उसके मुखपरिधि का व्यासार्द्ध (अ) आधार परिधि का व्यासार्द्ध (क) और गोलखण्ड की ऊँचाई (उ) ठीक ठहरी तो उस गोलखण्ड का समग्र पृष्ठफल क्या होगा ।

$$उ० \left[\pi \left\{ 2उ \sqrt{a^2 + \left\{ \frac{k^2 - a^2 + उ^2}{2उ} \right\}^2} + k^2 + a^2 \right\} \right]$$

१६। $r = अ (क + य)$ यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घन क्षेत्र बनाता है उसका घनफल सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi अ^2 (क + य)^2}{६} + स्थि यह होगा$$

१७। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $r^2 (य - अ क) = अ_1 य (य - ग क)$ यह वक्र घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_2 - घ_1 = \pi अ_1 \left\{ \frac{य_2^2 - य_1^2}{२} + क(अ - ग)(य_2 - य_1) + अ क^2 (अ - ग) ला \frac{य_2 - अ क}{य_1 - अ क} \right\}$$

१८। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $r^2 = \frac{अ य (य - ३ अ)}{य - ४ अ}$ यह अक्ष घन क्षेत्र बनावे तो ० और ३अ, य के मान मे क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{\pi अ^3}{२} (१५ - १६ ला २)$$

१९। शिरः स्थानगत स्पर्श रेखा के चारो ओर घूमकर चक्रालद जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा उ० $\pi^2 अ^3$ ।

२०। यदि आधार के चारो ओर चक्रालद घूमे तो क्या घनफल होगा ।

$$उ० ५\pi^2 अ^3$$

२१। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र

$$r^2 = \frac{य^2}{२अ - य} \text{ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा । } उ० २\pi^2 अ^3$$

२२। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र

$$r^2 = \frac{४ अ^2 (२ अ - य)}{य} \text{ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा ।}$$

$$उ० ४\pi^2 अ^3$$

२३। जिस वक्र का $(र - क^2)^2 = १६अ^3$ य यह समीकरण है वह र अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस मे चारो ओर से घिरा हुआ जो भाग है उस का घनफल क्या होगा ।

$$उ० \frac{\pi क^2}{३१५अ^2}$$

२४। जिस गोलखण्ड मे मुखव्यासार्द्ध (r_1) आधार व्यासार्द्ध (r_2) ऊँचाई ($वे$) उसका घनफल क्या होगा । उ० $\frac{\pi वे}{६} \left\{ वे^2 + ३ (r_1^2 + r_2^2) \right\}$

२५। जिस वक्र का $r^2 = २ मय + नय^2$ यह समीकरण है वह यदि य अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_2 - घ_1 = \frac{\pi(y_2 - y_1)}{2} \left\{ r_2^2 + r_1^2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1)^2 \right\}$$

२५। एक समसूची (जिस का शिरःकोण 60° है) के भीतर एक गोल है जो कि सूची के आधार और पृष्ठसूत्रों को स्पर्श करता है । यदि गोल का व्यासार्द्ध (त्रि) हो तो गोल और सूची से बने घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi \text{ त्रि}^3}{6}$$

२६। य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $\text{श्रु}^3 = a^2(y^2 - r^2)$ यह वक्र बनाता है उस का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi a^3}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ला} (1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{3} \right\}$$

२७। जिस वक्र में $\text{श्रु}^3 = a^2 y^2 + k^2 r^2$ हैं वह य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस का घनफल निकालो ।

इस में अ 7 क समझो ।

$$उ० \quad \frac{\pi}{6} (2a^2 + 3k^2)a + \frac{\pi k^3}{2\sqrt{a^2 - k^2}} \text{ला} \frac{a + \sqrt{a^2 - k^2}}{k}$$

२८। २७ वें प्रश्न में यदि $a = k$ तो घनक्षेत्र का क्या फल होगा ।

$$उ० \quad \frac{8\pi a^3}{3}$$

२९। २७ वें प्रश्न का वक्र यदि र अक्ष के चारो ओर घूमे तो घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi}{6} (2k^2 + 3a^2)k + \frac{\pi a^3}{2\sqrt{a^2 - k^2}} \text{ज्या}^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - k^2}}{a}$$

३०। जिस के पृष्ठ का $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} + \frac{l^3}{g^3} = 1$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{4\pi a k g}{3}$$

३१। जिसके पृष्ठ का $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = 2$ ल यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें $l = g$) से काटे तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \quad \pi a k g^3$$

३२। जिस के पृष्ठ का $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = \frac{2l}{g} - \frac{l^2}{g^2}$ यह समीकरण है उसे

यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें ल = च) से काटे तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \quad \pi \text{ अ क } \left\{ \frac{च^2}{ग} - \frac{च^2}{३ग^2} \right\}$$

३३। जिसके पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^2 + \left(\frac{र}{क}\right)^2 + \left(\frac{ल}{ग}\right)^2 = १$ यह समीकरण है

उसका प्रथम पद में जो खण्ड है उसका क्या घनफल होगा । उ० $\frac{अकग}{९०}$

३४। जिस के पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^3 + \left(\frac{र}{क}\right)^3 + \left(\frac{ल}{ग}\right)^3 = १$ यह समीकरण है

उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा । उ० $\frac{४ \text{ अ क ग}}{३५}$

३५। जिसके पृष्ठ का $(य^2 + र^2 + ल^2)^2 = २७अ^2यरल$ यह समीकरण है

उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा । उ० $\frac{९अ^3}{२}$

(१८२ प्रक्रम देखो और श्रु का परमाधिक मान समीकरण को अक्षीय समीकरण में बदल $\frac{३अ}{२\sqrt{२}}$ यह जान लो)

३६। जिस त्रिभुज के तीनों भुज क्रम से अ, क, ग हैं वह यदि ग भुज के चारो ओर घूमकर एक घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा ।

$$\text{यदि स} = \frac{अ+क+ग}{२} \text{ तो घनफल} = \frac{४र}{३} \frac{स(स-अ)(स-क)(स-ग)}{ग}$$

३७। जिसके पृष्ठ का $ल^n = अय^n + कर^n$ यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल से काटे (जिस धरातल में ल = ल,) तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \quad \frac{गल_1^{n+1}}{(न+१)\sqrt{अक}}$$

३८। जिस वृत्त का व्यासार्द्ध अ है उस में एक पूर्णज्या केन्द्र से ग दूरी पर है इस के ऊपर का चाप इस पूर्णज्या के चारो ओर घूमकर यदि घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा । चाप को समझो कि परिधि के आधे से छोटा है और कोज्यापर_१ = $\frac{ग}{अ}$ । पर_१ = कोण का चापीयमान ।

$$उ० \quad \text{अभीष्ट घनफल} = २\pi \text{ अ } \left\{ \frac{(२अ^2 + ग^2)ज्यापर_१}{३} - गपर_१ \right\}$$

३९। य अक्ष पर जो पूर्णज्या (ग) लम्ब है उसके चारो ओर घूमकर यदि परवलय का चाप घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा ।

उ० यदि पूर्णज्या के आधे पर जो लम्ब खड़ा हो वह जहाँ परवलय के चाप में लगे उसका मान पूर्णज्याई विन्दु से क मानो तो घनफल = $\frac{2^{\pi} क^2 ग}{१५}$

४० एक गोल जिसका व्यासार्द्ध (अ) है एक धरातल से जो गोल गर्भ से दूरी पर है काटा गया है । काटने से जो गोल में एक वृत्त बना उसे आधार मान दो समसूची बनाया जिसके वेध क्रम से, अ+द, अ-द है तो दोनों के घनफलो का क्या अन्तर होगा ।

$$उ० \frac{2^{\pi} (अ^2 - द^2)}{3}$$

४१। एक परवलय के य अक्ष पर केन्द्र कल्पना कर एक वृत्त बनाया तो यह वृत्त परवलय की एक शाखा में दो जगह जहाँ पर लगा उनके कोटियों का लम्ब रूपी अन्तर क ठहरा और यह वृत्त य अक्ष को दो जगह जहाँ काटा वे दोनों विन्दु परवलय के भीतर हैं । अब यदि परवलय और वृत्त दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूमें तो परवलय और वृत्त के सम्पातान्तर्गत परवलय चाप, और वृत्तचाप के वश से एक घनक्षेत्र होगा । बताओ इसके घनफल का क्या मान होगा ।

$$उ० \frac{\pi क^2}{६}$$

४२। जिस गोल का व्यासार्द्ध (अ) है उसे गोल गर्भ से (ग) अन्तर पर जो धरातल है उससे काट डाला । काटने से जो गोलार्द्ध से अल्प खण्ड है उसका क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{\pi}{3} (अ-ग)^2 (२अ+ग)$$

४३। परवलय का $r^2 = ४$ अय यह समीकरण है । य अक्ष में केन्द्र कल्पना कर परवलय के विन्दु का भु = ३ अ है उसे स्पर्श करते हुए एक वृत्तार्द्ध बनाया जिसके केन्द्र का अन्तर परवलय के शिरःस्थान से (४ अ) दूरी पर भुज की ओर है । यदि परवलय और वृत्तार्द्ध दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावें तो गोलपृष्ठ और परवलय सम्बन्धी पृष्ठ के भीतर का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{1}{3} अ^3$$

४४। लघुव्यासाग्र पर जो दीर्घवृत्त में स्पर्शरेखा है दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश उसके चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{\pi अ क^2 (10-3)}{६}$$

(जहाँ लघुव्यासार्द्ध = क, वृहद्व्यासार्द्ध = अ)

४५। एक गोले के नीचे ऊपर छेद कर उसके भीतर एक चोंगे को रख दिया तो यह चोंगा उसके भीतर चौचक बैठ गया यदि चोंगे की ऊँचाई (ग) हो तो चोंगे के पृष्ठ और गोल के पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या घनफल होगा ।

$$\text{उ० } \frac{\pi g^3}{6}$$

४६। किसी घनक्षेत्र में पृष्ठ के प विन्दु का मूल विन्दु से अन्तर श्रु हो और प विन्दुगत स्पर्शधरातल पर मूलविन्दु से लम्ब = श्रुकोज्याप और पृष्ठफल की तात्कालिकी गति = तापृ तो सिद्ध करो कि

$$घ = \frac{1}{3} \int \text{श्रुकोज्यापतापृ}$$

४७। जिस सूची के खण्ड में मुख परिधि का व्यासार्द्ध (त्रि_१) आधार-परिधि का व्यासार्द्ध (त्रि_२) और ऊँचाई (वे) है उस का घनफल क्या होगा ।

$$\text{उ० } \frac{\pi \text{वे}}{3} (\text{त्रि}_1^2 + \text{त्रि}_1 \text{त्रि}_2 + \text{त्रि}_2^2)$$

४८। समसूचियों का पृष्ठसूत्र (ग) स्थिर है । जिसका सब से अधिक घनफल है उसके शिरःकोण का क्या प्रमाण होगा ।

$$\text{उ० } \text{कोज्या}^{-1} \sqrt[3]{3}$$

४९। एक समतलमस्तकपरिधिरूप शङ्कु के एक पृष्ठसूत्र को अक्ष मान एक समसूच्याकार शङ्कु बनाया । यदि दोनों शङ्कुओं का आधार (अ) और वेध (अ × उ) हो तो पहले शङ्कु से सूची के जो दो खण्ड होंगे उनके पृष्ठफल और घनफल क्या होंगे ।

उ० क्रम से खण्डों के

$$\text{पृष्ठफल, } \frac{2\pi \sqrt{(1+3^2)} - 3\sqrt{(3+3^3)}}{6} \text{अ}^2, \frac{2\pi \sqrt{(1+3^2)} + 3\sqrt{(3+3^3)}}{6} \text{अ}^2$$

$$\text{और घनफल } \frac{2\pi + 29\sqrt{3} - 68}{12} \text{अ}^3, \frac{68 - 29\sqrt{3} - 2\pi}{12} \text{अ}^3$$

५०। जिसके पृष्ठ का $l^2 + \frac{a^2 r^2}{y^2} - g^2 = 0$ यह समीकरण है उसे उन

दो धरातलों से जिन में $y = 0$, $y = a$ है काटा तो दो धरातलों के अन्तर्गत

खण्ड का क्या घनफल होगा ।

$$\text{उ० } \frac{\pi a g^3}{2}$$

५१। $y^2 + r^2 = गल$, $y^2 + r^2 = अय$, और $ल = ०$ इन तीनों पृष्ठों के अन्तर्गत घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा । उ० $\frac{३^n अ^५}{३२}$

(१७८वाँ प्रक्रम देखो)

५२। जिस पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^५} + \frac{र^२}{क^५} + \frac{ल^२}{ग^५} = १$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा । उ० $\frac{४^n अ^५ क^५ ग^५}{३}$

(१८५वाँ प्रक्रम देखो)

५३। एक पुजारी ने ठाकुर जी के सामने जलती धूपवत्ती खोंसने के लिये मट्टी की एक समसूची बना रक्खी थी । एक दिन एक धनी ठाकुर जी के दर्शन के लिये आया और चलती बेर उस समसूची के शिरे से आधार तक एक सूत से नापकर कहा कि देखो यह १० अङ्गुल का सूत हुआ इसे मैं याद रखने के लिये जेब में रख लेता हूँ तुम इस सूची को खूब खोखली कर किसी दिन मेरी कोठी में आवो तो मैं उसे सोने से भर दूँगा । प्रातःकाल पुजारी ने एक ज्यौतिषी से आकर निवेदन किया कि महाराज आप एक मट्टी की खोखली समसूची ऐसी बना दीजिये जिसके शिरे से आधार तक सर्वत्र दश अङ्गुल रहे और भीतर सोना भरने के लिये जगह भी खूब खुलासा रहे । ज्यौतिषी ने गणित द्वारा उसके आधार परिधि का मान निकाल पुजारी को बता दिया कि इसी परिधि पर दश अङ्गुल पृष्ठ सूत्र से किसी कोहार के द्वारा समसूची को बनालो । बतावो ज्यौतिषी ने आधार परिधि का क्या मान बतलाया था । उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{३३}{३३}$ हो तो आधार परिधि = $\frac{५५}{३३} \sqrt{\frac{३००}{३३}} = ५१.२९$

इति अष्टमाध्याय ।



अथ नवमाध्याय ।

सान्तचलानयन ।

१८६। जिस तात्कालिक सम्बन्ध का साधारण रीति से अनन्त चल का ज्ञान हो जाता है उस में दोनो सीमाओ का उत्थापन देने से उस के सान्तचल का भी ज्ञान हो जाता है । इस लिये सान्तचल का मूल अनन्तचल ही ठहरा तथापि बहुत से स्थानों में अनन्तचल का रूप बिना बनाये लाघव से सान्तचल का मान आ जाता है जैसा कि ५७वे प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखा आये हैं और बहुत से स्थानों में जहाँ अनन्तचल का मान ठीक ठीक नहीं जान सकते वहाँ भी इस सान्तचल के नियम से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं इस लिये इस अध्याय में कुछ सान्तचलानयन के प्रकार लिखे जाते हैं ।

आज तक जितने सान्तचलों का ज्ञान हुआ है D Bierens de Haan ने सब को एकट्ठा कर के सान्तचलसारणी Tables d' Integrales Defines के नाम से छपवा दिया है । जिन को इच्छा हो उसे देखे हम यहाँ पर कुछ रीतियों को दिखलाते हैं ।

१८७। \int_0^{π} ज्या मय ज्यानय ताय इस का मान जानना चाहते हैं । जहाँ

म, न अभिन्न धनात्मक संख्या है और $m > n$ ।

$$\text{यहाँ ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{कोज्या (म-न) य} - \text{कोज्या (म+n) य}}{2}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{ज्या (म-न)य}}{2(म-न)} - \frac{\text{ज्या (म+n)य}}{2(म+n)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{और } \int_0^{\pi} \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = 0 \\ \text{इसी प्रकार } \int_0^{\pi} \text{कोज्यामय कोज्यानय ताय} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots (१)$$

यदि $m = n$ और अभिन्न धनात्मक तो

$$\int \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = \int \text{ज्या नय ताय} = \int \frac{(१ - \text{कोज्या } २ \text{ नय})}{2} \text{ताय}$$

$$= \frac{y}{2} - \frac{\text{ज्या}^2 \text{नय}}{4n} ।$$

$$\cdot \int_0^{\pi} \text{ज्या}^2 \text{नय} = \frac{\pi}{2}, \text{ इसी तरह } \int_0^{\pi} \text{कोज्या}^2 \text{नय} = \frac{\pi}{2} ।$$

१८८। $\int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय}$ इस का मान जानना है। जहाँ म और

न अभिन्न धनात्मक संख्या हैं।

यहाँ ३५ वे प्रक्रम से

$$\int \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{\text{कोज्या}^{n-2} \text{य ज्या}^{m+1} \text{य}}{m+n} \\ + \frac{n-1}{m+n} \int \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{n-2} \text{य ताय}$$

$$\text{वा } \int \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{m-1}{m+n} \int \text{ज्या}^{m-2} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} \\ - \frac{\text{ज्या}^{m-1} \text{य कोज्या}^{n+1} \text{य}}{m+n}$$

इस लिये दोनों पर से

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{n-2} \text{य ताय}$$

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{m-2} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} ।$$

इस लिये म और न में से कोई विषम हो तो सहज में सान्तचल विदित होगा म के स्थान में २ म + १ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m+1} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{2m}{2m+n+1} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m-1} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय}$$

इस लिये बार बार क्रिया करने से

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m+1} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय}$$

$$= \frac{2m(2m-2)(2m-4) \dots 2}{(2m+n+1)(2m+n-1) \dots (n+3)} \int_0^{\pi} \text{ज्या} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय}$$

परन्तु \int ज्या य कोज्याⁿयताय

$$= - \frac{\text{कोज्या}^{n+1} \text{य}}{n+1} \cdot \int_0^{\pi/2} \text{ज्याय कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{1}{n+1}$$

इस लिये

$$\int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^{2m+1} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2m}{(n+1)(n+3)\dots(2m+n+1)} \dots (2)$$

इसी प्रकार न यदि विषम हो तो न के स्थान में २न+१ का उल्थापन देने से

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{2n+1} \text{य ताय} &= \frac{2n}{m+2n+1} \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{2n-1} \text{य ताय} \\ &= \frac{2n(2n-2)}{(m+2n+1)(m+2n-1)} \cdot \frac{2}{(m+3)} \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या} \text{य ताय} \\ &= \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{(m+1)(m+3)\dots(m+2n+1)} \quad (3) \end{aligned}$$

इसी तरह

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{2n} \text{यताय} &= \frac{2n-1}{2m+n} \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{2n-2} \text{य ताय} \\ &= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{(2m+2)(2m+4)\dots(2m+2n)} \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^m \text{य ताय} \\ &= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \cdot \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2m-1)}{(2m-2n)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

वहुत सान्तचलो का रूप ऊपर के आकार में ला सकते हैं ।

जैसे यदि $y = \text{स्पय}$

$$\text{तो } \int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{(1+y)^n} = \int_0^{\pi/2} \text{कोज्या}^{n-2} \text{य ताय} = \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^{2n-2} \text{य ताय}$$

(४१) प्रक्रम के (४) समीकरण से)

$$= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{१२ वें प्रक्रम के (१५) उदाहरण से})$$

इसी तरह $y = \text{अ ज्याय}$ मानने से

$$\int_0^{\text{अ}} \text{य}^n (\text{अ}^2 - \text{य}^2)^{m/2} \text{ताय} = \text{अ}^{n+m+1} \int_0^{\pi/2} \text{ज्या}^n \text{य कोज्या}^{m+1} \text{य ताय}$$

और $y = a(1 - \cos \theta)$ मानने से

$$\int_0^a (2ay - y^2)^{\frac{m}{2}} \text{ ताय} = a^{m+1} \int_0^{\pi} \cos^{m+1} \theta \text{ ताय इत्यादि ।}$$

१८९। $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \text{ ताय}$ इस का मान जानना है जहाँ जानते हैं कि $f(y)$ में

जो सब से बड़ा y का मान $2n$ हो तो $f(y)$ में y का सब से बड़ा घात $n-2$ के समान वा $2n-2$ से छोटा है और $f(y) = 0$ इस में y का मान कोई सम्भाव्य संख्या नहीं है। इसलिये यहाँ स्पष्ट हो जायगा कि y के सम्भाव्य मान में $\frac{f(y)}{f(y)}$ यह अनन्त के तुल्य नहीं होगा।

मान लो कि $f(y) = 0$ इस में एक जोड़ा असम्भाव्य मान $a_1 + k_1\sqrt{-1}$, $a_1 - k_1\sqrt{-1}$ ये हैं और १७वें प्रक्रम से $\frac{f(y)}{f(y)}$ इस का रूप खण्डभिन्नों में ले आवें तो इन दोनों मानों के वश से एक खण्ड—

$$\text{भिन्न} = \frac{a_1 + k_1\sqrt{-1}}{y - a_1 + k_1\sqrt{-1}}, \text{ दूसरा} = \frac{a_1 - k_1\sqrt{-1}}{y - a_1 - k_1\sqrt{-1}} \text{ है।}$$

$$\text{इस लिये दोनों का योग} = \frac{2a_1(y - a_1) + 2k_1k_1}{(y - a_1)^2 + k_1^2}$$

इस प्रकार से दो दो खण्ड भिन्नो का योग करने से

$$\frac{f(y)}{f(y)} = \frac{2a_1(y - a_1) + 2k_1k_1}{(y - a_1)^2 + k_1^2} + \frac{2a_2(y - a_2) + 2k_2k_2}{(y - a_2)^2 + k_2^2} + \dots + \frac{2a_n(y - a_n) + 2k_nk_n}{(y - a_n)^2 + k_n^2} \dots (१)$$

(जहाँ और दो दो असम्भाव्य मानों के वश से a_2, a_2, \dots इत्यादि सिद्ध हुए हैं)

(१) में समच्छेद करने से स्पष्ट है कि दहने पक्ष में y^{2n-2} का गुणक $2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ यह होगा परन्तु बायें पक्ष में अर्थात् $f(y)$ में y^{2n-2} का गुणक ० है क्योंकि मान लिया है कि $f(y)$ में सब से बड़ा y का घात $2n-2$ के समान वा $2n-2$ से छोटा है इस लिये सरूप समीकरण की विधि से $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0$ ।

(१) में एक खण्ड का चल साधारण रीति से

$$\int \frac{२आ_१(य-अ_१)ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} + \int \frac{२का_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = आ_१ला \left\{ (य-अ_१)^२ + क_१^२ \right\} \\ + २का_१स्प^{-१} \int \left(\frac{य-अ_१}{क_१} \right)$$

इस लिये $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२का_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = २का_१^{\pi}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य-अ_१)ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२}$ इस में मान लो कि $\infty = \frac{१}{इ_१ए}$, $-\infty = \frac{-१}{इ_२ए}$

जहाँ ए = ०, अब आ_१ला $\left\{ (य-अ_१)^२ + क_१^२ \right\}$ इस में य के स्थान में क्रम से $\frac{१}{इ_१ए}$, $-\frac{१}{इ_२ए}$ का उत्थापन दे कर अन्तर करने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य-अ_१)ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = आ_१[ला \left\{ \left(\frac{१}{इ_१ए} - अ_१ \right)^२ - क_१^२ \right\} \\ - ला \left\{ \left(-\frac{१}{इ_२ए} - अ_१ \right)^२ + क_१^२ \right\}] \\ = आ_१ [ला \left\{ \frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{इ_१^२ए^२} \right\} \\ - ला \left\{ \frac{(१+इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२}{इ_२^२ए^२} \right\}] \\ = आ_१ला \left\{ \frac{इ_२^२}{इ_१^२} \frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{(१+इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२} \right\} = आ_१ला \left[\frac{इ_२^२}{इ_१^२} \right] \\ = २आ_१ला \frac{इ_२}{इ_१}, \quad \text{ए का मान शून्य मानने से ।}$$

इस प्रकार से (१) में एक खण्डभिन्न सम्बन्धि $\infty, -\infty$ सीमाओं के भीतर का मान = $२आ_१ला \frac{इ_२}{इ_१} + २का_१^{\pi}$ यह सिद्ध हुआ ।

इसी तरह (१) के सब खण्डभिन्नो के $= \infty, -\infty$ सीमाओ के भीतर सान्त-चलों का मान ले आ कर योग कर देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{फ(य)}{फा(य)} ताय = २ (आ_१ + आ_२ + \dots + आ_n) ला \left[\frac{इ_२}{इ_१} \right]$$

$$+ 2\pi(का_1 + का_2 + \dots + का_n)$$

$$= 2\pi(का_1 + का_2 + \dots + का_n \dots \dots) \cdot (२)$$

१९०। ऊपर के प्रक्रम संबंधि एक उदाहरण अत्यन्त चमत्कृत दिखाते हैं ।

मानो कि $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{2m+1}}{1+y^{2n}}$ इस का मान जानना है जहाँ n और m धन अभिन्न

संख्या है और $n > m$ यहाँ मानो कि $y^{2n} + 1 = 0$ इस में एक मान α है तो 2π वें प्रक्रम से $\alpha_1 - का_1 \sqrt{-1} = -\frac{\alpha^{2m+1}}{2n}$ और चलनकलन के ३१७वें प्रक्रम से α , कोज्या $\frac{2k+1}{2n} \pi + \sqrt{-1}$ ज्या $\frac{2k+1}{2n} \pi$ इस चाल का होगा जिस में क कोई धन संख्या n से छोटी है ।

$$\text{इस लिये } \alpha^{2m+1} = \left(\text{कोज्या } \frac{2k+1}{2n} \pi + \sqrt{-1} \text{ ज्या } \frac{2k+1}{2n} \pi \right)^{2m+1}$$

$$= \text{कोज्या } \frac{2k+1}{2n} (2m+1)\pi + \sqrt{-1} \text{ ज्या } \frac{2k+1}{2n} (2m+1)\pi$$

$$= \text{कोज्या } (2k+1) \pi + \sqrt{-1} \text{ ज्या } (2k+1) \pi, \text{ यदि } \frac{(2m+1)\pi}{2n} = \pi$$

इस लिये असम्भाव्य और सम्भाव्य को समान करने से

$$\alpha_1 - का_1 \sqrt{-1} = -\frac{\text{कोज्या}(2k+1)\pi}{2n} - \frac{\sqrt{-1} \text{ ज्या}(2k+1)\pi}{2n}$$

इस में $का_1 = \frac{\text{ज्या}(2k+1)\pi}{2n}$, k के स्थान में $0, 1, 2, \dots, n-1$ का

उत्थापन देकर योग करने से

$$का_1 + का_2 + \dots + का_n$$

$$= \frac{1}{2n} \{ \text{ज्या}\pi + \text{ज्या}3\pi + \text{ज्या}5\pi + \dots + \text{ज्या}(2n-1)\pi \}$$

इस में यदि $s = \text{ज्या}\pi + \text{ज्या}3\pi + \dots + \text{ज्या}(2n-1)\pi$

तो $2s$ ज्या $\pi = 2\text{ज्या}\pi + 2\text{ज्या}3\pi + \dots + 2\text{ज्या}(2n-1)\pi$

$$= 1 - \text{कोज्या}2\pi + \text{कोज्या}2\pi - \text{कोज्या}4\pi + \dots$$

$$+ \text{कोज्या}(2n-2)\pi - \text{कोज्या}2n\pi$$

$$= 1 - \text{कोज्या}2n\pi = 2\text{ज्या}^2 n\pi = 2\text{ज्या}^2 (2m+1) \frac{\pi}{2} = 2$$

इस लिये $\pi = \frac{1}{\text{ज्या}\pi} = \frac{1}{\text{ज्या} \frac{2m+1}{2n} \pi}$ ।

इसका उत्थापन ऊपर के मान में देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{2m+1}}{1+y^{2n}} = \frac{1}{2n} \frac{2\pi}{\text{ज्या} \frac{2m+1}{2n} \pi} = \frac{\pi}{n \text{ ज्या} \frac{2m+1}{2n} \pi}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}} \text{ ताय (चतुर्थाध्यायके (१) अभ्यासार्थ प्रश्न से)}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\infty} \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}} \text{ ताय} = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\text{ज्या } \frac{2m+1}{2n} \pi}$$

$$१९१। \int_0^{\infty} \frac{y^{2m}}{1-y^{2n}} \text{ ताय इस का मान जानना है जहाँ } n > m \text{ और दोनों}$$

धनात्मक अभिन्न संख्या हैं ।

इस के जानने के लिये पहले दिखलाते हैं कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = 0$$

$$\text{क्योंकि } \int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} + \int_1^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} \text{ (४१ प्रक्रम के (१) समीकरण से)}$$

$$\text{परन्तु यदि } y = \frac{1}{r} \text{ तो } \int_1^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{\text{तार}}{1-r^2} = - \int_0^1 \frac{\text{तार}}{1-r^2} = - \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2}$$

(४१ प्रक्रम के (३) समीकरण की कल्पना से)

इसका उत्थापन देने से

$$\int_0^{\infty} \int \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} + \int_1^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} - \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = 0$$

यह सिद्ध हुआ ।

$$\text{अब } \int_0^{\infty} \frac{y^{2m} \text{ ताय}}{1-y^{2n}} \text{ इस में स्पष्ट है कि } 1-y^{2n} = 0 \text{ इस में दो सम्भाव्य}$$

मान य के आवेगो एक + १ दूसरा - १ इस लिये खण्डभिन्नो मे + १, - १ इन

दोनों मान के वश से जो दो भिन्न होंगे उन का योग = $\frac{1}{n(1-y^n)}$ यह होगा ।

इस लिये ऊपर की युक्ति से

$$\frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^{2n}} = 0 \text{ । वाकी खण्डभिन्नो मे } n-1 \text{ जोड़े असम्भाव्य मान}$$

होंगे इस लिये

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{2m} \text{ ताय}}{1-y^{2n}} = 2 \pi (का_1 + का_2 + \dots + का_{n-1})$$

यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{का}_1 + \text{का}_2 + \dots + \text{का}_{n-1} = \frac{1}{2n} \{ \text{ज्या} 2\pi + \text{ज्या } 4\pi + \dots + \text{ज्या } 2(n-1)\pi \}$$

जहाँ पहले के ऐसा $\pi = \frac{(2m+1)\pi}{2n}$

यहाँ पर भी सरलत्रिकोणमिति की युक्ति से सब जीवाओं के योग

$$\text{कामान} = \frac{\text{कोज्या}\pi - \text{कोज्या}(2n-1)\pi}{2\text{ज्या}\pi} = \text{कोस्प} \frac{(2m+1)\pi}{2n}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^\infty \frac{y^{2m}\text{ताय}}{1-y^{2n}} = \frac{\pi}{2n} \text{कोस्प} \frac{2m+1}{2n}\pi$$

इस में और ऊपर के प्रक्रम में यदि $y^{2n} = l$ और $a = \frac{2m+1}{2n}$ तो

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{y^{2m}\text{ताय}}{1+y^{2n}} &= \int_0^\infty \frac{l^{a-1}\text{ताल}}{1+l} = \frac{\pi}{\text{ज्या}a\pi} \\ \text{और } \int_0^\infty \frac{y^{2m}\text{ताय}}{1-y^{2n}} &= \int_0^\infty \frac{l^{a-1}\text{ताल}}{1-l} = \pi\text{कोस्प} a\pi \end{aligned} \right\} \quad (१)$$

यहाँ m , और n के वश से सिद्ध कर सकते हो कि a सर्वदा धनात्मक और १ से अल्प है ।

१९२। ऊपर के दो प्रक्रमों में जो दो सान्तचल आये हैं उनके बल से अनेक रूपान्तर बना सकते हो । जैसे ऊपर के प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि $h = l^a$ तो

$$\int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1+h^{\frac{1}{a}}} = \frac{a\pi}{\text{ज्या}a\pi}, \quad \int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1-h^{\frac{1}{a}}} = a\pi\text{कोस्प} a\pi$$

इन में $t = \frac{1}{h^a}$ मानने से

$$\int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1+h^{\frac{1}{a}}} = \frac{\pi}{t\text{ज्या} \frac{\pi}{t}}, \quad \int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1-h^{\frac{1}{a}}} = \frac{\pi}{t} \text{कोस्प} \frac{\pi}{t} \dots (१)$$

जहाँ t धन और १ से अधिक है ।

$$\text{और } \int_0^\infty \frac{y^n\text{ताय}}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{1-y^n\text{ताय}}{1+y^2} + \int_1^\infty \frac{y^n\text{ताय}}{1+y^2}$$

$$\text{परन्तु यदि } y = \frac{1}{l} \text{ तो } \int_1^\infty \frac{y^n\text{ताय}}{1+y^2} = \int_1^0 - \frac{l^{-n}\text{ताल}}{1+l^2} = \int_0^1 \frac{1-y^{-n}\text{ताय}}{1+y^2}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{y^n + y^{-n}}{1+y^2} \text{ताय} । \dots \dots (२)$$

और १९० प्रक्रम के सान्तचल मे यदि $n=1$, और $2m=n < 1$ मान ले तो $\int_0^\infty \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2} = \frac{\pi}{2 \text{ को ज्या } \frac{n\pi}{2}} \dots \dots (३)$

(३) से (२) का मान

$$= \frac{\pi}{2 \text{ को ज्या } \frac{n\pi}{2}} = \int_0^1 \frac{y^n + y^{-n}}{1+y^2} \text{ताय} = \int_0^1 \frac{y^n + y^{-n}}{y + y^{-1}} \frac{\text{ताय}}{y} \dots (४)$$

इसी तरह

$$\frac{\pi}{2} \text{ स्प } \frac{n\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{y^n \text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{y^n - y^{-n}}{y - y^{-1}} \frac{\text{ताय}}{y} \dots (५)$$

सर्वत्र समझो कि $n < 1$ है

(४) और (५)वे मे यदि $y = e^{-x}$ और $x = n\pi$ तो

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx} + e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \text{ताल} = \frac{\text{ले } e^{-x}}{2} । \int_0^\infty \frac{e^{-nx} - e^{-nx}}{e^{nx} - e^{-nx}} \text{ताल} = \frac{\text{स्प } \frac{x}{2}}{2}, \dots (६)$$

इस तरह से सैकड़ों रूपान्तर कर सकते हो ।

१९३। इस सान्तचलानयन की विधि से फल मे चाहे जिस वर्ण को स्वतन्त्र मान उसके वश से चाहे जौन सा तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हैं ।

जैसे $\int_a^k f(y) \text{ताय}$ इस का तात्कालिक सम्बन्ध क को स्वतन्त्र मान उस के वश से निकालना है जहाँ यह जानते हैं कि $f(y)$ मे क नहीं है और क और अ यहाँ यदि $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(y) + \text{स्थि}$,

तो $\int_a^k f(y) \text{ताय} = \text{फा}(k) - \text{फा}(a)$ दोनो परस्पर स्वतन्त्र है ।

इस लिये $\frac{\text{ताम}}{\text{ताक}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताक}} \{ \text{फा}(k) - \text{फा}(a) \} = \frac{\text{ताफा}(k)}{\text{ता क}} = \text{फ}(k)$ यह बड़े लाग्रव से सिद्ध हो जाता है इसके लिये यूरोप के लोगो की कल्पना जो टाड् हण्टर इत्यादिको ने लिखी है सो दिखाते हैं ।

कल्पना करो कि $s = \int_a^k f(y) \text{ ताय}$

और जब बदल के $k + \Delta k$ हुआ तब s का मान $s + \Delta s$ हुआ ।

इस लिये $s + \Delta s = \int_a^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय}$

इस लिये $\Delta s = \int_a^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय} - \int_a^k f(y) \text{ ताय}$
 $= \int_a^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय}$ (४१) प्रक्रम के (१) (समीकरण से)

परन्तु ४०वें प्रक्रम से

$$\int_k^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय} = \Delta k f(k + p \Delta k)$$

जहां p कोई १ से अल्प भिन्नाङ्क है ।

इस तरह से $\frac{\Delta s}{\Delta k} = f(k + p \Delta k)$, Δk का, मान शून्य मानने से

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{तास}}{\text{ताक}} = f(k) \\ \text{और } \frac{\text{ता}^n \text{स}}{\text{ताक}^n} = f^{(n-1)}(k) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (१)$$

इसी तरह a को स्वतन्त्र मानने से यदि $f(y)$ में a न हो और a, k

परस्पर स्वतन्त्र हों तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -f(a)$

$$\text{और } \frac{\text{ता}^n \text{स}}{\text{ताअ}^n} = -f^{(n-1)}(a) \dots \dots \dots (२)$$

१९४ । $s = \int_a^k f(y, g) \text{ ताय}$ यहां पर g को स्वतन्त्र मानने से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ का मान

जानना है जहां a और k दोनों g की अपेक्षा स्वतन्त्र है ।

$$\text{यहां } s = \int_a^k f(y, g) \text{ ताय}$$

इस लिये $s + \Delta s = \int_a^k f(y, g + \Delta g) \text{ ताय}$

$$\text{और } \Delta s = \int_a^k f(y, g + \Delta g) \text{ ताय} - \int_a^k f(y, g) \text{ ताय}$$

$$= \int_{अ}^{क} \{ फ(य, ग + \Delta ग) - फ(य, ग) \} \text{ ताय}$$

इस लिये $\frac{\Delta स}{\Delta ग} = \int_{अ}^{क} \left\{ \frac{फ(य, ग + \Delta ग) - फ(य, ग)}{\Delta ग} \right\} \text{ ताय}$

$\Delta ग$ को शून्य मानने से तात्कालिक सम्बन्ध के धर्म से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ ताय}$$

इसमे इतना समझ लो कि अ, वा क दोनों में से कोई अनन्त के तुल्य नहीं है। क्योंकि चलनकलन की युक्ति से

$$\frac{फ(य, ग + \Delta ग) - फ(य, ग)}{\Delta ग} = \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} + इ_१ \text{ ऐसा होगा।}$$

जहाँ $\Delta ग$ को शून्य मानने से इ_१ भी शून्य हो जायगा।

इस लिये $\frac{\Delta स}{\Delta ग} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ ताय} + \int_{अ}^{क} इ_१ \text{ ताय}$

अब यहाँ प्रत्यक्ष देख पड़ता है कि ग को शून्य मानने से यदि क, और अ अनन्त न हों तो $\int_{अ}^{क} इ_१ \text{ ताय}$ यह शून्य के तुल्य हो जायगा।

अब जब $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ ताय}$
इसलिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ ताय}$ } (१)

कल्पना करो कि (१) में \int फ (य, ग) ताय = फा (य, ग)

और $\int \frac{\text{ताफा}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ ताय} = \text{फि}(य, ग)$

तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \frac{\text{ताफा}(क, ग)}{\text{ताग}} - \frac{\text{ताफा}(अ, ग)}{\text{ताग}} = \text{फि}(क, ग) - \text{फि}(अ, ग)$ (२)

इसमे मानो कि फ (य, ग) मे क नहीं है और अ, क से स्वतन्त्र है तो
(२) से $\frac{\text{ता फा}(क, ग)}{\text{ताग}} + \text{फि}(अ, ग) - \frac{\text{ता फा}(अ, ग)}{\text{ताग}} = \frac{\text{ता फा}(क, ग)}{\text{ताग}} + \text{स्थि}$
 $= \text{फि}(क, ग) \dots$ (३)

किसी संख्या के वश से किसी सान्तचल का तात्कालिक सम्बन्धानयन । २७५

जहां फि (अ, ग) — $\frac{\text{ता फा (अ, ग)}}{\text{ताग}} = \text{स्थि} = \text{क में स्वतन्त्र स्थिराङ्क ।}$

अब (३) में चाहे क के स्थान में जो उत्पापन दो समीकरण ठीक ही रहेगा मान लो कि क के स्थान में य को रख दिया तो

$$\frac{\text{ता फा (य, ग)}}{\text{ताग}} + \text{स्थि} = \text{फि (य, ग)} \dots\dots(४)$$

(४) में यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें और फा (य, ग) और फि (य, ग) के स्थान में इनका पहला मान रख दें तो

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \int \text{फ (य, ग) ताय} = \int \frac{\text{ता फ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} \dots (५)$$

(५) वें से एक के चलज्ञान से दूसरे का चलज्ञान सहज में हो सकता है जैसे

$$\text{यदि फ (य, ग) = } \frac{१}{१ + ग^२ य^२} \text{ तो फ (य, ग) ताय = } \int \frac{\text{ताय}}{१ + ग^२ य^२} = \frac{१}{ग} \text{स्प}^{-१} \text{गय}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \frac{\text{ताफा (य, ग)}}{\text{ताग}} &= \frac{२ गय^२}{(१ + ग^२ य^२)^२} \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \int \text{फ (य, ग) ताय} = \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \left(\frac{१}{ग} \text{स्प}^{-१} \text{गय} \right) \\ &= \frac{१}{ग} \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} (\text{स्प}^{-१} \text{गय}) = \frac{१}{ग} \frac{\text{य}}{१ + ग^२ य^२} \end{aligned}$$

इस लिये (५) वें से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \int \text{फ (य, ग) ताय} = \frac{१}{ग} \frac{\text{य}}{१ + ग^२ य^२} = \int \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} = - \int \frac{२ गय^२ \text{ताय}}{(१ + ग^२ य^२)^२}$$

देखो यहां $\int \text{फ (य, ग) ताय} = \int \frac{\text{ताय}}{१ + ग^२ य^२}$ इसके ज्ञान से तात्कालिक

सम्बन्ध पर से इससे अधिक कठिन का — $\int \frac{२ गय^२ \text{ताय}}{(१ + ग^२ य^२)^२}$ इसका ज्ञान सहज में हो गया ।

१९५। यदि $\text{स} = \int \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{फ (य, ग) ताय}$ इसमें यदि क, और अ दोनों ग के फल हों तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ का मान जानना ।

यहां स्पष्ट है कि तीन चलराशि के वश से अर्थात् अ, क, ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकलेगा । इस लिये चलनकलन के प्रक्रम से और ऊपर के प्रक्रमों से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int \frac{\text{क}}{\text{ग}} \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} + \frac{\text{तास} \cdot \text{ताक}}{\text{ताक ताग}} + \frac{\text{तास} \cdot \text{ताअ}}{\text{ताअ ताग}}$

$$= \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} + \text{फ (क, ग)} \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} - \text{फ (अ, ग)} \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह से

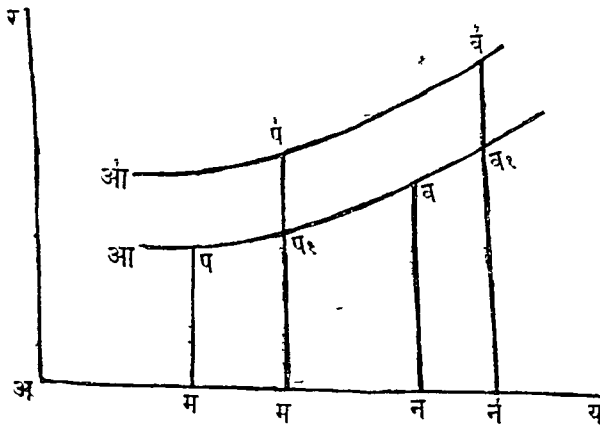
$$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताग}^2} = \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \frac{\text{ता}^2\text{फ (य, ग)}}{\text{ताग}^2} \text{ताय}$$

$$+ \text{फ (क, ग)} \frac{\text{ता}^2\text{क}}{\text{ताग}^2} + \frac{\text{ताफ (क, ग)}}{\text{ताक}} \left\{ \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} \right\}^2 + 2 \frac{\text{ताफ (क, ग)}}{\text{ताग}} \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}$$

$$- \text{फ (अ, ग)} \frac{\text{ता}^2\text{अ}}{\text{ताग}^2} - \frac{\text{ताफ (अ, ग)}}{\text{ताअ}} \left\{ \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}} \right\}^2 - 2 \frac{\text{ताफ (अ, ग)}}{\text{ताग}} \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह $\frac{\text{ता}^3\text{स}}{\text{ताग}^3}$ इसका और इससे अधिक का भी मान जान सकते हो ।

१९६।१९५ प्रक्रम में जो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ इसका मान दिखलाया है उसे क्षेत्र की रीति से भी दिखा सकते हो ।



मान लो कि आपव वक्र का समीकरण $r = \text{फ (य, ग)}$ और आपर्वे का समीकरण $r = \text{फ (य, ग + } \Delta\text{ग)}$ यह है और मानो कि

अम = अ, अ न = क, म म' = Δ अ, न न' = Δ क तो स, पमनव का और स + Δ स पमन'व का क्षेत्रफल होगा । इसलिये

$$\Delta\text{स} = \text{प'प'व'व' + वनन'व' - पमम'प'}$$

$$\text{और } \frac{\Delta\text{स}}{\Delta\text{ग}} = \frac{\text{प'प'व'व'}}{\Delta\text{ग}} + \frac{\text{वनन'व'}}{\Delta\text{ग}} - \frac{\text{पमम'प'}}{\Delta\text{ग}}$$

उस में म'न' का मान यदि परमाल्प अर्थात् ताय के तुल्य हो तो $\frac{\text{प'प'व'व'}}{\text{न}} = \frac{\text{फ (य, ग + } \Delta\text{ग)} - \text{फ (य, ग)}}{\text{ग}\Delta}$ ताय, $\frac{\text{वनन'व'}}{\Delta\text{ग}} = \text{फ (क, ग)} - \frac{\Delta\text{क}}{\Delta\text{ग}}$

किसी स्थिर संख्या के वश से किसी सान्तचल का सम्बन्धानयन । २७७

और $\frac{प म म प_}{\Delta ग} = फ(अ, ग) \frac{\Delta अ}{\Delta ग}$ । इस पर से $\Delta ग$ के स्थान में ताग मानने से

$$\frac{तास}{ताग} = \frac{ताफ(य, ग)}{ताग} ताय + फ(क, ग) \frac{ताक}{ताग} - फ(अ, ग) \frac{ताअ}{ताग}$$

यही १९५ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था ।

१९७। ऊपर के प्रक्रमों में जो सिद्धान्त दिखलाये हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) उस वक्र को जानना है जिस में चाप, य अक्ष, और कोटि से बने क्षेत्र का फल भुजकोटि के घात से न गुणित हो । जहाँ न कोई स्थिराङ्क है । मानो कि वक्र का समीकरण $r = फ(य)$ है तो फलानयन की विधि से

$\int_0^g फ(य) ताय$ यह उस खण्ड का फल होगा जो वक्रचाप, य अक्ष, और

उस कोटि से जिस में $भु = ग$, है बना है इस लिये प्रश्न के आलाप से

$$स = \int_0^g फ(य) ताय = \frac{गफ(ग)}{न} \text{ यह स्थिति चाहे } ग \text{ का मान जो हो}$$

सर्वत्र रहेगी इस लिये ग के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से १९३

$$\text{प्रक्रम के (१) समीकरण से } \frac{तास}{ताग} = फ(ग) = \frac{फ(ग) + गफ'(ग)}{न}$$

$$\text{इस लिये (} न-१ \text{) } फ(ग) = गफ'(ग)$$

$$\text{और } \frac{फ'(ग)}{फ(ग)} = \frac{न-१}{ग}$$

चलानयन से ला $फ(ग) = (न-१) लाग + स्थि$

अर्थात् $फ(ग) = आग^{न-१}$ जहाँ आ कोई स्थिराङ्क है ।

ग के स्थान में य को रख देने से अभीष्ट वक्र का समीकरण

$$फ(य) = आय^{न-१} \text{ यह हुआ ।}$$

(२) जिस वक्र का $r = फ(य)$ यह समीकरण है उसमें यह जानते हैं कि ग के सब मानों में

$$\frac{\int_0^g य \{ फ(य) \}^२ ताय}{\int_0^g \{ फ(य) \}^२ ताय} = \frac{ग}{न} \text{ यह स्थिति है तो } फ(य) \text{ का स्वरूप}$$

कैसा होगा ।

यहा प्रश्न के अनुसार छेदगम कर देने से

$$\int_0^g y \{ f(y) \}^2 \text{ताय} = \frac{g}{n} \int_0^g \{ f(y) \}^2 \text{ताय} \text{ ऐसा होगा ।}$$

ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$g \{ f(y) \}^2 = \frac{g}{n} \int_0^g \{ f(y) \}^2 \text{ताय} + \frac{g}{n} \{ f(g) \}^2$$

$$\text{समशोधन से } g \left(1 - \frac{g}{n} \right) \{ f(g) \}^2 = \frac{g}{n} \int_0^g \{ f(y) \}^2 \text{ताय}$$

इस का ग के वश से फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\left(1 - \frac{g}{n} \right) \{ f(g) \}^2 + 2g \left(1 - \frac{g}{n} \right) f(g) f'(g) = \frac{\{ f(g) \}^2}{n}, f(g)$$

$$\text{का भाग दे कर समशोधन से } \left(1 - \frac{g}{n} \right) f'(g) + 2g \left(1 - \frac{g}{n} \right) f'(g) = 0$$

$$\text{इस लिये } \frac{f'(g)}{f(g)} = \frac{2-n}{2(n-1)} \frac{1}{g}, \text{ चलानयन करने से}$$

$$\text{ला} f(g) = \frac{2-n}{2(n-1)} \text{ला} g + \text{स्थि।}$$

$$\text{इस लिये } f(g) = \text{आ } g^{\frac{2-n}{2(n-1)}} \text{ जहां आ कोई स्थिराङ्क है ।}$$

$$\text{इस तरह से } f(y) = \text{आ } y^{\frac{2-n}{2(n-1)}} \text{ यह सिद्ध हुआ ।}$$

यह उदाहरण स्थिति विद्या मे एक चमत्कार कारक है ।

$$(३) f(y) \text{ का ऐसा स्वरूप जानना है जिसमें } \int_0^m \frac{f(y) \text{ताय}}{\sqrt{(g-y)}} \text{ यह ग से}$$

स्वतन्त्र हो जहां जानते हैं कि ग से फ(y) स्वतन्त्र है ।

यहां मानलो कि य = गल तो

$$स = \int_0^g \frac{f(y) \text{ताय}}{\sqrt{(g-y)}} = \int_0^g \frac{\sqrt{g} f(\text{गल}) \text{ताल}}{\sqrt{(1-l)}} \text{ अब प्रश्नानुसार स, ग से}$$

स्वतन्त्र है इस लिये

$$0 = \frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_0^g \frac{\frac{f(\text{गल})}{2\sqrt{g}} + l\sqrt{g} f'(\text{गल})}{\sqrt{(1-l)}} = \int_0^g \frac{g f(y) + 2y f'(y) \text{ताय}}{2g\sqrt{(g-y)}}$$

किसी स्थिर संख्या के वश से किसी सान्तचल का सम्बन्धानयन । २७९

यह सब ग के मान में जब $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = 0$ है इस लिये अवश्य ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा सिद्ध कर सकते हो कि

$$f(y) + 2y f'(y) = 0 \therefore \frac{f'(y)}{f(y)} = -\frac{1}{2y}$$

$$\text{इस लिये ला } f(y) = -\frac{1}{2} \text{ ला}(y) + \text{स्थि।}$$

$$\text{इस लिये } f(y) = \frac{\text{आ}}{\sqrt{y}} \text{ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।}$$

इस वक्र में नीच स्थान से यदि उस बिन्दु तक जिसका भु = y है चाप चाहो तो गति विद्या से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = f(y) = \frac{\text{आ}}{\sqrt{y}} \therefore \text{चा} = 2\text{आ}\sqrt{y}$$

(७१ वां प्रक्रम देखो) इस पर से कह सकते हो कि ऊपर का वक्र चक्रादल होगा ।

$$(४) \int_0^{\infty} z^{-ay} \text{ ताय} = \frac{1}{a} \text{ तो यहां न वार अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध}$$

$$\text{निकालने से } \int_0^{\infty} y^n z^{-ay} \text{ ताय} = \frac{n}{a^{n+1}} \text{ यह सिद्ध हुआ।}$$

$$\text{क्योंकि } \int z^{-ay} \text{ ताय} = \frac{z^{-ay}}{a} = -\frac{1}{az^ay}$$

$$\text{इस लिये—} \int_0^{\infty} z^{-ay} \text{ ताय} = -\frac{1}{az^{\infty}} + \frac{1}{az^0} = 0 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

इस तरह से सैकड़ों प्रश्नोत्तर निकाल सकते हो ।

१९८ । फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Fullani)

$$\text{इसे सिद्ध करना है कि } \int_0^{\infty} \frac{f(ay)-f(ky)}{y} \text{ ताय} = f(0) \times \text{ला} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$\text{कल्पना करो कि स} = \int_0^{\infty} \frac{f(l)-f(0)}{l} \text{ ताल इस में ल} = ay \text{ तो}$$

$$स = \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(०)}{य} ताय \dots \dots \dots (१)$$

इस में यदि अ के स्थान में क को रख दें तो

$$स = \int_0^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय) - फ(०)}{य} ताय \dots \dots \dots (२)$$

(१) और (२) के अन्तर पर से

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय)ताय}{य} - \int_0^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०)ला \int_{\frac{च}{क}}^{\frac{च}{अ}} \frac{ताय}{य} \\ & = \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय - \int_{\frac{च}{क}}^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०)ला \left(\frac{अ}{क}\right) \dots \dots (३) \end{aligned}$$

यहां यदि $च = \infty$ तो यदि $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = ०$

तो $\int_0^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = फ(०) \times ला \left(\frac{क}{अ}\right)$

जैसे यदि $फ(य) = कोज्याय$ तो

यहां $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{कोज्याकय}{य} ताय = ०$ यदि $च = \infty$

क्योंकि $\int य^{-१} कोज्याकयताय = \frac{य^{-१}ज्याकय}{क} + \frac{१}{क} \int य^{-२} ज्याकयताय$

(खण्डचलानयन से)

इस लिये य का अनन्त मान मानने से कोज्याकय, और ज्याकय तो सर्वदा १ से कम रहेंगे परन्तु भाजक ∞ के तुल्य होगा ।)

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } & \int_0^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = \int_0^{\infty} \frac{कोज्याअय - कोज्याकय}{य} ताय \\ & = फ(०) ला \left(\frac{क}{अ}\right) = कोज्या(०) \times ला \left(\frac{क}{अ}\right) = ला \left(\frac{क}{अ}\right) \end{aligned}$$

जहाँ कही $f(0) = 0$ तहाँ फ्रुलानी (Frullani) के सिद्धान्त से ठीक मान न आवेगा जैसे $\int_0^{\infty} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}} \text{ताय}$ यहाँ $f(0) = 0$ इस लिये

(३) समीकरण से

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}} \text{ताय} = \int \frac{\frac{\text{च}}{\text{क}}}{\frac{\text{च}}{\text{अ}}} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}} \text{ताय}, \text{जहाँ } \text{च} = \infty$$

दहने पक्ष में स्पष्ट है कि $\frac{\text{च}}{\text{अ}}, \frac{\text{च}}{\text{क}}$ भीतर सच अनन्त मान में

$\text{स्प}^{-1}\text{कय} = \text{स्प}^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ इस लिये

$$\int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}^{\frac{\text{च}}{\text{क}}} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{कयताय}}{\text{य}} = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}}}^{\frac{\text{च}}{\text{क}}} \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \frac{\pi}{2} \text{ला} \left(\frac{\text{अ}}{\text{क}} \right)$$

इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}} \text{ताय} = \frac{\pi}{2} \text{ला} \left(\frac{\text{अ}}{\text{क}} \right)$

१९९। यूलर के चल (Eulerian Integrals)

$\int_0^1 \text{य}^{m-1} (1-\text{य})^{m-1} \text{ताय}$ इस सान्तचल को यूलर का पहला चल कहते हैं ।

और इसे हम बी (द,म) इस संकेत से प्रकाश करते हैं । यूरोप के लोग ग्रीक वर्णमाला का दूसरा अक्षर बीटा (B) को लेकर इस को बीटा फल (Beta function) कहते हैं । हमने अपने देश के अनुसार इस का नाम बीजफल रखा है ।

$\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{य}} \text{य}^{n-1} \text{ताय}$ इस को यूलर का दूसरा चल कहते हैं और इसे हम गा(न) इस संकेत से प्रकाश करते हैं । यूरोप के लोग ग्रीक वर्णमाला का तीसरा अक्षर गामा (G) को लेकर इसे गामा फल (Gamma function) कहते हैं हमने इसका नाम गाढ़फल रखा है ।

इन दोनों को यूलर ने निकाला है इसी लिये आदर के लिये उसके नाम सहित इन्हें बोलते हैं ।

यूलर का जन्म सन् १७०७ ई० में हुआ था और ७६ वर्ष की अवस्था में इसकी मृत्यु हुई थी बीच में यह अंधा भी हो गया था और घर में आग लग जाने से बहुत से इसके प्रकार भस्म भी हो गये तथापि बहुत से इस के ग्रन्थ अद्यावधि यूरोप में प्रसिद्ध हैं जिनका वर्णन मैं इस चलराशिकलन में व्यर्थ समझता हूँ इस लिये अपने कृत्य के ऊपर लौट कर कुछ इन दोनों चलों के सिद्धान्तों को दिखलाता हूँ । नीचे सर्वत्र d , m और n को धन समझो ।

२००। ४१ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^1 y^{d-1} (1-y)^{m-1} \text{ ताय} = \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{d-1}$$

इस लिये $वी (d, m) = वी (m, d)$

अर्थात् d, m का परस्पर परिवर्तन कर देने से मान में कुछ भी अन्तर नहीं होता ।

यदि $वी (d, m)$ में $y = \frac{r}{1+r}$ तो

$$\int_0^1 y^{d-1} (1-y)^{m-1} \text{ ताय} = वी (d, m) = \int_0^\infty \frac{r^{d-1} \text{ तार}}{(1+r)^{d+m}}$$

उसी में यदि $y = \frac{1}{1+r}$ तो

$$\int_0^1 y^{d-1} (1-y)^{m-1} \text{ ताय} = वी (d, m) = \int_0^\infty \frac{r^{m-1} \text{ तार}}{(1+r)^{d+m}} ।$$

२०१। यूलर के दूसरे चल में यदि $z^{-y} = r$ अर्थात् $y = \text{ला} \frac{1}{r}$

तो $\int_0^\infty z^{-y} y^{n-1} \text{ ताय} = गा(n) = \int_0^1 \left(\text{ला} \frac{1}{r} \right)^{n-1} \text{ तार}$ यह एक गा(n)

का रूपान्तर है ।

खण्ड चलानयन से

$$\int z^{-y} y^n \text{ ताय} = -z^{-y} y^n + n \int z^{-y} y^{n-1} \text{ ताय}$$

और $z^{-y} y^n > 0$ शून्य के तुल्य होता है यदि $y = 0$, $y = \infty$ हो (चलनकलन का ३६ वाँ प्रक्रम देखो)

$$\text{इस लिये} \int_0^\infty z^{-y} y^n \text{ ताय} = n \int_0^\infty z^{-y} y^{n-1} \text{ ताय}$$

अर्थात् $गा(n+1) = nगा(n)$ (१)

और $\int_0^\infty e^{-xy} ताय = 1$ (१९७ प्रक्रम के (४) उदाहरण से जहाँ $x=1$)

इस लिये $गा(1) = 1,$ (२)

यदि n अभिन्न हो तो (१) और (२) से

$गा(n+1) = \lfloor n$

परन्तु यदि n भिन्न और १ से अधिक हो तो यदि $गा(m)$ इसका मान (जहाँ $m < 1$) ज्ञात हो तो (१) समीकरण से बार बार क्रिया करने से $गा(n)$ का मान भी आ जायगा ।

२०२। यदि $जय = ल$ तो

$\int_0^\infty e^{-जय} य^{न-१} ताय = \frac{१}{ज^n} \int_0^\infty e^{-ल} ल^{न-१} ताल = \frac{गा(n)}{ज^n}$ ।

२०३। $\int_0^\infty \int_0^\infty य^{द+m-१} र^{म-१} e^{-(१+r)y} ताय$ तार इस का द्विगुण

चलानयन से मान ले आवें तो २०२ प्रक्रम से

$गा(द+m) \int_0^\infty \frac{र^{म-१} तार}{(१+r)^{द+m}} = गा(द+m) वी(द,m)$ (२०० वें प्रक्रम)

और ऊपर के द्विगुण चल मे यदि पहले y के वश से चलानयन करें तो

$गा(m) \int_0^\infty \frac{e^{-य} य^{द+m-१}}{य^म} ताय = गा(m) \int_0^\infty e^{-य} य^{द-१} ताय$

= $गा(m) गा(द)$ इस लिये ६३ वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से

$गा(द+m) वी(द,m) = गा(m) गा(द)$

$\therefore वी(द,m) = \frac{गा(m)गा(द)}{गा(द+m)}$

इसमें यदि $द+m = 1$ तो $गा(द+m) = गा(1) = 1$ (२०१ प्रक्रम के (२) स. से)

इस लिये $वी(द,m) = \int_0^\infty \frac{र^{म-१} तार}{१+r} = गा(m) गा(१-m)$

अब यदि $m < 1$ तो १९१ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$\int_0^\infty \frac{र^{म-१} तार}{१+r} = \frac{\pi}{ज्याम^{\pi}}$ इस लिये ।

$$\text{गा}(m) \text{ गा}(1-m) = \frac{\pi}{\text{ज्याम}\pi}$$

इस में यदि $m = \frac{1}{2}$ तो $\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^2 = \pi$ • $\text{गा}(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
इसे नीचे की युक्ति से भी सिद्ध कर सकते हो ।

२०४। चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{y^x-1}{x} = \text{लाय}$ यदि $x=0$

$$\text{इस लिये कल्पना करो कि } \left(\text{ला} \frac{x}{y}\right)^{n-1} = \left[\frac{1-y^x}{x}\right]^{n-1} + r$$

जहाँ जब $x=0$ तो $r=0$ । x के स्थान में $\frac{1}{\epsilon_1}$ रखो तो २०१ प्रक्रम से

$$\text{गा}(n) = \epsilon_1^{n-1} \int_0^1 \left(1-y \frac{1}{\epsilon_1}\right)^{n-1} \text{ताय} + \int_0^1 r \text{ताय}$$

$$\text{समशोधन से गा}(n) = \int_0^1 r \text{तार} = \epsilon_1^{n-1} \int_0^1 \left(1-y \frac{1}{\epsilon_1}\right)^{n-1} \text{ताय}$$

$$= \epsilon_1^n \int_0^1 \text{ल}^{\epsilon_1-1} (1-\text{ल})^{n-1} \text{ताल, य = ल}^{\epsilon_1} \text{मानने से}$$

अब यहाँ हमें सामर्थ्य है कि ϵ_1 को धनात्मक और चाहे जितना बड़ा कल्पना कर सके इस लिये यदि $\epsilon_1 = \infty$ तो $r=0$ इस लिये ५१ प्रक्रम के (१) समीकरण से और ϵ_1 , और n को बदल देने से

$$\text{गा}(n) = \frac{|\epsilon_1|}{n(n+1)} \frac{|\epsilon_1|}{(n+\epsilon_1-1)} \epsilon_1^{n-1} \dots \dots (१)$$

(१) में n के स्थान में $n-m$, $n+m$ का उत्थापन देने से

$$\text{गा}(n-m) = \frac{|\epsilon_1|}{(n-m)(n-m+1)} \frac{|\epsilon_1|}{(n-m+\epsilon_1-1)} \epsilon_1^{n-m-1} \dots \dots (२)$$

$$\text{गा}(n+m) = \frac{|\epsilon_1|}{(n+m)(n+m+1)} \frac{|\epsilon_1|}{(n+m+\epsilon_1-1)} \epsilon_1^{n+m-1} \dots \dots (३)$$

इस लिये ।

$$\frac{\{ \text{गा}(n) \}^2}{\{ \text{गा}(n-m) \} \{ \text{गा}(n+m) \}} = \frac{\frac{|\epsilon_1|^2 \epsilon_1^{n-1}}{n^2(n+1)^2 \cdot (n+\epsilon_1-1)^2}}{\frac{|\epsilon_1|^2 \epsilon_1^{n-1}}{(n-m)^2 \{ (n+1)^2 - m^2 \} \{ (n+\epsilon_1-1)^2 - m^2 \}}}$$

$$= \frac{(n^2 - m^2) \{ (n+1)^2 - m^2 \} \cdot \{ (n+2)^2 - m^2 \}}{n(n+1)^2 \cdot \dots \cdot (n+2r-1)^2}$$

$$= \left\{ 1 - \frac{m^2}{n^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{m^2}{(n+1)^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{m^2}{(n+2)^2} \right\} \dots \dots \dots (४)$$

२०५। ऊपर के प्रक्रम के (४) समीकरण में यदि $n = 1$ तो

$$\frac{1}{गा(१-m)गा(१+m)} = \left(1 - \frac{m^2}{1^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{2^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{3^2} \right) \dots \dots \dots$$

$$= \frac{ज्याम\pi}{म\pi} \text{ (चलनकलन के २००वें प्रक्रम के (८)वें उदाहरण से)}$$

इस लिये $गा(१-m) गा(१+m) = \frac{म\pi}{ज्याम\pi}$

परन्तु २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से $गा(१+m) = म गा(म)$

इस लिये $गा(१-m) गा(म) = \frac{\pi}{ज्याम\pi}$ यह सिद्ध हुआ ।

२०६। यदि $या = गा\left(\frac{१}{n}\right)गा\left(\frac{२}{n}\right)गा\left(\frac{३}{n}\right)\dots गा\left(\frac{n+१}{n}\right)$ जहां n धन अभिन्न है

तो $या = गा\left(१ - \frac{१}{n}\right)गा\left(१ - \frac{२}{n}\right)\dots गा\left(\frac{१}{n}\right)$ उलट के लिखने से इस

$$लिये या^२ = गा\left(\frac{१}{n}\right)गा\left(१ - \frac{२}{n}\right)गा\left(\frac{२}{n}\right)गा\left(१ - \frac{३}{n}\right) \cdot गा\left(\frac{१}{n}\right)गा\left(१ - \frac{१}{n}\right)$$

$$= \frac{r^{n-1}}{ज्या \frac{\pi}{n} ज्या \frac{३\pi}{n} \cdot ज्या \frac{(n-1)\pi}{n}} \text{ (ऊपर के प्रक्रम से)}$$

परन्तु चलनकलन के ३१६ प्रक्रम के (१) समीकरण से यदि n के स्थान में

$२n$ का उत्थापन दो तो

$$\frac{य^{२n} - १}{य^n - १} = (१ - २यकोज्या \frac{\pi}{n} + य^२) (१ - २यकोज्या \frac{२\pi}{n} + य^२) \dots$$

$(१ - २यकोज्या \frac{(n-1)\pi}{n} + य^२)$ इस में क्रम से $य = १$, $य = -१$ मान चारों पक्ष में

उस का ठीक मान n रख देने से

$$n = (२ज्या \frac{\pi}{२n})^२ (२ज्या \frac{२\pi}{२n})^२ \dots (२ज्या \frac{(n-1)\pi}{२n})^२$$

$$n = (२कोज्या \frac{\pi}{२n})^२ (२कोज्या \frac{२\pi}{२n})^२ \dots (२कोज्या \frac{(n-1)\pi}{२n})^२$$

दोनों का घात कर मूल लेने से

$$n = 2^{n-1} \text{ज्या } \frac{\pi}{n} \text{ ज्या } \frac{2\pi}{n} \cdot \text{ज्या } \frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$\text{इस लिये या}^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n} \quad \text{और या} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

$$२०७। \text{ यदि फ(य) = } \frac{n^{नय} \text{गा(य)गा(य + } \frac{१}{n})\text{गा(य + } \frac{२}{n}) \cdot \text{गा(य + } \frac{n-१}{n})}{n \text{गा(नय)}} \quad (१)$$

तो य के स्थान में य + १ का उत्थापन देने से

$$\text{फ(य + १) = } \frac{n^{नय+n} \text{गा(य + १)गा(य + १ + } \frac{१}{n})\text{गा(य + १ + } \frac{२}{n}) \text{ गा(य + १ + } \frac{n-१}{n})}{n \text{ गा (नय + न)}}$$

$$= \frac{n^{नय+nय} \text{यगा(य) (य + } \frac{१}{n})\text{गा(य + } \frac{१}{n})(य + } \frac{२}{n})\text{गा(य + } \frac{२}{n}) (य + } \frac{n-१}{n})\text{गा(य + } \frac{n-१}{n})}{n \text{ गा (नय + न)}}$$

$$= \frac{n^{नय} \text{ (य + } \frac{१}{n})(य + } \frac{२}{n}) \cdot (य + } \frac{n-१}{n})\text{फ(य)}}{(नय + न - १)(नय + न - २) \dots नय} = \text{फ(य + १)}$$

$$= \frac{nय(नय+१)(नय+२) \dots (नय+n-१)}{(नय+n-१)(नय+n-२) \dots नय} \text{फ(य) = फ(य)}$$

इसी तरह फ(य + २) = फ(य + १) = फ(य) = फ(य + म) जहाँ म चाहे जैसा बड़ा मान सकते हैं। इस लिये फ(य) = फ(इ_१) जहाँ इ_१ = ∞। इस लिये फ(य), य से स्वतन्त्र है अर्थात् फ(य) का मान सर्वदा एक ही होगा चाहे य का कोई मान हो। इस लिये जब य = $\frac{१}{n}$ तो (१) में उत्थान देने से।

$$\text{फ(य) = गा(} \frac{१}{n})\text{गा(} \frac{२}{n})\text{गा(} \frac{३}{n})\text{गा(} \frac{n-१}{n}) = (२\pi)^{\frac{n-१}{२}} n^{-\frac{१}{२}} \text{ (२०६ प्रक्रम से)}$$

और जब

$$\frac{n^{नय} \text{गा(य) गा(य + } \frac{१}{n}) \text{ गा(य + } \frac{२}{n}) \cdot \text{गा(य + } \frac{n-१}{n})}{n \text{ गा(नय)}} = (२\pi)^{\frac{n-१}{२}} n^{-\frac{१}{२}}$$

इस लिये।

$$\text{गा(य) गा(य + } \frac{१}{n})\text{गा(य + } \frac{२}{n}) \dots \text{ गा(य + } \frac{n-१}{n}) = \text{गा(नय)} (२\pi)^{\frac{n-१}{२}} n^{\frac{१}{२}-नय}$$

• (२)

यह एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ। इसमें यदि य = $\frac{१}{n}$ तो २०६ प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा।

इस (२) समीकरण के सिद्धान्त को गौस (Gauss) ने वर्णन किया है।

२०८। ऊपर के प्रक्रम में (२) का लघुरिक्थ लेकर य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\frac{नगा(नय)}{गा(नय)} = \frac{गा(य)}{गा(य)} + \frac{गा(य + \frac{१}{न})}{गा(य + \frac{१}{न})} + \frac{गा(य + \frac{२}{न})}{गा(य + \frac{२}{न})} + नलान \dots (१)$$

जहाँ गा(नय) इत्यादि $\frac{ता}{ताय}$ { गा(नय) } इत्यादि के बोधक हैं ।

(१) का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और नय के स्थान में ल को रखने से ।

$$\frac{तालागा(ल)}{ताल^२} = \frac{१}{न^२} \left\{ \frac{तालागा(य)}{ताय^२} + \frac{तालागा(य + \frac{१}{न})}{ताय^२} + \dots + \frac{तालागा(य + \frac{न-१}{न})}{ताय^२} \right\}$$

यदि न का मान अनन्त कल्पना करें तो दहने पक्ष का मान ४० प्रक्रम के अनुसार

$$\begin{aligned} \frac{१}{न} \int_y^{य+१} \frac{तालागा(य)}{ताय^२} ताय &= \frac{१}{न} \left\{ \frac{तालागा(य+१)}{ताय} - \frac{तालागा(य)}{ताय} \right\} \\ &= \frac{१}{न} \left\{ \frac{तालय + ताला गा(य)}{ताय} - \frac{ताला गा(य)}{ताल} \right\} = \frac{१}{न} \left\{ \frac{१}{य} \right\} = \frac{१}{नय} = ० \end{aligned}$$

इस लिये यदि नय अर्थात् ल अनन्त हो तो $\frac{ताला गा(ल)}{ताल}$ यह शून्य के तुल्य होगा ।

अब २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से ।

$$गा(य) = \frac{गा(य+१)}{य} = \frac{गा(य+२)}{य(य+१)} = \frac{गा(य+३)}{य(य+१)(य+२)} = \frac{गा(य+n)}{य(य+१)(य+n-१)}, \text{ जहाँ}$$

$n = \infty$ इस के लघुरिक्थ का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\frac{तालागा(य)}{ताय} = \frac{तालागा(य+n)}{ताय} - \left(\frac{१}{य} + \frac{१}{(य+१)} + \dots + \frac{१}{(य+n-१)} \right)$$

इस का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और ऊपर की युक्ति से

$$\frac{तालागा(य+n)}{ताय^२} = ० \text{ करने से ।}$$

$$\frac{तालागा(य)}{ताय^२} = \frac{१}{य^२} + \frac{१}{(य+१)^२} + \frac{१}{(य+२)^२} + \dots \text{ अनन्त } \dots (२)$$

इस का y के १ और y के मान में सान्तचलानयन करने से ।

$$\frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}} + \text{स्थि} = \left(1 - \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{y+2}\right) + \dots \quad (३)$$

इस में यदि $y = 1$ तो दहना पक्ष शून्य हो जायगा इस लिये ।

$$\frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}} = -\text{स्थि} = \frac{\text{गा}(1)}{\text{गा}(1)} = \text{गा}(1)$$

अर्थात् स्थि = $-\text{गा}(1)$ । इसको यूलर का स्थिराङ्क कहते हैं । और (३) में जो श्रेणी उत्पन्न हुई है वह y के प्रत्येक धन मान में सान्त होगी अर्थात् उसका प्रत्येक धन y के मान में मान एक निश्चित संख्या के भीतर ही रहेगा ।

$$\text{गा}(n) = \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{n-1} \text{ताय इस का १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से } n \text{ के}$$

$$\text{वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से } \text{गा}(n) = \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{n-1} \text{लायताय}$$

$$\text{इस लिये } \text{गा}(1) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \text{लाय ताय}$$

(१) समीकरण में मानो कि $y = 1$ तो

$$\frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n)} - \text{लान} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\text{गा}(1)}{\text{गा}(1)} + \frac{\text{गा}(1 + \frac{1}{n})}{\text{गा}(1 + \frac{1}{n})} + \dots + \frac{\text{गा}(1 + \frac{n-1}{n})}{\text{गा}(1 + \frac{n-1}{n})} \right\}$$

$$\text{इसमें यदि } n = \infty \text{ तो } ४० \text{ प्रक्रम के श्रेणी द्वारा दहना पक्ष } \int_1^2 \frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}}$$

$$= \text{लागा}(2) - \text{लागा}(1) = 0 \text{ क्योंकि } २०१ \text{ प्रक्रम के (१) समीकरण से } \text{गा}(2) = \text{गा}(1)$$

$$\text{इस लिये यदि } n = \infty \text{ तो } \frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n)} - \text{लान} = 0 \text{ ऐसा होगा ।}$$

$$(३) \text{ में यदि } y = \infty \text{ तो ऊपर की युक्ति से } \frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}} = \frac{\text{गा}(y)}{\text{गा}(y)} - \text{लान} = 0$$

$$\text{इस लिये स्थि} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \text{लान} ।$$

$$\text{परन्तु } \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{n} \text{ इसलिये-लान} = \text{ला}\frac{1}{2} = \text{ला}\frac{1}{2} + \text{ला}\frac{1}{3} + \text{ला}\frac{1}{4} + \dots + \text{ला}\frac{1}{n}$$

$$\text{इस लिये स्थि} = 1 + \frac{1}{2} + \text{ला}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{ला}\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \text{ला}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots$$

इस लिये साधारण रीति से पहले पद को छोड़ कर दो दो पदों को मिला कर एक पद मानने से n संख्यक पद = $\frac{1}{n} + \text{ला}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \dots = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} + \dots \right)$$

$$\text{इस लिये स्थि} = 1 - \text{यौ} \left\{ \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} + \dots \right) \right\}$$

$$= 1 + \text{यौ} \left\{ \frac{1}{n^2} + \text{ला} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\} \dots \quad (४)$$

जहाँ न के स्थान में २, ३, ४, इत्यादि का उत्थापन देने से $\frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \dots \right)$

इस के वा $\frac{1}{n^2} + \text{ला} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ इस के जितने मान होंगे उन का योग यौ से अपेक्षित है ।

स्थिर का मान जानने के लिये (४) समीकरण में जितना ही अधिक दशमलव अपेक्षित हो उतनीही न की संख्या बढ़ाते जाओ ।

स्थिर का मान १० दशमलव तक ५७७२१५६६४९ यह है । सौ दशमलव से भी अधिक स्थान तक इसका मान परिगणित है ।

(See Proceedings of the Royal Society, Vol XIX. P. 514, and Vol XX. P. 29)

२०९। ऊपर के प्रक्रम के (२) समीकरण में यदि य के स्थान में य + १ का उत्थापन दे

$$\text{तो } \frac{\text{ता}^{\text{लागा}}(य + १)}{\text{ता}^{\text{य}}^३} = \frac{१}{(य + १)^३} + \frac{१}{(य + २)^३} + \frac{१}{(य + ३)^३} + \dots \dots \dots$$

न-२ वार तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}^{\text{लागा}}(य + १)}{\text{ता}^{\text{य}}^{\text{न}}} = (-१)^{\text{न}} | \text{न} - १ \left\{ \frac{१}{(य + १)^{\text{न}}} + \frac{१}{(य + २)^{\text{न}}} + \frac{१}{(य + ३)^{\text{न}}} + \dots \right\}$$

$$\text{कल्पना करो कि सा}^{\text{न}} = १ + \frac{१}{२^{\text{न}}} + \frac{१}{३^{\text{न}}} + \dots + \text{अनन्त}$$

तो ऊपर के समीकरण में यदि य = ० और न > २ तो

$$\frac{\text{ता}^{\text{लागा}}(य + १)}{\text{ता}^{\text{य}}^{\text{न}}} = \text{सा}^{\text{न}} (-१)^{\text{न}} | \text{न} - १$$

परन्तु जब य = ० तो $\frac{\text{तालागा}(य + १)}{\text{ता}^{\text{य}}} = \frac{\text{गा}(१)}{\text{गा}(१)} = -\text{स्थि}$ (२०८ प्रक्रम के

(३) समीकरण से) और लागा (१ + य) = लागा (१) = ला (१) = ०, इसलिये म्याक्लौरिन (maclaurin) के सिद्धान्त से

$$\text{लागा}(१ + य) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा३य}^०}{२} - \frac{\text{सा३य}^१}{३} + \frac{\text{सा३य}^२}{४} - \frac{\text{सा३य}^३}{५} + \dots \quad (१)$$

यदि य का मान १ से अल्प हो तो यह श्रेणी सान्त होगी ।

२०१ प्रक्रम का (१) समीकरण और २०५ प्रक्रम का अन्तिम समीकरण दोनों पर से सिद्ध है कि यदि य न ०, और $\frac{१}{३}$ के भीतर सब मानों में गा(य) इस का मान विदित हो तो, $\frac{१}{३}$, १ इन मानों में वा १, $१\frac{१}{३}$ इन मानों में अर्थात् बार बार क्रिया करने से य के सब धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

परन्तु (१) समीकरण की श्रेणी य के ० से लेकर $\frac{१}{३}$ तक सब मानों में लागा (१ + य) इस का मान बनाती है फिर इन लघुरिक्त्य पर से १, से ले $१\frac{१}{३}$ तक सब मानों में गा(य) का मान निकल आवेगा, इस तरह सब य के धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

$$२१०। \text{लागा}(१ + य) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा३य}^०}{२} - \frac{\text{सा३य}^१}{३} +$$

$$\text{इस लिये लागा}(१ - य) = \text{स्थिय} + \frac{\text{सा३य}^०}{२} + \frac{\text{सा३य}^१}{३} +$$

$$\begin{aligned} \text{लागा}(१ + य) + \text{लागा}(१ - य) &= \text{ला} \{ \text{गा}(१ + य) \text{गा}(१ - य) \} \\ &= \text{ला} \{ \text{यगा}(य)\text{गा}(१ - य) \} = \text{लाय} + \text{ला} \{ \text{गा}(य)\text{गा}(१ - य) \} \end{aligned}$$

$$= \text{ला} \left(\frac{-य}{\text{ज्याय-}} \right), \dots \quad (२०५ \text{ प्रक्रम से})$$

$$= २ \left(\frac{\text{सा३य}^०}{२} + \frac{\text{सा३य}^१}{४} + \dots \right) = \text{ला} \{ \text{गा}(१ + य)\text{गा}(१ - य) \} = \text{ला} \frac{य-}{\text{ज्याय-}}$$

$$\text{इसी तरह} - २ \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा३य}^१}{३} + \dots \right) = \text{ला} \left\{ \frac{\text{गा}(१ + य)}{\text{गा}(१ - य)} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{दोनों को जोड़ देने से ला} \frac{य-}{\text{ज्याय-}} - २ \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा३य}^१}{३} + \frac{\text{सा३य}^२}{५} + \dots \right) \\ = \text{ला} \{ \text{गा}(१ + य) \}^२ \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये ला}(१ + य) = \frac{१}{३} \text{ला} \frac{य-}{\text{ज्याय-}} - \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा३य}^१}{३} + \frac{\text{सा३य}^२}{५} + \dots \right)$$

$$= \frac{१}{३} \text{ला} \frac{य-}{\text{ज्याय-}} - \text{ला} \frac{१ + य}{१ - ल} + (१ - \text{स्थिय})य - \frac{१}{३}(\text{सा} - १)य^३ - \frac{१}{५}(\text{सा} - १)य^५ -$$

य का मान $\frac{१}{३}$ से अल्प हो तो यह श्रेणी बहुत शीघ्र सान्त हो जायगी ।

२११। गा (१ + य) इस का न्यूनतम मान निकालना हो तो पीछे जो

लागा(१ + य) का मान निकाला है उसका तात्कालिक सम्बन्ध निकाल उसको शून्य के तुल्य करो । इस तरह से यदि मान निकालो तो असकृद्विधि से

गा (१ + य) के न्यूनतम मान में, १ + य = १ ४६१६३२१४५११०५ ।

लेजेण्ड्र (Legendre) साहब ने लागा (य + १) के मान के लिये एक सारणी बना डाली है जिस में से संक्षेप कर के य के १, २ मानों के भीतर लागा (य) के मान हम इस अध्याय के अन्त में लिखेंगे ।

२१२। बहुत से सान्तचलो का मान गाढ़ फल के रूप में आ जाता है जैसे $\int_0^{\infty} e^{-ay^2} \text{ ताय}$ इसमें यदि $ay^2 = r$ तो

$$\int_0^{\infty} e^{-ay^2} \text{ ताय} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r} \text{ तार}}{2a\sqrt{r}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r} r^{\frac{1}{2}-1} \text{ तार}}{2a} = \frac{1}{2a} \text{ गा} \left(\frac{1}{2}\right)$$

(गाढ़ फल के लक्षण से) $= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ (२०५ वे प्रक्रम से)

और $\int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1}}{(y+a)^{d+m}} \text{ ताय}$

इस में यदि $\frac{y}{y+a} = \frac{r}{1+a}$ तो $y = r a - 1 + a - r$

$$\int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1}}{(y+a)^{d+m}} \text{ ताय} = \frac{1}{a^m(1+a)^d} \int_0^1 r^{d-1}(1-r)^{m-1} \text{ तार}$$

$$= \frac{1}{a^m(1+a)^d} \text{ वी} (d, m) \frac{1}{a^m(1+a)^d} \frac{\text{गा}(d) \text{ गा}(m)}{\text{गा}(d+m)} \text{ (२०३ प्रक्रम से)}$$

फिर $\int_0^1 y^{d-1}(1-y^3)^{m-1} \text{ ताय}$ इस में मानो कि $y^3 = r$ तो

$$\int_0^1 y^{d-1}(1-y^3)^{m-1} \text{ ताय} = \frac{1}{3} \int_0^1 r^{\frac{d}{3}-1}(1-r)^{m-1} \text{ तार} = \frac{\text{गा}\left(\frac{d}{3}\right) \text{ गा}(m)}{3 \text{ गा}\left(\frac{d}{3} + m\right)}$$

इस तरह से $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^p \text{कोज्या}^q \text{ ताय}$ इसमें यदि $\text{ज्या}^2 = y$ तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^p \text{कोज्या}^q \text{ ताय} = \int_0^1 y^{\frac{p+1}{2}-1}(1-y^2)^{\frac{q+1}{2}-1} \text{ ताय}$$

$$= \frac{\text{गा}\left(\frac{p+1}{2}\right) \text{ गा}\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2 \text{ गा}\left(\frac{p+q}{2} + 1\right)}$$

फिर $\int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1} \text{ताय}}{\{ay + k(1-y)\}^{d+m}}$ इस से मानो कि $y = \frac{\text{कर}}{a(1-r) + \text{कर}}$ तो

$$\text{इसका रूप} = \frac{1}{a^d k^m} \int_0^1 r^{d-1} (1-r)^{m-1} \text{तार} = \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m)}{a^d k^m \text{गा}(d+m)}$$

फिर $\int_0^a y^{d-1} (a-y)^{m-1} \text{ताय}$ इस से मान लो कि $y = ar$ तो इस का

$$\text{रूप} = a^{d+m-1} \int_0^1 r^{d-1} (1-r)^{m-1} \text{तार} = a^{d+m-1} \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m)}{\text{गा}(d+m)} \quad \dots (१)$$

$$२१३। \iiint y^{d-1} r^{m-1} l^{n-1} \quad \text{ताल तार ताय} \quad \dots \text{ इस}$$

अनेक गुण चल का मान गाढ़ फल के रूप में ले आओ । जहाँ जानते हैं कि $y+r+l < 1$ और सब चल संख्याओं का मान ऐसा माना गया है जिसमें अनेक गुण चल का मान धन हो ।

यहाँ पहले l के वश से चलानयन करने से और $0, 1-y-r$ सीमा

मानने से $\int l^{n-1} \text{ताल} = \frac{(1-y-r)^n}{n} = \frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n+1)} (1-y-r)^n$ फिर r के वश से चलानयन करने से r के $0, 1-y$ के मान के भीतर

$$\int r^{m-1} (1-y-r)^n \text{तार} = \frac{(1-y)^{m-n} (\text{गाम}) \text{गा}(n+1)}{\text{गा}(m+n+1)}, \quad २१२ \text{ प्रक्रम के (१)}$$

समीकरण से

अन्त में y के वश चलानयन से और $0, 1$ सीमा मानने से ।

$$\int y^{d-1} (1-y)^{m-n} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(n-n-1)}{\text{गा}(d-m-n-1)} \text{ इस लिये अभीष्ट अनेक गुण}$$

$$\text{चल का मान} \quad \frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n-1)} \frac{\text{गा}(m)\text{गा}(n-1)}{\text{गा}(m-n+1)} \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m+n+1)}{\text{गा}(d-m-n-1)}$$

$$२१४। \iiint \cdot a_1^{d-1} k_1^{m-1} l_1^{n-1} \cdot \text{ताख, ताक, ताथ} \text{ इसका}$$

मान गाढ़ फल के रूप में जानना है

जहाँ $\left[\frac{a_1}{a} \right]^p + \left[\frac{k_1}{k} \right]^q + \left[\frac{l_1}{l} \right]^m + \dots < 1$ और चल संख्याओं का मान ऐसा है जिस में सब धन मान हैं ।

$$\text{मान लो कि } y = \left[\frac{a_1}{a} \right]^p \quad r = \left[\frac{k_1}{k} \right]^q, \quad l = \left[\frac{l_1}{l} \right]^m, \dots$$

तो ऊपर के प्रक्रम से चल का रूप

$$= \frac{\text{अदकमखन}}{\text{प व भ} \dots} \cdot \frac{\text{गा}(\frac{द}{प})\text{गा}(\frac{म}{व})\text{गा}(\frac{न}{भ})}{\text{गा}(\frac{द}{प} + \frac{म}{व} + \frac{न}{भ} + \dots + 1)}$$

यह सिद्धान्त लेज्यून डिरिचलेट् (Lejeune Dirichlet.) का निकाला है ।

इस में यदि $प = व = \dots = 1$ और $च = अ = क = ख$ तो
 $अ + क + ख + \dots < च$

$$\iiint \text{अ}^{द-1}\text{क}^{म-1}\text{ख}^{न-1} \text{ताख,ताक,ताअ}$$

$$= \frac{\text{च}^{द+म+न}\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न+1)} = \text{ना च}^{द+म+न}$$

$$\text{जहाँ ना} = \frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न+1)}$$

इसी प्रकार यदि चलानयन ऐसा किया जाय जिस में $अ + क + ख + \dots < च + \Delta च$

तो ऊपर की युक्ति से उस का मान $\text{ना}(च + \Delta च)^{द+म+न}$ ऐसा होगा ।

$$\text{इस लिये दोनों का अन्तर ना} \{ (च + \Delta च)^{द+म+न} - \text{च}^{द+म+न} \}$$

$$= \text{ना}(द + म + न + \dots) \text{च}^{द+म+न-1} \Delta च \text{ यदि } \Delta च \text{ अत्यन्त अल्प हो}$$

$$= \frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न+1)} \text{च}^{द+म+न-1} \Delta च$$

$$२१५। \iiint \text{य}^{द-1}\text{र}^{म-1}\text{ल}^{न-1} \text{फ}(य+र+ल+\dots) \text{तालतारताय इस}$$

का मान एक चलानयन-के रूप में ले आना है, जहाँ चलानयन ऐसा किया गया है जिस में सब चलो के धन मान लिये गये हैं जहाँ $य + र + ल + \dots < ग$ ।

लाघव के लिये मान लो कि तीन चलराशि है ।

यहाँ ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि $\text{फ}(य+र+ल)$ के स्थान में १ मान लें तो उस भाग का चल जो कि योग के च, $च + \Delta च$ के भीतर है

$$\frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न)} \text{च}^{द+म+न-1} \Delta च \text{ यह होगा}$$

परन्तु $\text{फ}(य+र+ल) = \text{फ}(च)$ के स्थान में १ रख कर ऊपर का मान दिखलाया है इस लिये उस को $\text{फ}(च)$ से गुण देने से

$$\frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न)} \text{फ}(च) \text{च}^{द+म+न-1} \Delta च \text{ यह एक खण्ड की गति हुई}$$

इस लिये सम्पूर्ण चल = $\frac{\text{गा(द.गा(म)गा(न))}}{\text{गा(द+म+न)}} \int_0^{\text{ग}} \text{फ(च)} \text{च}^{\text{द+म+न+}\dots-1} \text{ताच}$ यही रीति

चाहे जितनी चलराशि हो सर्वत्र दिखलाई जा सकती है ।

२१६। इसी प्रकार त्रिगुण चल

$$\int \int \int \text{अ}_1^{\text{द}-1} \text{क}_1^{\text{म}-1} \text{ख}_1^{\text{न}-1} \text{फ} \left\{ \left(\frac{\text{अ}_1}{\text{अ}} \right)^{\text{प}} + \left(\frac{\text{क}_1}{\text{क}} \right)^{\text{व}} + \left(\frac{\text{ख}_1}{\text{ख}} \right)^{\text{म}} \right\}$$

ताख, ताक, ताअ, यह जहाँ चलराशियों के सब धन मान मे

$$\left[\frac{\text{अ}_1}{\text{अ}} \right]^{\text{प}} + \left[\frac{\text{क}_1}{\text{क}} \right]^{\text{व}} + \left[\frac{\text{ख}_1}{\text{ख}} \right]^{\text{म}} \text{ यह ग से अधिक नहीं है}$$

$$\frac{\text{अ}^{\text{द}} \text{क}^{\text{म}} \text{ख}^{\text{न}}}{\text{पवम}} \frac{\text{गा}\left(\frac{\text{द}}{\text{प}}\right) \text{गा}\left(\frac{\text{म}}{\text{व}}\right) \text{गा}\left(\frac{\text{न}}{\text{म}}\right)}{\text{गा}\left(\frac{\text{द}}{\text{प}} + \frac{\text{म}}{\text{व}} + \frac{\text{न}}{\text{म}}\right)} \int_0^{\text{ग}} \text{फ(च)} \text{च}^{\frac{\text{द}}{\text{प}} + \frac{\text{म}}{\text{व}} + \frac{\text{न}}{\text{म}} - 1} \text{ताच}$$

इसके तुल्य होगा ।

यह रीति चाहे जितनी चलराशि हो सर्वत्र दिखलाई जा सकती है ।

२१७। $\int \int \frac{\text{य}^{\text{प}-1} \text{र}^{\text{व}-1} \text{ताय तार}}{(\text{त} + \text{अय} + \text{कर})^{\text{प+व}}}$ इसका रूप साधारण चलानयन के अर्थात् एक चलानयन के स्वरूप मे ले आना है जहाँ य, र के सब मान धन है और य+र यह ज से अधिक नहीं है । और प, व, त, अ, और क सब धन स्थिराङ्क है । मान लो कि अ > क तो

$$\text{त} + \text{अय} + \text{कर} = \text{त} + \text{अ} (\text{य} + \text{र}) - (\text{अ} - \text{क}) \text{र} = \text{श} - \text{ह}$$

$$\text{जहाँ श} = \text{त} + \text{अ}(\text{य} + \text{र}), \text{ह} = (\text{अ} - \text{क}) \text{र}$$

$$\text{इस लिये } (\text{त} + \text{अय} + \text{कर})^{-\text{प-व}}$$

$$= \text{श}^{-\text{प-व}} \left\{ 1 + (\text{प} + \text{व}) \frac{\text{ह}}{\text{श}} + \frac{(\text{प} + \text{व})(\text{प} + \text{व} + 1)}{2} \frac{\text{ह}^2}{\text{श}^2} + \dots \right\}$$

यह श्रेणी सान्त होगी ।

अव ऊपर का द्विगुण चल २१५ वे प्रक्रम से एक चलानयन के रूप में आ सकता है अर्थात् $\int \int \frac{\text{य}^{\text{प}-1} \text{र}^{\text{व}-1} \text{ताय तार}}{(\text{त} + \text{अय} + \text{कर})^{\text{प+व}}}$

$$= \int \int \left[\frac{\text{य}^{\text{प}-1} \text{र}^{\text{व}-1}}{\text{श}^{\text{प+व}}} + \frac{(\text{प} + \text{व})(\text{अ} - \text{क}) \text{य}^{\text{प}-1} \text{र}^{\text{व}}}{\text{श}^{\text{प+व}+1}} \right. \\ \left. + \frac{(\text{प} + \text{व})(\text{प} + \text{व} + 1)(\text{अ} - \text{क})^2 \text{य}^{\text{प}-1} \text{र}^{\text{व}+1}}{2 \text{श}^{\text{प+व}+2}} + \dots \right] \text{ताय तार}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^j \left\{ \frac{\text{गा(प)गा(व)}}{\text{गा(प+व)}} \frac{\tau^{प+व-१}}{(\text{त+अट})^{प+व}} + \frac{\text{गा(प)गा(व+१)}}{\text{गा(प+व+१)}} (\text{प+व}) (\text{अ-क}) \frac{\tau^{प+व}}{(\text{त+अट})^{प+व+१}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\text{गा(प)गा(व+२)}}{\text{गा(प+व+२)}} \frac{(\text{प+व})(\text{प+व+१})}{2} \frac{(\text{अ-क})^2 \tau^{प+व+१}}{(\text{त+अट})^{प+व+२}} + \dots \right\} \text{ताट} \\
 &= \text{गा(प)} \int_0^j \frac{\tau^{प+व-१}}{(\text{त+अट})^{प+व}} \left\{ \frac{\text{गा(व)}}{\text{गा(प+व)}} + \frac{(\text{प+व}) \text{गा(व+१)}}{\text{गा(प+व+१)}} \frac{(\text{अ-क})\tau}{(\text{त+अट})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\text{प+व})(\text{प+व+१})\text{गा(व+२)}(\text{अ-क})^2 \tau^2}{\text{गा(प+व+२)} 2(\text{त+अट})^2} + \dots \right\} \text{ताट} \\
 &= \frac{\text{गा(प)गा(व)}}{\text{गा(प+व)}} \int_0^j \frac{\tau^{प+व-१}}{\text{त+अट}^{प+व}} \left\{ १ + \frac{\text{व(अ-क)}\tau}{\text{त+अट}} + \frac{\text{व(व+१)}}{2} \frac{(\text{अ-क})^2 \tau^2}{(\text{त+अट})^2} + \dots \right\} \text{ताट} \\
 &= \frac{\text{गा(प)गाव}}{\text{गा(प+व)}} \int_0^j \frac{\tau^{प+व-१}}{(\text{त+अट})^{प+व}} \left\{ १ - \frac{(\text{अ-क})\tau}{\text{त+अट}} \right\}^{-\text{व}} \text{ताट} \\
 &= \frac{\text{गा(प)गाव}}{\text{गा(प+व)}} \int_0^j \frac{\tau^{प+व-१} \text{ताट}}{(\text{त+अट})^{\text{प}} (\text{त+कट})^{\text{व}}}
 \end{aligned}$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो ।

२१८। $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^2 \text{य}^2} \text{कोज्याशरयताय}$ इस का मान जानना है जहाँ र और

य परस्पर स्वतन्त्र है । मान लो कि उद्दिष्ट सान्तचल = स है तो १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = - २ \int_0^\infty \text{यइ}^{-\text{अ}^2 \text{य}^2} \text{ज्याशरयताय}$$

$$\text{परन्तु} \int \text{यइ}^{-\text{अ}^2 \text{य}^2} \text{ज्याशरयताय}$$

$$= - \frac{\text{इ}^{-\text{अ}^2 \text{य}^2} \text{ज्याशरय}}{२\text{अ}^2} + \frac{२र}{२\text{अ}^2} \int \text{इ}^{-\text{अ}^2 \text{य}^2} \text{कोज्याशरयताय}$$

(खण्ड चलानयन से)

$$\text{इस लिये} \int_0^\infty \text{यइ}^{-\text{अ}^2 \text{य}^2} \text{ज्याशरयताय} = \frac{२र}{२\text{अ}^2} \int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^2 \text{य}^2} \text{कोज्याशरय}$$

$$= \frac{२रस}{२\text{अ}^2} \text{इसलिये} \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = - \frac{२रस}{\text{अ}^2}$$

स का भाग दे देने से

$$\frac{\text{ताम}}{\text{स}} = \frac{\text{ताला(स)}}{\text{तार}} = -\frac{२र}{अ^२} \dots \text{लास} = -\frac{र^२}{अ^२} + \text{स्थि}$$

$$\text{इस लिये स} = \text{आ इ}^{-\frac{र^२}{अ^२}}$$

जहाँ आ कोई र के वश से स्थिराङ्क है ।

$$\text{मान लो कि } र=० \text{ तो } \int_०^{\infty} \text{इ}^{-अ^२य^२} \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ} \text{ (२१२ वें प्रक्रम से)}$$

$$\text{इस लिये आ} = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ}, \text{ और}$$

$$\int_०^{\infty} \text{इ}^{-अ^२य^२} \text{ कोज्यारयताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ} \text{ इ}^{-\frac{र^२}{अ^२}}$$

यद्यपि १९४ प्रक्रम में लिख आये हैं कि यदि कोई सीमा अनन्त के तुल्य न हो तब १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु इस स्थान में अनन्त सीमा होने पर भी ठीक होगा क्योंकि दूसरा खण्ड यहाँ पर $\int_०^{\infty} \text{इ}^{-अ^२य^२} \text{इ}_१ \text{ ताय}$ शून्य ही होगा यदि $इ_१=०$ हो तो क्योंकि ४०वे प्रक्रम की युक्ति से मान लो कि श्रेढी में $इ_१$ का सब से बड़ा मान यदि $इ_२$ हो तो $\int_०^{\infty} \text{इ}^{-अ^२य^२} \text{इ}_१ \text{ ताय}$

यह $इ_२ \int_०^{\infty} \text{इ}^{-अ^२य^२} \text{ ताय}$ इस से अर्थात् $\frac{\sqrt{\pi}}{२अ} \text{इ}_२$ इस से छोटा होगा ।

परन्तु कल्पना जैसा किया है उस के धर्म से $इ_२=०$ होगा इस लिये दूसरे खण्ड का नाश हो जाने से १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण यहाँ ठीक ही हुआ ।

$$२१।९ \int_०^{\infty} \text{इ}^{-जय} \frac{\text{ज्यारय}}{य} \text{ ताय इस का मान जानना है जहाँ ज स्थिराङ्क}$$

और र, य परस्पर स्वतन्त्र हैं । यहाँ मान का मान स मान लो तो १९४ प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताम}}{\text{तार}} = \int_०^{\infty} \text{इ}^{-जय} \text{कोज्यारयताय}$$

$$\text{परन्तु } \int \text{इ}^{-जय} \text{कोज्यारयताय}$$

$$= \text{इ}^{-जय} \frac{\text{रज्यारय} - \text{जकोज्यारय}}{\text{ज} + \text{र}} \text{ खण्ड चलानयन से}$$

इस लिये $\int_0^{\infty} e^{-जय} \text{कोज्यारयताय} = \frac{ज}{ज^2 + र^2} \dots \dots (१)$

इस तरह से $\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{ज}{ज^2 + र^2}$

इस लिये $स = स्प^{-१} \frac{र}{ज} \dots \dots \dots (२)$

यहां पर स्थिराङ्क की अपेक्षा नहीं है क्योंकि यदि $र = ०$ तो सभी शून्य हो जायगा । यहां ज के सब धन मान में स का मान ठीक होगा इस लिये यदि $ज = ०$

तो $स = स्प^{-१} \frac{र}{ज} = \frac{\pi}{२} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याजय}}{य} \text{ताय}$

यदि ज ऋणात्मक हो तो स का मान $-\frac{\pi}{२}$ होगा ।

इस पर से $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याकयकोज्याअय}}{य} \text{ताय}$ इसका मान जान सकते हैं क्योंकि

सरलत्रिकोणमिति से यह

$\frac{१}{२} \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या (क+अ) य}}{य} \text{ताय} + \frac{१}{२} \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या (क-अ) य}}{य} \text{ताय}$

इस के तुल्य हुआ और (२) समीकरण में $ज = ०$ मानने से दोनों खण्डों का मान $\frac{\pi}{४}$ इस लिये ।

$\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याकयकोज्याअय}}{य} \text{ताय} = \frac{\pi}{४} + \frac{\pi}{४} = \frac{\pi}{२}$ परन्तु यदि $अ > क$ तो

ऊपर की युक्ति से $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या कयकोज्याअय}}{य} \text{ताय} = ०$ यह होगा ।

२२० । $स = \int_0^{\infty} e^{-(य^2 + \frac{अ^2}{य^2})} \text{ताय}$ इस का मान जानना है ।

यहां $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -२अ \int_0^{\infty} e^{-(य^2 + \frac{अ^2}{य^2})} \frac{\text{ताय}}{य^३} \text{इस में यदि } य = \frac{अ}{ल}$

तो $य^२ + \frac{अ^२}{य^२} = \frac{अ^२}{ल^२} + ल^२, \frac{\text{ताय}}{य^३} = -\frac{अ \text{ ताल}}{ल^२} \times \frac{ल^२}{अ} = - \text{ताल}$

इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -२ अ \int_0^{\infty} e^{-(य^२ + \frac{अ^२}{य^२})} \frac{\text{ताय}}{य^३}$

$= २ अ \int_0^{\infty} e^{-(ल^२ + \frac{अ^२}{ल^२})} \text{ताल}$

$$= -२ अ \int_0^{\infty} इ^{-\left(\frac{अ^२}{ल^२} + \frac{अ^२}{ल^२}\right)} ताल = -२ अ स$$

इस लिये तालास = -२ ताअ

लास = -२ अ + स्थि

इस लिये स = आ इ^{-२अ}

ऊपर के स मान में यदि अ = ०, स = $\int_0^{\infty} इ^{-य^२} ताय = \frac{\pi}{२}$ (२१२वे प्रक्रम से)

इस लिये आ = $\frac{\sqrt{\pi}}{२}$ और स = $\frac{\sqrt{\pi}}{२} इ^{-२अ} = \int_0^{\infty} इ^{-\left(\frac{य^२}{२} + \frac{अ^२}{२}\right)} ताय$

२२१। $\int_0^१ य^म (लाय)^न ताय = स$, इस का मान जानना है ।

यहां यदि य = इ^{-ल} तो

$$\begin{aligned} स &= \int_0^१ य^म (लाय)^न ताय = (-१)^न \int_0^{\infty} इ^{-(म+१)ल} ल^न ताल \\ &= \frac{(-१)^न}{(म+१)^{न+१}} \int_0^{\infty} इ^{-(म+१)ल} \{ ल(म+१) \}^न (म+१) ताल \\ &= \frac{(-१)^न}{(म+१)^{न+१}} \int_0^{\infty} इ^{-ल} ल^न ताल । (यदि (म+१) ल = ल) \\ &= \frac{(-१)^न गा (न+१)}{(म+१)^{न+१}} \end{aligned}$$

यदि लाय के स्थान में -ला $\left(\frac{१}{य}\right) = (-१) ला \frac{१}{य}$ रखें तो

$$\begin{aligned} \int_0^१ य^म (लाय)^न ताय &= \int_0^१ य^म (-१)^न (ला \frac{१}{य})^न ताय \\ &= (-१)^न \int_0^१ य^म (ला \frac{१}{य})^न ताय = \frac{\{ (-१)^न \}^२ गा (न+१)}{(म+१)^{न+१}} = \frac{गा (न+१)}{(म+१)^{न+१}} \end{aligned}$$

$$२२२। \int_0^१ \frac{लाय ताय}{१-य} = \int_0^१ लाय ताय (१ + य + य^२ + \dots)$$

$$= -\left(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \dots\right) । (ऊपर के उदाहरण से)$$

$$= -\frac{\pi^२}{६} । (चलनकलन के २० वें प्रक्रम का (९) उदाहरण दे)$$

इस तरह से अनेक उदाहरण कर सकते हो ।

२२३ । कल्पना करो कि

$$s = \int_a^k f(y, g) \text{ ताय}$$

तो स ताग = $\int_a^k f(y, g) \text{ ताय ताग}$

इस लिये

$$\int_{a_1}^{k_1} s \text{ ताग} = \int_{a_1}^{k_1} \int_a^k f(y, g) \text{ ताय ताग}$$

$$= \int_a^k \int_{a_1}^{k_1} f(y, g) \text{ ताग ताय । ६३वें प्रक्रम से}$$

इस पर से भी अनेक सान्तचलो के मान बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं ।

२२४ । जानते हैं कि $\int_0^\infty e^{-जय} \text{ ताय} = \frac{१}{ज}$ । १९० प्रक्रम का (४)

उदाहरण देखो

इस लिये ऊपर के प्रक्रम को युक्ति से यदि ज = ग, क = ∞, अ = ० तो

$$\int_{a_1}^{k_1} s \text{ ताग} = \int_{a_1}^{k_1} \frac{\text{ताज}}{ज} = \lim_{a_1}^{k_1} \int_0^\infty \int_{a_1}^{k_1} f(y, g) \text{ ताग ताय}$$

परन्तु $\int f(y, g) \text{ ताग} = \int f(y, ज) \text{ ताज} = \int e^{-जय} \text{ ताज}$

$$= - \frac{e^{-जय}}{य}, \text{ इस लिये}$$

$$\int_{a_1}^{k_1} e^{-जय} \text{ ताज} = \frac{e^{-अ_१य} - e^{-क_१य}}{य} \text{ इस लिये}$$

$$\int_0^\infty \int_{a_1}^{k_1} f(y, ज) \text{ ताज ताय} = \int_0^\infty \frac{e^{-अ_१य} - e^{-क_१य}}{य} \text{ ताय} = \lim_{a_1}^{k_1} \frac{१}{अ_१}$$

२२५ । खण्डचलानयन से जानते हैं कि

$$\int_0^\infty e^{-गय} \cos या अ_१य \text{ ताय} = \frac{ग}{ग^२ + अ_१^२}$$

दोनों पक्षों का ग के वश चलानयन करने से और ग की सीमा, अ, क मानने से ।

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-अ_1 y} - e^{-क_1 y}}{y} \text{कोज्याअ}_1 y \text{ ताय} = \frac{1}{2} \log \frac{क_1^2 + अ_1^2}{अ_1^2 + अ_2^2}$$

$$२२६। \text{ यदि आ} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याअ}_1 y}{y} \text{ ताय और का} = \int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याअ}_1 y}{१ + y^2} \text{ ताय}$$

आ से यदि अ_१ y = r

तो आ = $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या} r}{r}$ नार । इस लिये अ_१ से आ का कुछ भी सम्बन्ध

नहीं है और २१९ वे प्रक्रम की युक्ति से आ = $\frac{\pi}{2}$

$$\text{अब का} = \int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याअ}_1 y}{१ + y^2} \text{ ताय}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ताका}}{\text{ताअ}_1} = \int_0^{\infty} \frac{-y \text{ज्या अ}_1 y}{१ + y^2} \text{ ताय}$$

$$\text{और } \int_0^{\text{अ}_1} \text{का ताअ}_1 = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या अ}_1 y}{y(१ + y^2)} \text{ ताय}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\text{अ}_1} \text{का ताअ}_1 - \int \frac{\text{ताका}}{\text{ताअ}_1} = \int_0^{\infty} \frac{(१ + y^2) \text{ज्याअ}_1 y}{y(१ + y^2)} \text{ ताय} = \text{आ}$$

समशोधन करने से

$$\int_0^{\text{अ}_1} \text{का ताअ}_1 - \frac{\text{ताका}}{\text{ताअ}_1} - \text{आ} = 0 \quad (१)$$

(१) को $e^{-अ_1 \text{ताअ}_1}$ से गुणकर अ_१ के वश से चलानयन करने से $e^{-अ_1} \left(\int_0^{\text{अ}_1} \text{का ताअ}_1 + \text{का} - \text{आ} \right) = \text{स्थिराङ्क}$

इसलिये अ_१ का चाहे जो मान हो (१) का चल कोई नियत संख्या के तुल्य होगा इस लिये यदि अ_१ अनन्त के तुल्य हो तो पिछले समीकरण में स्थिराङ्क शून्य के तुल्य होगा क्योंकि उसका बायाँ पक्ष शून्य के तुल्य होता है इस लिये अ_१ के अनन्त मान में

$$इ^{-अ_१} \left(\int_0^{अ_१} का ताअ_१ + का - आ \right) = 0 = \int_0^{अ_१} का ताअ_१ + का - आ, \dots (२)$$

इस लिये (१) और (२) के अन्तर से

$$\frac{ताका}{ताअ_१} = - का$$

इस लिये का = आ, इ^{-अ_१} जहाँ आ, कोई स्थिराङ्क है

$$\text{और } \int का ताअ_१ = \int आ_१ इ^{-अ_१} ताअ_१ = -आ_१ इ^{-अ_१}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{अ_१} का ताअ_१ = आ_१ - आ_१ इ^{-अ_१}$$

(२) में इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{अ_१} का ताअ_१ + का - आ = आ_१ - आ_१ इ^{-अ_१} + आ_१ इ^{-अ_१} - आ = आ_१ - आ = 0$$

$$\therefore अ_१ = आ \text{ इस लिये } का = आ इ^{-अ_१} \dots \dots (३)$$

यदि अ_१ को अत्यल्प मानें अर्थात् अ_१ = 0 तो

$$का = \int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याअ_१ य}}{१ + य^२} ताय = \int_0^{\infty} \frac{ताय}{१ + य^२} = \frac{\pi}{२} = आ$$

$$\text{इस लिये (३) से } का = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१}$$

यदि अ_१ ऋण हो तो (३) से का = $\frac{\pi}{२} इ^{अ_१}$ ऐसा होगा और २१९ वें प्रक्रम की युक्ति से आ = $-\frac{\pi}{२}$

२२७। २२६ प्रक्रम से सिद्ध हुआ है कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याअ_१ य ताय}}{१ + य^२} = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१} \text{ इसका अ_१ के वश तात्कालिक}$$

सम्बन्ध निकालने से

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{यज्याअ_१ य ताय}}{१ + य^२} = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१} \text{ और चलानयन कर मान अ_१ के ०, ग के}$$

मान के भीतर ले आवे तो

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याअ_१ य}}{य(१ + य^२)} ताय = \frac{\pi}{२} (१ - इ^{-अ_१})$$

२२८। खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int \text{इ}^{-अय} \text{ज्याअ}_र \text{य ताय} = -\text{इ}^{-अय} \frac{\text{अज्याअ}_र \text{य} + \text{अ}_र \text{कोज्याअ}_र \text{य}}{\text{अ}^र + \text{अ}_र^२}$$

$$\text{और } \int \text{इ}^{-अय} \text{कोज्याअ}_र \text{य ताय} = \text{इ}^{-अय} \frac{\text{अ'ज्याअ}_र \text{य} - \text{अकोज्याअ}_र \text{य}}{\text{अ}^र + \text{अ}_र^२}$$

$$\text{इन पर से } \int_0^{\infty} \text{इ}^{-अय} \text{ज्या अ}_र \text{य ताय} = \frac{\text{अ}_र}{\text{अ}^र + \text{अ}_र^२}$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} \text{इ}^{-अय} \text{कोज्या अ}_र \text{य ताय} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}^र + \text{अ}_र^२} \text{ - । यदि अ धनात्मक हो ।}$$

इन में यदि अ = ० तो

$$\int_0^{\infty} \text{ज्या अ}_र \text{य ताय} = \frac{\text{अ}_र}{\text{अ}_र^२} = \frac{१}{\text{अ}_र}$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} \text{कोज्या अ}_र \text{य ताय} = ०$$

$$\text{परन्तु } \int \text{ज्या अ}_र \text{य ताय} = -\frac{\text{कोज्या अ}_र \text{य}}{\text{अ}_र}$$

$$\text{और } \int \text{कोज्या अ}_र \text{य ताय} = \frac{\text{ज्या अ}_र \text{य}}{\text{अ}_र}$$

इसलिये

$$\int_0^{\infty} \text{ज्या अ}_र \text{य} = -\text{कोज्या } (\infty) + \frac{१}{\text{अ}_र} = \frac{१}{\text{अ}_र}$$

$$\therefore \text{कोज्या } (\infty) = ०$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} \text{कोज्या अ}_र \text{य ताय} = \text{ज्या } (\infty) + ० = ०$$

$$\therefore \text{ज्या } (\infty) = ०$$

इन पर से यह सिद्ध होता है कि यदि कोण का मान अनन्त हो तो उस की ज्या और कोटिज्या दोनों शून्य के समान होती है यह अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों ने बहुत ही विचार किया है जिसका वर्णन इस चलराशिकलन की पुस्तक में विद्यार्थियों के लिये दुर्बोध कारक है। मेरी समझ में जिस अनन्त कोण के मान में ज्या शून्य होती है उसी अनन्त कोण के मान में कोटिज्या

शून्य के तुल्य नहीं होती है किन्तु दोनों अनन्त कोणों के मानों का अन्तर अवश्य $2m\pi \pm \frac{\pi}{2}$ इस के तुल्य होगा जहाँ m कोई अभिन्न संख्या है ।

२२९। फल का विस्तर रूप बना कर भी कहीं कहीं सान्तचल का मान निकल आता है । जैसा कि २२२ प्रक्रम में दिखलाया है उसी चाल के कुछ और उदाहरण दिखलाते हैं ।

$$\text{यदि ला } \left\{ 1 - a \sqrt[3]{y\sqrt{-1}} \right\} \text{ और ला } \left\{ 1 + a \sqrt[3]{-y\sqrt{-1}} \right\}$$

इन दोनों का विस्तृत मान ले आकर जोड़ डालो तो

$$\begin{aligned} & \text{ला } (1 - 2 \text{अकोज्याय} + a^2) \\ & = -2 (\text{अकोज्याय} + \frac{a^2}{2} \text{कोज्या२य} + \frac{a^3}{3} \text{कोज्या३य} + \dots) \end{aligned}$$

यहाँ यदि $a < 1$ तो श्रेणी का मान सान्त होगा

$$\begin{aligned} & \text{इस लिये } \int \text{ला } (1 - 2 \text{अकोज्याय} + a^2) \text{ ताय} \\ & = -2 (\text{अज्याय} + \frac{a^2}{4} \text{ज्या२य} + \frac{a^3}{9} \text{ज्या३य} + \dots) \end{aligned}$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \text{ला } (1 - 2 \text{अकोज्याय} + a^2) \text{ ताय} = 0 ।$$

$$\begin{aligned} & \text{यदि } a > 1 \text{ तो ला } (1 - 2 \text{अकोज्याय} + a^2) \\ & = \text{ला} a^2 + \text{ला } \left(1 - \frac{2}{a} \text{कोज्याय} + \frac{1}{a^2}\right) \end{aligned}$$

इस लिये अब ऊपर युक्ति से $\frac{1}{a} < 1$ इस लिये दूसरे खण्ड का मान शून्य निकलेगा और पहले का $\pi \text{ला} a^2 = 2 \pi \text{ला} a$ यह जो कि अभीष्ट मान होगा ।

$$\begin{aligned} & \text{यदि } a = 1 \text{ तो } \int \text{ला } (1 - 2 \text{अकोज्याय} + a^2) \text{ ताय} \\ & = \int \text{ला } \{ 2(1 - \text{अकोज्याय}) \} \text{ ताय} = \int \text{ला } \text{ज्या}^2 \frac{y}{2} \text{ ताय} + \text{ला } 4 \int \text{ताय} \\ & = \int 2 \text{लाज्या} \frac{y}{2} \text{ ताय} + 2 \text{ला } 2 \int \text{ताय} \\ & = 4 \int \text{लाज्याय} \text{ ताय} + 2 \text{ला} 2 \int \text{ताय यदि } y = \frac{y}{2} \\ & = 4 \int \text{लाज्याय} \text{ ताय} + 2 y \text{ला } 2 \end{aligned}$$

$$\text{इसलिये } \int_0^{\pi} \text{ला} (1 - 2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) \text{ताय} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्याय}^2 \text{ताय} + 2\pi \text{ला} 2$$

$2\pi \text{ला} \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ला} 2 = 0, 49$ प्रक्रम के (३) उदाहरण से ।

तीनों स्वरूप को यदि एक ही समीकरण से दिखलाया चाहो तो पहले को $\text{ला}(\text{अ}^2 - 2\text{अगकोज्याय} + \text{ग}^2) \text{ताय}$

$$= \text{ला}\text{अ}^2 + \text{ला}\left(1 - \frac{2\text{ग}}{\text{अ}} \text{कोज्याय} + \frac{\text{ग}^2}{\text{अ}^2}\right) \text{ताय} \text{ ऐसे लिखो यदि } \text{अ} > \text{ग}$$

और यदि $\text{ग} > \text{अ}$ तो $\text{ला}\text{ग}^2 + \text{ला}\left(1 - \frac{2\text{अ}}{\text{ग}} \text{कोज्याय} + \frac{\text{अ}^2}{\text{ग}^2}\right) \text{ताय}$ ऐसे लिखो

$$\text{तब } \int_0^{\pi} \text{ला}(\text{अ}^2 - 2\text{अगकोज्याय} + \text{ग}^2) \text{ताय} = 2\pi \text{लाज}$$

जहाँ दोनो अ और ग मे से जो अधिक है उसका घोटक ज है ।

२३०। खण्डचलानयन से $\int \text{ला}(1 - 2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) \text{ताय}$

$$= \text{य} \text{ला}(1 - 2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) - 2\text{अ} \int \frac{\text{यज्याय ताय}}{1 - 2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2}$$

इस लिये यदि $\text{अ} < 1$ तो

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{ज्याय ताय}}{1 - 2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2} = \frac{\pi}{2\text{अ}} \text{ला}(1 + \text{अ})^2 = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}(1 + \text{अ})$$

और यदि $\text{अ} > 1$ तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से

$$\text{इस का मान} = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}(1 + \text{अ}) - \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}(\text{अ}) = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}\left(1 + \frac{1}{\text{अ}}\right)$$

२३१। $\int_0^{\pi} \text{कोज्या}\text{अ}^2 \text{य} \text{ला}(1 - 2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) \text{ताय}$ इस का मान

२२९ प्रक्रम के ऐसा यदि थ्रंढी मे लाकर चलानयन करो (जहां सरल-त्रिकोणभिति से दो कोटिज्याओं के घात को दो कोटिज्या के योग में स्वरूप बना लेना) तो $0, \pi$ सीमा के भीतर सब चलो का मान

उड़ जायगा एक खण्ड केवल $\int_0^{\pi} \frac{\text{अ}^2 \text{अ}^2}{\text{अ}^2} \text{ताय}$ यह रह जायगा यदि

अ < १ और यदि अ > १ तो उसी प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{a^{-a_1}}{a_1}$ यह रह जायगा । इसलिये

$$\int_0^\pi \text{कोज्या} a_1 y \text{ ला } (1 - 2a \text{कोज्या} y + a^2) \text{ ताय}$$

$$= -\frac{\pi a^{a_1}}{a_1}, \text{ वा } -\frac{\pi a^{-a_1}}{a_1} \text{ यदि } a < 1 \text{ वा } a > 1 ।$$

२३२। खण्डचलानयन से ऊपर के फल का मान ले आवो तो २३० प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{\text{ज्याय } \text{ज्या} a_1 y \text{ ताय}}{1 - 2a \text{कोज्या} y + a^2} = \frac{\pi}{a} a^{a_1 - 1}$ वा $\frac{\pi}{a} a^{-(a_1 + 1)}$ यदि अ < १ वा अ > १ ।

२३३। चलनकलन के ३१४ वें प्रक्रम के अन्त में जो समीकरण उत्पन्न हुआ है उसे २अ से गुण कर १ में जोड़ देने से

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \text{कोज्या} y + a^2} = 1 + 2a \text{कोज्या} y + 2a^2 \text{कोज्या}^2 y$$

$$+ 2a^3 \text{कोज्या}^3 y +$$

इस में यदि अ < १ तो इस पर से भी बहुत सान्तचलो का ज्ञान हो सकता है जैसे यदि अ, अभिन्न हो तो

$$\int_0^\pi \frac{\text{कोज्या} a_1 y \text{ ताय}}{1 - 2a \text{कोज्या} y + a^2} = \frac{\pi a^{a_1}}{1 - a^2}$$

क्योंकि श्रेणियों के सीमा के भीतर प्रत्येक पद के सान्तचल नष्ट हो जाँयेंगे केवल $\frac{2a^{a_1}}{1 - a^2} \int \text{कोज्या}^2 a_1 y \text{ ताय}$ यह रह जायगा जिस का मान सीमा के भीतर $\frac{\pi a^{a_1}}{1 - a^2}$ यह होगा ।

२३४। $\int_0^\infty \frac{1}{1 + y^2} \frac{\text{ताय}}{1 - 2a \text{कोज्या} y + a^2}$ इस में भी यदि श्रेणी

२४

में $\frac{1}{1-2\text{अकोज्यागय} + \text{अ}^2}$ इस का मान ले आवो तो

$$\frac{1}{1-\text{अ}^2} \left[\frac{1}{1+\text{य}^2} + \frac{2\text{अकोज्यागय}}{1+\text{य}^2} + \frac{2\text{अ}^2\text{कोज्या२गय}}{2+\text{य}^2} + \dots \right] \text{ऐसा होगा}$$

इस लिये सीमा के भीतर प्रत्येक पद सम्बन्धि चलो का मान २२६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ले आकर योग करने से अभीष्ट सान्तचल का मान

$$\pi \frac{1}{1-\text{अ}^2} \cdot \frac{1+\text{अइ}^{-\text{ग}}}{1--\text{अइ}^{-\text{ग}}} \text{ यह होगा ।}$$

$$२२५ । \text{ इसी तरह } \int_0^{\infty} \text{ला}(1-2\text{अकोज्यागय} + \text{अ}^2) \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^2}$$

= $\pi \text{ला}(1-\text{अइ}^{-\text{ग}})$ २२६ और २२९ प्रक्रम की युक्ति से ।

२२६ । चलनकलन के ३१४वें प्रक्रम में उपान्तिम समीकरण जो उत्पन्न हुआ है उस में $\text{य}=\text{र}$ तुल्य मान पीछे से य के स्थान में गय का उत्थापन दे देने से

$$\frac{\text{ज्यागय}}{1-2\text{अकोज्यागय} + \text{य}^2} = \text{ज्यागय} + \text{अज्या२गय} + \text{अ}^2\text{ज्या३गय} + \dots$$

जहाँ $\text{अ} < 1$ । इस श्रेणी और २२७ प्रक्रम से

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{यज्यागयताय}}{1-2\text{अकोज्यागय} + \text{य}^2} = \frac{\pi}{२(\text{इ}^{\text{ग}}-\text{अ})}$$

यदि ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो २३५ प्रक्रम से भी यह सिद्ध होता है ।

२३७। यदि $\text{स} = \text{कोज्याय} + \sqrt{-१}$ ज्याय तो $\text{फ}(\text{अ}+\text{स})$ यह यदि ऐसा हो कि इसमें यदि टेलर का सिद्धान्त लगाया जाय तो व्यभिचार न हो

तो टेलर के सिद्धान्त से $\text{फ}(\text{अ}+\text{स}) + \text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-१})$

$$= २ \left\{ \text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}'(\text{अ}) \text{कोज्याय} + \frac{\text{फ}''(\text{अ})}{२} \text{कोज्या२य} + \dots \right\}$$

$$\text{और } \frac{१-\text{ग}^2}{१-२\text{गकोज्याय} + \text{ग}^2}$$

$$= १ + २\text{गकोज्याय} + २\text{ग}^2\text{कोज्या२य} + २\text{ग}^3\text{कोज्या३य} + \dots$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\pi} \frac{f(x+s) + f(x+s^{-1})}{1-2g\cos x + g^2} \text{ ताय}$$

$$= \frac{2\pi}{1-g^2} \left\{ f(x) + g f'(x) + \frac{g^2}{2} f''(x) + \dots \right\} = \frac{2\pi}{1-g^2} f(x+g)$$

जहाँ $g < 1$

इसी तरह दोनों फलों का अन्तर करने से

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x+s) - f(x+s^{-1})}{1-2g\cos x + g^2} \text{ ताय}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{-1}}{g} \left\{ f(x+g) - f(x) \right\}$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \frac{1-g\cos x}{1-2g\cos x + g^2} \left\{ f(x+s) + f(x+s^{-1}) \right\} \text{ ताय}$$

$$= \left\{ f(x+g) + f(x) \right\} \pi$$

२३८। इस तरह असम्भाव्य संख्या का भी उत्थापन देने से बहुत सान्त-चलो का मान आ जाता है। जैसे

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \text{ यह जो २१२ प्रक्रम से सिद्ध है इस में}$$

यदि a के स्थान में $\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ g इसका उत्थापन दें तो

$$\int_0^{\infty} e^{-g^2 x^2 \sqrt{-1}} \text{ ताय} = \int_0^{\infty} \{ \cos g^2 x^2 - \sqrt{-1} \sin g^2 x^2 \} \text{ ताय}$$

$$= \int_0^{\infty} \cos g^2 x^2 \text{ ताय} - \sqrt{-1} \int_0^{\infty} \sin g^2 x^2 \text{ ताय} = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{-1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{-1}}{2g} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

यहाँ पर सम्भाव्य असम्भाव्य को अलग अलग समान करने से

$$\int_0^{\infty} \cos g^2 x^2 \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2g\sqrt{2}}$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} \sin g^2 x^2 \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2g\sqrt{2}}$$

इसी में यदि $ग^2$ के स्थान में r रख ले तो $ताय = \frac{तार}{२ग^2य} = \frac{तार}{२ग/r}$

इस लिये

$$\int_0^{\infty} \frac{कोज्यारतार}{\sqrt{r}} = \int_0^{\infty} \frac{ज्यार तार}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{\pi}{२}}$$

इस तरह से हजारहो सान्तचल बुद्धिमानों के बुद्धिवल से निकले हुए हैं और निकलते जाते हैं कहाँ तक लिख कर दिखलावे बुद्धिमानों के लिये इतना ही बहुत है। इस पुस्तक के लिखने से मेरा यही तात्पर्य है कि चलराशि सम्बन्धि प्रायः सब विषयों से थोड़ा बहुत विद्यार्थियों का परिचय हो जाय।

$$२३९। \int \frac{ताप}{\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}} = दै_१(ग,प)। \int \sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)} ताप = दै_२(ग,प) और$$

$$\int \frac{ताप}{(१+अज्या^2प)\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}} = दै_३(ग,अ,प) ऐसा मान लो जहाँ $ग < १$ तो यदि$$

$$दै_१(ग,प) + दै_१(ग,प_१) = दै_१(ग,इ_१) \quad \text{जहाँ } इ_१ \text{ एक स्थिराङ्क है तो}$$

कोज्याप कोज्याप_१-ज्यापज्याप_१ $\sqrt{(१-ग^2ज्या^2इ_१)} = कोज्याइ_१$ ऐसा होगा। इस को सिद्ध करने के लिये मान लो कि $प$ और $प_१$ ये दोनो नये चलराशि ट के फल हैं तो दिये हुए समीकरण का नये चलराशि के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}} \frac{ताप}{ताट} + \frac{१}{\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प_१)}} \cdot \frac{ताप_१}{ताट} = ० \dots (१)$$

कल्पना करो कि ट ऐसा है जिस से $\frac{ताप}{ताट} = \sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}$

$$\text{तो (१) समीकरण से } \frac{ताप_१}{ताट} = - \sqrt{(१-ग^2ज्या^2प_१)}$$

दोनो का वर्ग कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ता^2प}{ताट^2} = - ग^2ज्या^2पकोज्या^2प, \quad \frac{ता^2प_१}{ताट^2} = - ग^2ज्या^2प_१कोज्या^2प_१$$

इनके योगान्तर से

$$\frac{ता^2(प \pm प_१)}{ताट^2} = - \frac{ग^2}{२} (ज्या^2प \pm ज्या^2प_१)$$

यदि $p + p_1 = \text{फि}$, $p - p_1 = \text{फी}$ तो

$$\frac{\text{ता}^{\text{फि}}}{\text{ताट}^2} = - \text{ग}^{\text{ज्याफिको}} \text{ज्याफी}, \quad \frac{\text{ता}^{\text{फी}}}{\text{ताट}^2} = - \text{ग}^{\text{ज्याफीको}} \text{ज्याफि}$$

और $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \left(\frac{\text{ताप}}{\text{ताट}}\right)^2 - \left[\frac{\text{ताप}}{\text{ताट}}\right]^2 = - \text{ग}^{\text{ज्याफि}} \text{ज्याफी}$

इस लिये $\frac{\text{ता}^{\text{फि}}}{\text{ताट}^2} = \text{कोस्पफी}$, $\frac{\text{ता}^{\text{फी}}}{\text{ताट}^2} = \text{कोस्पफि}$

$$\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{कोस्पफी}, \quad \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} \frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{कोस्पफि}$$

इस लिये

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \left(\text{ला} \frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} \right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \text{लाज्याफी}, \quad \frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \left(\text{ला} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} \right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \text{लाज्याफि}$$

इस लिये $\text{ला} \frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{लाज्याफी} + \text{स्थिराङ्क}$

इस लिये $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{आ ज्याफी}$ }
 और इसी तरह $\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{का ज्याफि}$ } (२)

जहाँ आ और का स्थिराङ्क है ।

इस कारण से $\text{आज्याफी} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{काज्याफि} \frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}$

चलानयन से, $\text{आकोज्याफी} = \text{काकोज्याफी} + \text{स्थिराङ्क} \dots \dots \dots (३)$

और प्रथम मूल समीकरण से स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $p_1 = 0$ तो

$$\text{दै}_1(\text{ग}, \text{प}) = \text{दै}_1(\text{ग}, \text{इ}_1)$$

इस लिये तब $p = \text{इ}_1$ और $\text{फि} = \text{फी} = \text{इ}_1$

(३) से $(\text{आ} - \text{का}) \text{कोज्याइ}_1 = \text{स्थि}$

इस लिये $\text{आकोज्या}(p - p_1) = \text{काकोज्या}(p + p_1) + (\text{आ} - \text{का}) \text{कोज्याइ}_1$

और $(\text{आ} - \text{का}) \text{कोज्यापकोज्याप}_1 + (\text{आ} + \text{का}) \text{ज्याप ज्याप}_1$
 $= (\text{आ} - \text{का}) \text{कोज्याइ}_1 \dots \dots \dots (४)$

(२) में $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2 \text{प}})} - \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2 \text{प}_1})}$ इस का

और $\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2 \text{प}})} + \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2 \text{प}_1})}$ इस का

उत्थापन देने से और $p_1 = 0$ मानने से

$$\sqrt{(१-गज्या'इ_१)}-१ = आज्याइ_१$$

$$\text{और } \sqrt{(१-गज्या'इ_१)}+१ = काज्याइ_१$$

$$\frac{२\sqrt{(१-गज्या'इ_१)}}{ज्याइ_१} = आ + का, \quad १ - \frac{२}{ज्याइ_१} = आ - का$$

इसका उत्थापन (४) में देने से

$$\begin{aligned} \text{कोज्यापकोज्याप}_१ - ज्यापज्याष_१ \sqrt{(१-गज्या'इ_१)} \\ = \text{कोज्याइ}_१ \text{ यह सिद्ध हुआ} \end{aligned}$$

२४० । २३९ प्रक्रम में जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उस में यदि समशोधन कर वर्ग कर डालो तो

$$(\text{कोज्यापकोज्याप}_१ - \text{कोज्याइ}_१)^२ = (१-गज्या'इ_१)ज्या'षज्या'प_१$$

इस लिये

$$\begin{aligned} \text{कोज्या'षकोज्या'प}_१ - २\text{कोज्याइ}_१\text{कोज्याषकोज्याप}_१ + \text{कोज्या'इ}_१ \\ = ज्या'पज्या'ष_१ - गज्या'इ_१ज्या'पज्या'ष_१ \text{ और } ज्या'ष + \text{कोज्या'प} = १ \end{aligned}$$

इस लिये

$$\begin{aligned} ज्या'ष - ज्या'पज्या'प_१ + \text{कोज्या'ष} + \text{कोज्या'षकोज्या'प}_१ \\ - २\text{कोज्याइ}_१\text{कोज्याषकोज्याप}_१ + \text{कोज्या'इ}_१ \\ = ज्या'षकोज्या'प_१ + \text{कोज्या'पकोज्या'प}_१ + \text{कोज्या'प} \\ - २\text{कोज्याइ}_१\text{कोज्यापकोज्याप}_१ + \text{कोज्या'इ}_१ \\ = \text{कोज्या'प} + \text{कोज्या'प}_१ + \text{कोज्या'इ}_१ - २\text{कोज्याइ}_१\text{कोज्याषकोज्याप}_१ \\ = १ - गज्या'इ_१ज्या'पज्या'प_१ \end{aligned}$$

कोज्या'पकोज्या'इ_१ जोड़ कर पक्षान्तरानयन करने से

$$\begin{aligned} (\text{कोज्याप} - \text{कोज्याप}_१\text{कोज्याइ}_१)^२ \\ = १ - \text{कोज्या'प}_१ - \text{कोज्या'इ}_१ + \text{कोज्या'ष}_१\text{कोज्या'इ}_१ \end{aligned}$$

$$- गज्या'इ_१ज्या'पज्या'प_१$$

$$= ज्या'प_१ज्या'इ_१ (१ - गज्या'प)$$

इस लिये कोज्याप = कोज्याप_१कोज्याइ_१ + ज्याप_१ज्याइ_१√(१ - गज्या'प)

यहाँ पर धनात्मक मूल लिया है क्योंकि जब प = ० तो यहाँ प_१ = इ_१

२४१। वै_१(ग,प) इस का रूप ग,प के बदलने से इसी चाल का हो जाता है केवल स्थिराङ्क गुणक अधिक हो जाता है जैसे यदि

$$\text{स्पप} = \frac{\text{ज्या२प}_१}{ग + \text{कोज्या२प}_१} \text{ तो प}_१ \text{ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से}$$

$$\frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{प}} \frac{\text{ताप}}{\text{ताप}_२} = \frac{२(१ + \text{गकोज्या}२\text{प}_२)}{(\text{ग} + \text{कोज्या}२\text{प}_२)^२}$$

इस लिये $\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}_२} = \frac{२(१ + \text{गकोज्या}२\text{प}_२)}{१ + २\text{गकोज्या}२\text{प}_२ + \text{ग}^२}$

और $१ - \text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{प} = १ - \frac{\text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{प}_२}{१ + २\text{गकोज्या}२\text{प}_२ + \text{ग}^२}$
 $= \frac{१ + २\text{गकोज्या}२\text{प}_२ + \text{ग}^२\text{कोज्या}^२\text{प}_२}{१ + २\text{गकोज्या}२\text{प}_२ + \text{ग}^२}$

इस लिये $\int \frac{\text{ताप}}{\sqrt{१ - \text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{प}}}$
 $= \int \frac{२(१ + \text{गकोज्या}२\text{प}_२)}{१ + २\text{गकोज्या}२\text{प}_२ + \text{ग}^२} \cdot \frac{\sqrt{१ + २\text{गकोज्या}२\text{प}_२ + \text{ग}^२}}{१ + \text{गकोज्या}२\text{प}_२} \text{ताप}_२$
 $= २ \int \frac{\text{ताप}_२}{\sqrt{(१ + २\text{गकोज्या}२\text{प}_२ + \text{ग}^२)}} = २ \int \frac{\text{ताप}_२}{\sqrt{(१ + २\text{ग} - ४\text{गज्या}^२\text{प}_२ + \text{ग}^२)}}$
 $= \frac{२}{१ + \text{ग}} \int \frac{\text{ताप}_२}{\sqrt{\left\{ १ - \frac{४\text{ग}}{(१ + \text{ग})^२} \text{ज्या}^२\text{प}_२ \right\}}}$

यहाँ पर कोई स्थिराङ्क जोड़ने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यदि $\text{प} = ०$ तो $\text{प}_२ = ०$ होता है ।

अब ऊपर के चल में यदि $\text{ग}_२ = \frac{४\text{ग}}{(१ + \text{ग})^२}$ तो

$$\text{दै}_२(\text{ग}, \text{प}) = \frac{२}{१ + \text{ग}} \text{दै}_२(\text{ग}_२, \text{प}_२)$$

पहले जो $\text{स्पष} = \frac{\text{ज्या}२\text{प}_२}{\text{ग} + \text{कोज्या}२\text{प}_२}$ ऐसा माना है इस पर से सिद्ध कर सकते

हो कि $\text{ग ज्याष} = \text{ज्या}(२\text{प}_२ - \text{प})$

और जब $\text{ग}_२ = \frac{४\text{ग}}{(१ + \text{ग})^२} \cdot \frac{\text{ग}_२}{\text{ग}^२} = \frac{४}{\text{ग}(१ + \text{ग}^२)}$

परन्तु $\text{ग} < १$ इस लिये $४ > \text{ग}(१ + \text{ग}^२)$ और $\text{ग}_२ > \text{ग}^२ \therefore \text{ग}_२ > \text{ग}$

इस लिये ग से $\text{ग}_२$ बड़ा ठहरा ।

इस में यदि $\text{प}_२ = \frac{\pi}{३}$ तो $\text{प} = \pi$ इस लिये

$$\text{दै}_२(\text{ग}, \pi) = \frac{२}{१ + \text{ग}} \text{दै}_२(\text{ग}_२, \frac{\pi}{३}) = २ \text{दै}_२(\text{ग}, \frac{\pi}{३}) \dots$$

दै_२ (ग,प) इस में ग को मध्यस्थ, और प को अग्रांश कहते हैं और दै_१ (ग,प) = ० यदि प = ० और यदि प = $\frac{\pi}{३}$ तो पूर्णचल का मान = दै_१ (ग, $\frac{\pi}{३}$) यह है। इस लिये $\frac{\pi}{३}$ को पूर्ण अग्रांश कहते हैं।

यदि ७७ वे प्रक्रम के साथ तुलना करो तो जान पड़ेगा कि दै_२ (ग,प) यह लघुव्यासाग्र से चाप की गणना करें तो दीर्घवृत्त के चाप को प्रकाश करता है और आगे के प्रक्रमों से जान पड़ेगा कि दै_१ (ग, प), दै_२ (ग,प) और दै_३ (अ, ग, प,) इन तीनों में परस्पर सम्बन्ध है इस लिये इन तीनों को क्रम से प्रथम, द्वितीय और तृतीय दीर्घवृत्तीय चल कहते हैं।

यद्यपि इन तीनों के ठीक ठीक मान नहीं निकलते तथापि इन के अव्यक्त मानों के सम्बन्ध से अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं। इन के सिद्धान्तों पर बुद्धिमानों ने अलग एक स्वतन्त्र दीर्घवृत्तीयचल के नाम से पुस्तक ही बना डाली है। अभी सन् १८७३ ई० में ब्रिअट (Briot) और बौक्रेट (Bouquet) ने इसी विषय के पुस्तक का एक बड़ा भारी प्रथम खण्ड प्रकाश किया है।

तीसरे दीर्घवृत्तीयचल में जो अ, एक और थिराङ्क है उसे परिमिति कहते हैं और सर्वत्र ग सर्वदा १ से कम माना गया है।

२४२। इस प्रक्रम में एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जो प्रथम और द्वितीय दीर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से उत्पन्न होता है।

२३९ प्रक्रम में सिद्ध हुआ है कि यदि दै_१ (ग प) + दै_१ (ग,प_१) = दै_१ (ग, इ_१) तो

कोज्यापकोज्याप_१ - ज्यापज्याप_१ $\sqrt{(१ - ग^२ज्या^२इ_१)}$ = कोज्याइ_१
अब दिखलाते हैं कि

यदि कोज्यापकोज्याप_१ - ज्यापज्याप_१ $\sqrt{(१ - ग^२ज्या^२इ_१)}$ = कोज्याइ_१

तो दै_२ (ग,प) + दै_२ (ग,प_१) - दै_२ (ग,इ_१)

= ग^२ज्याप ज्याप_१ ज्याइ_१ ऐसा होगा।

यहाँ दिये हुए समीकरण के धर्म से स्पष्ट है कि प_१ यह प का कोई फल होगा

इस लिये मानो कि, दै_२ (ग,प) + दै_२ (ग,प_१) - दै_२ (ग,इ_१) = फ(प)

इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

फ'(प) = $\sqrt{(१ - ग^२ज्या^२प)}$ + $\sqrt{(१ - ग^२ज्या^२प_१)}$ $\frac{ताप_१}{ताप}$

$$= \frac{\text{कोज्याप} - \text{कोज्याप}_1 \text{कोज्याइ}_1}{\text{ज्याष}_1 \text{ज्याइ}_1}$$

$$+ \frac{\text{कोज्याप}_1 - \text{कोज्यापकोज्याइ}_1}{\text{ज्यापज्याइ}_1} \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}} \quad (२४० \text{ प्रक्रम से})$$

$$= \frac{\text{ता}}{\text{ताप}} \{ \text{ज्या}^1 \text{प} + \text{ज्या}^1 \text{प}_1 + २ \text{कोज्यापकोज्याप}_1 \text{कोज्याइ}_1 \}$$

$$\times \frac{१}{२\text{ज्याषज्याप}_1 \text{ज्याइ}_1}$$

परन्तु $\text{ज्या}^1 \text{प} + \text{ज्या}^1 \text{प}_1 + २\text{कोज्यापकोज्याप}_1 \text{कोज्याइ}_1$

$$= १ + \text{कोज्या}^1 \text{इ}_1 + \text{ग}^1 \text{ज्या}^1 \text{षज्या}^1 \text{प}_1 \text{ज्या}^1 \text{इ}_1 \quad (२४० \text{ ही प्रक्रम से})$$

इसलिये $\text{फ}^1(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्याइ}_1 \frac{\text{ता} (\text{ज्यापज्याप}_1)}{\text{ताष}}$

इस लिये चलानयन से

$$\text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्याइ}_1 \text{ज्यापज्याप}_1$$

स्थिराङ्क जोड़ने की कुल आवश्यकता नहीं है क्योंकि जब $\text{प} = ०$ तो $\text{फ}(\text{प}) = ०$ इस लिये

$$\text{द्वै}_2 (\text{ग}, \text{प}) + \text{द्वै}_2 (\text{ग}, \text{प}_1) - \text{द्वै}_2 (\text{ग}, \text{इ}_1) = \text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्याषज्याप}_1 \text{ज्याइ}_1$$

इस में यदि $\text{इ}_1 = \frac{\pi}{३}$ तो $\text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्याषज्याप}_1$,

और दिये हुए समीकरण का रूप

$$\text{कोज्यापकोज्याप}_1 - \text{ज्यापज्याप}_1 \sqrt{(१ - \text{ग}^1 \text{ज्या}^1 \text{इ}_1)}$$

$$= \text{कोज्यापकोज्याप}_1 - \text{ज्यापज्याप}_1 \sqrt{(१ - \text{ग}^1)} = \text{कोज्याइ}_1 = ०$$

यह ठीक फ्यागननी (Fagnani) के सिद्धान्त के समान फल को दिखलाता है क्योंकि ८५ प्रक्रम के (१) उदाहरण के अन्त में जो

$$\text{इ}^1 \text{य}_1 \text{य}_1^2 - \text{अ}^1 (\text{य}_1^2 + \text{य}_1^2) + \text{अ}^1 = ० \text{ यह समीकरण उत्पन्न हुआ है इस में}$$

$\text{य}_1, \text{य}_1$ का जो क्रम से $\frac{\text{अकोज्याष}}{\sqrt{(१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{ष})}}$, $\frac{\text{अकोज्याष}^1}{\sqrt{(१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}^1)}}$

मान मान लो तो

$$\text{इ}^1 \text{कोज्या}^1 \text{पकोज्या}^1 \text{प}^1 - \text{कोज्या}^1 \text{प} (१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}^1) - \text{कोज्या}^1 \text{प}^1 (१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प})$$

$$+ (१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}) (१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}^1) = ०,$$

अर्थात् $इ^१ ज्या^१ प ज्या^१ प + इ^२ (१ - ज्या^१ प - ज्या^१ प - ज्या^१ प ज्या^१ प) + ज्या^१ प + ज्या^१ प = ०$ अर्थात्

$$इ^२ (इ^२ - १) ज्या^१ प ज्या^१ प + (इ^२ - १) (१ - ज्या^१ प - ज्या^१ प) = ०$$

($इ^२ - १$) का भाग दे देने से

$$इ^१ ज्या^१ प ज्या^१ प + १ - ज्या^१ प - ज्या^१ प = ०$$

इस पर से रूपान्तर करने से

$$कोज्यापकोज्याप = ज्यापज्याप \sqrt{१ - इ^२}$$

अथवा, $ज्या^१ प = \frac{कोज्या^१ प}{१ - इ^२ ज्या^१ प}$

और $ज्या^१ प = \frac{कोज्या^१ प}{१ - इ^२ ज्या^१ प}$

इस प्रकार से प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से सैकड़ों सिद्धान्त बन जाते हैं ।

$$\begin{aligned} २४३ \quad दै_३ (अ, ग, प) &= \int \frac{ताप}{(१ + अज्या^१ प) \sqrt{(१ - ग^३ ज्या^१ प)}} \\ &= \frac{दै_३ (ग, प)}{१ + अज्या^१ प} - \int दै_३ (ग, प) ता \left(\frac{१}{१ + अज्या^१ प} \right) \end{aligned}$$

इस प्रकार से खण्डचलानयन की रीति से जो $दै_३ (अ, ग, प)$ का स्वरूप सिद्ध होता है इससे जान पड़ता है कि $दै_३ (ग, प)$ और $दै_३ (अग, प)$ में भी परस्पर सम्बन्ध है ।

लेजेण्ड्रे (Legendre) ने पहले दो दैर्घवृत्तीय चलो के मान जानने के लिये एक सारणी बनाई है और उसमें स्वल्पान्तर से तीसरे का मान जानने के लिये भी विधि लिखा है । सारणी बनाने का मूल प्रकार ३७ प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण है ।

२४४। यदि $f(y)$ किसी खेत में एक तरफ के डोंड़े का मान हो तो y के स्थान में $अ, अ + च, अ + २च, अ + ३च, \dots, अ + (न - १) च$ इनका उत्थापन देने से उस खेत के भीतर उसी तरफ के $f(अ), f(अ + च), f(अ + २च), \dots$ इत्यादि न डोंड़ों के प्रमाण होंगे इस लिये, इन डोंड़ों का मध्यम मान जिसे उर्दू में औसत बोलते हैं ।

साधारण रीति से वा लीलावती में लिखे हुए भास्कराचार्य के “गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या । स्थानकमित्या सममिति” इस प्रकार से ।

$$\frac{फ(अ) + फ(अ + च) + फ(अ + २च) + \dots + फ \{ अ + (न - १) च \}}{न}$$

कल्पना करो कि क — अ = नच

इस लिये डाढ़ों का मध्यम मान

$$\frac{च [फ(अ) + फ(अ + च) + फ(अ + २च) + \dots + फ \{ अ + (न - १) च \}]}{क - अ}$$

कल्पना करो कि क - अ स्थिर संख्या के भीतर अनन्त स्थानों के डाढ़ों का मध्यम मान जानना है तो न का प्रमाण अनन्त और च का मान शून्य हो जायगा ऐसी दशा में २ वा ४० वे प्रक्रमसे डाढ़ों का यथार्थ मध्यम मान $\int \frac{\frac{क}{अ} फ(य) ताय}{क - अ}$ यह होगा क्योंकि औसत में जितने ही स्थानों को बढ़ाते जाते हैं उतना ही औसत सूक्ष्म होता चला जाता है ।

इस लिये य के अ, क के भीतर के मानों में यदि फ(य) का मध्यम मान निकालना हो तो $\int \frac{फ(य)ताय}{क - अ}$ इस का अ, क सीमा के भीतर सान्तचल ले आवो ।

जैसे किसी ने प्रश्न किया कि जिस वृत्त का व्यासार्द्ध ग है उसके परिधि पर एक स्थिर बिन्दु मान कर वहाँ से वृत्तान्तर्गत प्रत्येक बिन्दुओं की दूरी जो होंगी उनका मध्यम मान क्या होगा ।

यहाँ यदि वृत्त के फल का न तुल्य विभाग कर डालें जहाँ $n = \infty$ तो स्पष्ट है कि हर एक विभाग बिन्दु रूप होंगे इसलिये प्रति विभागों की दूरी स्थिर बिन्दु से क्रम से $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ यहाँ तो इन का मध्यम मान $\frac{1}{n}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$ यह होगा ।

इसमें अंश हर को $\theta \Delta \phi \Delta \theta$ से गुण देने से

$$\frac{\{ \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n \} \theta \phi \theta}{n \theta \Delta \phi \Delta \theta}$$

यहाँ १२५ वें प्रक्रम से $\theta \Delta \phi \Delta \theta$ यह क्षेत्रफल के अत्यल्प विभाग का मान होगा यदि, $\Delta \phi, \Delta \theta$ ताप, ताथु अर्थात् शून्य के तुल्य हो जायँ ।

परन्तु ऐसो दशा में न $\text{श्रु}\Delta\text{प}\Delta\text{श्रु}$ यह वृत्त का फल हो जायगा इस लिये दूरियों का मध्यम मान = $\frac{\{\text{श्रु}_1 + \text{श्रु}_2 + \dots + \text{श्रु}_n\} \text{श्रुताप ताश्रु}}{\pi g^2}$

$\iint \frac{\text{श्रु}^2 \text{ताश्रुताप}}{g^2}$ (द्विगुण चलानयन की रीति से उचित सीमाओं के भीतर जो मान-होगा)

स्थिर बिन्दु से एक व्यास नियत खींच कर उस से और श्रुति से उत्पन्न कोण को प कहो तो यहाँ द्विगुण चलानयन की रीति से सीमाओं को लेने से

$$\begin{aligned} \text{मध्यम मान} &= \frac{1}{\pi g^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2g \text{कोज्याप} \text{श्रु}^2 \text{ताप} \\ &= \frac{1}{\pi g^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2g^2 \text{कोज्या}^3 \text{प ताप}}{3} \\ &= \frac{2g^2}{3\pi g^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^3 \text{प ताप} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{परन्तु} \int \text{कोज्या}^3 \text{प ताप} &= \int (1 - \text{ज्या}^2 \text{प}) \text{कोज्याप ताप} \\ &= \text{ज्याप} - \frac{\text{ज्या}^3 \text{प}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^3 \text{प ताप} = (1 - \frac{1}{3})2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{इस लिये मध्यम मान} = \frac{2g^2}{3\pi g^2} \times \frac{4}{3} = \frac{2g}{9\pi}$$

इस प्रकार सैकड़ों उदाहरण के उत्तर सहज में निकलते हैं ।

२४५। लागा - $(1 + y)$ का मान जानने के लिये सारणी ।

नीचे दी हुई सारणी को हमने प्रोफेसर डिमार्गन के चलनकलन, और चलराशिकलन से लिया है । प्रोफेसर डिमार्गन ने इसको दैर्घवृत्तीय और यूलर के चल सम्बन्धि पुस्तक और चलराशिकलन के अभ्यासार्थ पुस्तक (जो क्रम से प्यारिस में सन् १८२६, और सन् १८१७ में फ्रांसीसी में छपी है) से लिया है (Fraitè des Fonctions Filiptiques et des Intègcales Eulèriennes, Paris, 1826 Also Ezeircices de Calcul Intègral, Paris 1817)

९ स्थानों तक Δ^3 जा-

य ला० गा(१ + य) $\Delta(-) \Delta^2 + () \Delta^3(-)$ नने के लिये अङ्क

००	००० ००० ००० ०००	२५० ३२४ ५५९	७१३ ३४३	१०३९	८४१ ०४५ ०८४
०१	९९७ ५२८ ७३० ६५९	२४३ २३७ ५८७	७०३ ०७०	१०१४	८८४ २८८ २२९
०२	९९५ १२७ ८७१ ९८९	२३६ २५२ १२९	६९३ ०६५	९८५	३२७ ५४१ ७६२
०३	९९२ ७९६ ४२० ८८९	२२९ ३६५ ५२८	६८३ ३२३	९६१	७६४ ८०५ २२८
०४	९९० ५३३ ४०० ४०९	२२२ ५७५ २२०	६७३ ८३०	९३५	४०९ ७३२ ८८४
०५	९८८ ३३७ ८५८ ७९०	२१५ ८७८ ७३८	६६४ ५८०	९११	१८० २२८ ६३३
०६	९८६ २०८ ८६८ ५५६	२०९ २७३ ७०२	६५५ ५६२	८८७	८६० २८६ ३११
०७	९८४ १४५ ५२५ ६३५	२०२ ७५७ ८१८	६४६ ७७०	८६६	५३१ ९५५ २१६
०८	९८२ १४६ ९४८ ५३४	१९६ ३२८ ८७४	६३८ १९७	८४८	३२८ ९६३ ०१८
०९	९८० २१२ २७७ ५४०	१८९ ९८४ ७३१	६२९ ८२९	८२४	२४९ ६५४ २९७
१०	९७८ ३४० ६७३ ९३२	१८३ ७२३ ३३०	६२१ ६६७	८०६	४१९ ९५४ २१७
११	९७६ ५३१ ३१९ ४०९	१७७ ५४२ ६७९	६१३ ६९९	७८७	४३० ९८५ २२०
१२	९७४ ७८३ ४१५ ०९२	१७१ ४४० ८१३	६०५ ९१९	७६८	६३४ ९९८ ५३२
१३	९७३ ०२६ १८१ १६५	१६५ ४१५ ९९६	५९८ ३२२	७४९	९७३ ४१९ ८६५
१४	९७१ ४६८ ८५६ ०८६	१५९ ४६६ ३०९	५९० ९०१	७३२	०१६ ६४४ ०८८
१५	९६९ ९०० ६९६ ०१२	१५३ ५९० ०५६	५८३ ६५२	७१७	२५१ ७८८ ३३१
१६	९६८ ३९० ९७४ २१९	१४७ ७८५ ५५६	५७६ ५६७	७००	८७४ ३३९ ९८४
१७	९६६ ९३८ ९८० ५३९	१४२ ०५१ १८३	५६९ ६४२	६८४	४९० ८७३ ५११
१८	९६५ ५४४ ०२० ८२८	१३६ ३८५ ३६२	५६२ ८७०	६६६	०५५ २१० ९७६
१९	९६४ २०५ ४१६ ४५७	१३० ७८६ ५७०	५५६ २४९	६५२	४२८ ९७५ ५२०
२०	९६२ ६२२ ५०३ ८१४	१२५ २५३ ३३२	५४९ ७७५	६४२	७७७ २१० ००६
२१	९६१ ६९४ ६३३ ८३९	११९ ७८४ २१७	५४३ ४३९	६२७	५१४ ००६ ८६२
२२	९६० ५२१ १७१ ५६५	११४ ३७७ ८४१	५३७ २४०	६१३	२०९ ६७५ २४०
२३	९५९ ४०१ ४९५ ६८७	१०९ ०३२ ८५९	५३१ १७२	६००	८७६ ५२३ १९९
२४	९५८ ३३४ ९९८ १४४	१०३ ७४७ ९७५	५२५ २३२	५८६	६५३ २२७ १७६
२५	९५७ ३२१ ०८३ ७१६	९८ ५२१ ९१४	५१९ ४१७	५७५	५२२ १०५ ८६३

९ स्थानों तक Δ^3

य ला०गा(१ + य) Δ (干) Δ^2 (+) Δ^3 (-) जानने के लिये अङ्क

य	ला०गा(१ + य)	Δ (干)	Δ^2 (+)	Δ^3 (-)	जानने के लिये अङ्क
२६	९५६ ३५९ १६९ ६४०	९३ ३५३ ४६३	५१३ ७२३	५६३	१११ ७७८ ३३३
२७	९५५ ४४८ ६८५ २३४	८८ २४१ ४२७	५०८ १४६	५५४	९८८ ९५५ २३३
२८	९५४ ५८९ ०७१ ५५३	८३ १८४ ६५६	५०२ ६८०	५३९	९८८ ६५२ ४२९
२९	९५३ ७७९ ७८१ ०२९	७८ १८२ ०२९	४९७ ३२८	५३१	८६८ ५३५ ०३८
३०	९५३ ०२० २७७ १५०	७३ २३२ ४५७	४९२ ०८१	५१९	९८३ ७२४ १२९
३१	९५२ ३१० ०३४ १४१	६८ ३३४ ८८३	४८६ ९३७	५०८	९६४ ५६२ ३९८
३२	९५१ ६४८ ५३६ ६५५	६३ ४८८ २८३	४८१ ८९७	५०१	७७५ ७३२ १४९
३३	९५१ ०३५ २७९ ४८१	५८ ६९१ ६५६	४७६ ९५१	४८७	०८३ ८४४ ३०४
३४	९५० ४६९ ७६७ २५४	५३ ९४४ ०३३	४७२ १०२	४८०	६८२ ५४५ ३४९
३५	९४९ ९५१ ५१४ १९१	४९ २४४ ४७७	४६७ ३४९	४७२	०१० ८४३ ५४०
३६	९४९ ४८० ०४३ ८११	४४ ५९२ ०६५	४६२ ६८४	४६२	२९९ ८९६ ५४४
३७	९४९ ०५४ ८८८ ६२२	३९ ९८५ ९०४	४५८ १०६	४५४	२०१ ०९७ ९४५
३८	९४८ ६७५ ५९० २२३	३५ ४२५ १३१	४५३ ६१५	४४७	३२२ २०९ ०८७
३९	९४८ ३४१ ६९८ ३६३	३० ९०८ ८९९	४४९ २०५	४३६	६५२ ५२२ ०१८
४०	९४८ ०५२ ७७१ ४११	२६ ४३६ ३८८	४४४ ८७८	४२९	६८७ ५४३ ४३९
४१	९४७ ८०८ ३७५ ७८९	२२ ००६ ७२६	४४० ६३०	४२१	२८७ ८८६ ५४४
४२	९४७ ६०८ ०८५ ८२३	१७ ६१९ ३४३	४३६ ४५७	४१४	०४० ९१८ ८६७
४३	९४७ ४५१ ४८३ ५४२	१३ २७३ २७०	४३२ ३६०	४०७	४४३ ४२१ ००९
४४	९४७ ३३८ १५८ ४७४	८ ९६७ ८४४	४२८ ३३६	४००	८५८ ४७२ ५३२
४५	९४७ २६७ ७०७ ४५२	४ ७०२ ३३८	४२४ ३८२	३९२	००० ८८९ ५७५
४६	९४७ २३९ ७३४ ४३०	— ४७६ ०५२	४२० ४९८	३८५	३४३ २०१ २८८
४७	९४७ २५३ ८५० ३०२	+ ३७११ ६९८	४१६ ६८२	३७८	८८४ ६५४ ४२१
४८	९४७ ३०९ ६७२ ७२६	७ ८६१ ५८०	४१२ ९३२	३७४	००० ८८० ६६६
४९	९४७ ४०६ ८२५ ९५८	११ ९७४ २४४	४०९ २४४	३६५	५४३ ३१४ ८२९
५०	९४७ ५४४ ९४० ६८३	१६ ०५० ३२४	४०५ ६२०	३५९	९७८ ६६६ ४५३

य ला०गा(१ + य) $\Delta(+)$ Δ^2+ $(-)\Delta^3$ ९ स्थानों तक Δ^3 जा-
 (-) नने के लिये अङ्क

५१	९४७ ७२३ ६५३ ८६२	२०	०९० ४३९	४०२	०५७	३५३	२४९	१००	९८७
५२	९४७ ९४२ ६०८ ५७५	२४	०९५ १९३	३९८	५५४	३४८	७५६	४४४	५११
५३	९४८ २०१ ४५३ ८७५	२८	०६५ १७५	३९५	१०९	३४२	२०९	९९८	७७६
५४	९४८ ४९९ ८४४ ६४२	३२	००० ९६१	३९१	७२०	३३७	४६४	२५१	२२१
५५	९४८ ८३७ ४४१ ४४७	३५	९०३ १११	३८८	३८६	३३१	७२८	९५९	६७४
५६	९४९ २१३ ९१० ४१०	३९	७७२ १७३	३८५	१०८	३२७	३३६	१३१	२२९
५७	९४९ ६२८ ९२३ ०७८	४३	६०८ ६८३	३८१	८८१	३१९	००७	७८७	६५७
५८	९५० ०८२ १५६ २८९	४७	४१३ १६५	३७८	७०५	३१३	४४५	११३	२०९
५९	९५० ५७३ २९२ ०५८	५१	१८६ १२६	३७५	५८३	३११	०७८	९८५	७६५
६०	९५१ १०२ ०१७ ४५०	५४	९२८ ०६८	३७२	५०७	३०४	३५४	३२२	११०
६१	९५१ ६६८ ०२४ ४६७	५८	६३९ ४७८	३६९	४८१	३०२	९८१	६८७	८७४
६२	९५२ २७१ ००९ ९३८	६२	३२० ८३०	३६६	५०१	२९६	५४६	३१४	३२०
६३	९५२ ९१० ६७५ ४०२	६५	९७२ ५९३	३६३	५६७	२९१	१०९	१६१	७५८
६४	९५३ ५८६ ७२७ ०१२	६९	५९५ २२१	३६०	६७८	२८७	६६५	४५३	४३२
६५	९५४ २२८ ८७५ ४२८	७३	१८९ १५८	३५७	८३३	२८३	२९२	३७८	२९७
६६	९५५ ०४६ ८३५ ७१२	७६	७५४ ८४०	३५५	०३१	२७९	६७८	५६७	३५४
६७	९५५ ८३० ३२७ २३८	८०	२९२ ६९३	३५२	२७१	२७४	३३३	१३०	३९९
६८	९५६ ६४९ ०७३ ५९६	८३	८०३ १३२	३४९	५५३	२६९	१९९	८६८	७५८
६९	९५७ ५०२ ८०२ ४९८	८७	२८६ ५६९	३४६	२७३	२६६	५४६	१५५	३०४
७०	९५८ ३९१ २४५ ६९२	९०	७४३ ३९६	३४४	२३४	२६१	०२०	१०८	०९७
७१	९५९ ३१४ १३८ ८७२	९४	१७४ ००७	३४१	६३५	२६१	६४०	७५६	५५६
७२	९६० २७१ २२१ ५९२	९७	५७८ ७०४	३३९	०७०	२५२	६१४	५०२	३११
७३	९६१ २६२ २३७ २०६	१००	९५८ ०९९	३३६	५४५	२५०	०१८	००७	८७८
७४	९६२ २८६ ९३२ ७४१	१०४	३१२ ३२०	३३४	०५८	२४२	४५०	६३४	६३४
७५	९६३ ३४५ ०५८ ८७४	१०७	६४१ ८०३	३३१	६०२	२४५	२३३	१३१	१०१

९ स्थानोत्क Δ^3

य ला. गा(१+य) $\Delta(+)$ $\Delta^2[+]$ $\Delta^3[-]$ जानने के लिये अङ्क

७६	९६४ ४३६ ३६९ ८१०	११० ९४६ ९०१	३२९ १८२	२४१	९९० ८८९ ७८७
७७	९६५ ५६० ६२३ २६९	११४ २२७ ९५६	३२६ ७९६	२३७	५७६ ४७३ ४४५
७८	९६६ ७१७ ५८० ३२२	११७ ४८५ ३०६	३२४ ४४३	२३२	३४२ १४० १११
७९	९६७ ९०७ ००५ ४१२	१२० ७१९ २८०	३२२ १२४	२३०	००८ ०८८ ९७८
८०	९६९ १२८ ६६६ २४१	१२३ ९३० २०१	३१९ ८३६	२२६	८५७ ५७५ ३६४
८१	९७० ३८२ ३३३ ७११	१२७ ११८ ३८६	३१७ ५८०	२२४	३४३ ३२२ २१२
८२	९७१ ६६७ ७८१ ८६४	१३० २८४ १४६	३१५ ३५४	२२१	०१९ ००९ ९७०
८३	९७२ २८४ ७८७ ८१६	१३३ ४२७ ७८४	३१३ १५८	२१७	८८६ ६९४ ७५६
८४	९७४ ३३३ १३१ ६९९	१३६ ५४२ ५९८	३१० ९९२	२१४	५५४ ४३३ ४३१
८५	९७५ ७१२ ५९६ ५९९	१३९ ६४९ ८८१	३०८ ८५६	२१४	०२२ ११९ ११८
८६	९७७ १२२ ९६८ ४९९	१४२ ७२८ ९२०	३०६ ७४७	२१०	९९९ ७८९ ८६५
८७	९७८ ५६४ ०३६ २२५	१४५ ७८६ ९९५	३०४ ६६७	२०९	५७६ ५५६ ३६३
८८	९८० ०३५ ५९१ ३८८	१४८ ८२४ ३८४	३०२ ६१२	२०५	३३४ २३३ १२१
८९	९८१ ५३७ ४२८ ३३३	१५१ ८४१ ३५५	३०० ५८५	२०३	९२० ००१ ७२६
९०	९८३ ०६९ ३४४ ०८६	१५४ ८३८ १७३	२९८ ५८५	२०१	७९७ ९६८ ५९६
९१	९८४ ६३१ १३८ ३००	१५७ ८१५ १०१	२९६ ६०८	१९५	७५५ ६४५ ४५३
९२	९८६ २२२ ६१३ २११	१६० ७७२ ३९१	२९४ ६५९	१९४	३३४ १४१ २२२
९३	९८७ ८४३ ५७३ ५८६	१६३ ७१० २९६	२९२ ७३३	१८९	४८१ १०८ २७१
९४	९८९ ४९३ ८२६ ६७६	१६६ ६२२ ०६१	२९० ८३२	१८७	९८९ ८६८ ७८१
९५	९९१ १७३ १८२ १७२	१६९ ५२८ ९२६	२८८ ९५७	१८७	५७७ ५५४ ५४५
९६	९९२ ८८१ ४५२ १५६	१७२ ४१० १३१	२८७ १०३	१८४	४३४ ३३३ २२२
९७	९९४ ६१८ ४५१ ०६३	१७५ २७२ ९०६	२८५ २७३	१८२	२०३ ९२१ ८११
९८	९९६ १८३ ९९५ ६३२	१७८ ११७ ४८१	२८३ ४६४	१७७	२७१ ६१६ ०६९
९९	९९८ ३७७ ९०४ ८६८	१८० ९४४ ०७९	२८१ ६७९	१७७	६९४ ९५६ ६६५
१००	००० ००० ००० ०००	१८३ ७५२ ९२०	२७९ ९१६	१७५	.

इस सारणी मे (१) ऊर्ध्वाधर कोष्ट में '०१ वृद्धि से य के मान १'०० तक लिखे हैं । दूसरे मे उनके वश से लागा (१ + य) का मान १० आधार में १२ दशमलव स्थानो तक लिखा है गा(१ + य) का मान य के ०,१ के भीतर रूपसे अल्प होता है इस लिये इस कोष्ट मे लघुरिक्थ के मान मे पूर्णाङ्क को छोड़ दिया है पूर्णाङ्क सर्वत्र अपने मन से—१ वा इस मे १० जोड़ कर ९ समझ लेना चाहिये । प्रायः ९ पूर्णाङ्क ही ग्रहण करना उत्तम है जैसा कि त्रिकोणमिति फलों के लघुरिक्थ मे किया जाता है ।

तीसरे कोष्ट मे एक दशमलव स्थान वर्द्धित संख्याओ के लघुरिक्थो के अन्तर के अन्तिम अङ्क है । जैसे य = '२२ के सामने इस में जो संख्या—११४ ३७७ ८४१ है इससे समझना चाहिये कि लागा (१'२२१)—लागा(१ २२०)

$$= — ००० ११४ ३७७ ८४१ ।$$

चौथे और पाँचवें कोष्ट में जहाँ तीन दशमलव स्थान से अधिक स्थान य में हो वहाँ का लागा(१ + य) सूक्ष्म ले आने के लिये दूसरा और तीसरा अन्तर लिखा है (चलनकलन का ८५—८६ प्रक्रम देखो) इसमें भी आदि के दशमलव जो कि ० है छोड़ दिये गये हैं । सर्वत्र वाईं ओर इतने शून्य रख दशमलव का चिह्न रखो जिस मे १२ दशमलव स्थान हों । छठवें कोष्ट मे तीसरे दशमलव स्थान के १ से लेकर ९ तक के मान मे लघुरिक्थ जानने के लिये क्रम से तीसरे अन्तर का अन्तिम अंक है । जो तीसरे अन्तर के अन्तिम स्थानीय अङ्क के स्थान में उत्थापन देने से सयों का तीसरा अन्तर बनाते हैं परन्तु यदि तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क का मान उसके किसी अङ्क से न्यून हो तो उपान्तिम अङ्क में एक न्यून कर तब उसके आगे इसके उस अङ्क को रख कर तीसरा अन्तर बनाना जैसा कि '४६८, और '४६९ मे है जैसे लागा(१ ४६०), लागा(१'४६१), लागा (१ ४६२) . . लागा(१'४६९) इन का मान जानना हो तो ४६ के सामने का अङ्क लेने से

३,४,३,२,०,१,२,८,८ ये हुए इन का उत्थापन तीसरे अन्तर (—३८५) के

Δ^3 के लिये अङ्क	Δ^3	Δ^2	Δ	लागा(१ + य)				य
०	-३८५	४२०४९८	-४७६०५२	९४७	२३९	७३४	४३०	४६०
३	३८३	४२०११३	-५५५५४	९४७	२३९	२५८	३७८	४६१
४	३८४	४१९७३०	+३६४५५९	९४७	२३९	२०२	८२४	४६२
३	३८३	४१९३४६	७८४२८९	९४७	२३९	५६७	३८३	४६३
२	३८२	४१८९६३	१२०३६३५	९४७	२४०	३५१	६७२	४६४
०	३८०	४१८५८१	१६२२५९८	९४७	२४१	५५५	३०७	४६५
१	३८१	४१८२०१	२०४११७९	९४७	२४३	१७७	९०५	४६६
२	३८२	४१७८२०	२४५९३८०	९४७	२४५	२१९	०८४	४६७
८	३७८	४१७४३८	२८७७२००	९४७	२४७	६७८	४६४	४६८
८	३७८	४१७०६०	३२९४६३८	९४७	२५०	५५५	६६४	४६९
		४१६६८२	३७११६९८	९४७	२५३	५५०	३०२	४७०

अन्तिम अङ्क के स्थान में देने से और अन्त के दो अङ्कों ८, ८ के तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क, ५ से बड़ा होने के कारण तीसरे अन्तर के उपान्तिम अङ्क ८ में एक कम कर देने से ४६१, ४६२, ४६९ का तीसरा अन्तर बना फिर इनका संस्कार वीजगणित की रीति से धन ऋण के वश ४६० के दूसरे अन्तर में करने से नवों का दूसरा अन्तर बन गया फिर इनका संस्कार ४६० के प्रथम अन्तर में करने से सभी का प्रथम अन्तर बन गया और अन्त में य के ४६० मान में जो लागा(१ + य) है इसमें प्रथम अन्तर का संस्कार करने से सभी का लघुरिक्थ बन गया है। इन सभी का क्रम पूर्वक न्यास ऊपर के चक्र में लिख दिया है। इस पर से सब अन्तरो को लेकर चलनकलन के ८५-८६ प्रक्रम से यदि गा(१ + य) के न्यूनतम मान का (जो कि २११ प्रक्रम से य के ४६१६ मान में सिद्ध होता है) सूक्ष्म लघुरिक्थ ले आवो तो ९ ९४७२३९१७४३९३४० इतना आता है।

२४६। $\int_{-y}^{n-y} x^{-y} y^{n-y}$ ताय इस यूलर के दूसरे चल में यदि बड़ी सीमा ∞ के तुल्य न हो किन्तु अ के तुल्य हो तो खण्डचलानयन से

$$\int_0^{\infty} a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय}$$

$$= \frac{a^{-n} a^{-a}}{n} \left\{ 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right\}$$

$$\text{वा, } \int_a^{\infty} a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय}$$

$$= a^{-n-1} a^{-a} \left\{ 1 + \frac{n-1}{a} + \frac{(n-1)(n-2)}{a^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{a^3} + \dots \right\}$$

यदि $a < 1$ और n बड़ी भारी संख्या हो तो पहली श्रेणी का और यदि $n < 1$ से और a बड़ा हो तो दूसरी श्रेणी का आसन्न मान जान सकते हो । 1 से n के छोटे होने में दूसरी श्रेणी के सम पद ऋण और विषम पद सब धन होंगे ।

$$\text{अब } \int_0^{\infty} a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय} = \int_0^{\infty} a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय} + \int_0^y a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय} = \text{गा}(n)$$

$$\text{इस लिये } \int_0^y a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय} = \text{गा}(n) - \int_y^{\infty} a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय}$$

$$= \text{गा}(n) - a^{-y} y^{n-1} \text{ या } \dots \quad (१)$$

$$\text{यदि } \int_y^{\infty} a^{-y} y^{n-1} \text{ ताय} = a^{-y} y^{n-1} \text{ या ऊपर की दूसरी श्रेणी के मान}$$

पर से मान लो तो इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$a^{-y} y^{n-1} = -(n-1) a^{-y} y^{n-2} \text{ या } + a^{-y} y^{n-1} \text{ या } - a^{-y} y^{n-1} \text{ या}$$

$a^{-y} y^{n-1}$ का भाग दे देने से और पक्षान्तरानयन से

$$y \text{ या } = \{ y - (n-1) \} \text{ या } - y \quad \dots \quad (२)$$

समझो कि $y \text{ या } = (y - a_1) \text{ या } - y + k_1 \text{ या }^2$ यह एक (३) समीकरण है ।

$$\text{इसमें यदि } \text{या}^2 \text{ का भाग दे दो और } \frac{१}{\text{या}} = १ + \frac{g_1 \text{ या}_1}{y}$$

$$-y g_1 \frac{y \text{ या}_1 - \text{या}_1}{y^2} = (y - a_1) \left(१ + g_1 \frac{\text{या}_1}{y} \right) - y \left(१ + g_1 \frac{\text{या}_1}{y} \right)^2 + k_1$$

$$\text{वा } y \text{ या}_1 = (y + a_1 + १) \text{ या}_1 - \frac{k_1 - a_1}{g_1} y + g_1 \text{ या}_1^2$$

कल्पना करो कि $g_1 = k_1 - a_1$, $k_2 = g_1$, $a_2 = -(a_1 + 1)$ तो

$y_{1a_1} = (y - a_2)y_{1a_1} - y + k_2 y_{1a_1}$ यह ठीक पिछले ही समीकरण के ऐसा उत्पन्न हुआ, इसमें फिर $\frac{1}{y_{1a_1}} = 1 + \frac{g_2 y_{1a_2}}{y}$ ऐसा मान पूर्ववत् क्रिया करे

और $g_2 = k_2 - a_2$, $k_3 = g_2$, $a_3 = -(a_2 + 1)$ तो फिर ।

$y_{2a_2} = (y - a_3) y_{2a_2} - y + k_3 y_{2a_2}$ ऐसा समीकरण बनेगा । यों बार बार क्रिया करने से

$$\begin{aligned} y_a &= \frac{1}{1 + g_1 y^{-1} y_{1a_1}} = \frac{1}{1 + g_1 y^{-1} \frac{1}{1 + g_2 y^{-1} y_{2a_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + g_2 y^{-1} y_{2a_2}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + \frac{g_2 y^{-1}}{1 + g_3 y^{-1} y_{3a_3}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + \frac{g_2 y^{-1}}{1 + \frac{g_3 y^{-1}}{1 + g_4 y^{-1} y_{4a_4}}}}}} \end{aligned}$$

इस रीति से y_a का मान एक वितत भिन्न रूप में आता है जिसका मान जगह वचाने के लिये लाघव से ।

$$y_a = \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + \frac{g_2 y^{-1}}{1 + \frac{g_3 y^{-1}}{1 + \dots}}}}} \dots \text{ऐसा लिखते हैं}$$

अब (३) में यदि $a_1 = n - 1 = n_1$ और $k_1 = 0$ तो यह ठीक (२) समीकरण हो जायगा इस लिये अब जो g_1, g_2, \dots इत्यादि पर से y_a का विततभिन्न के रूप में मान आवेगा इसका उत्थापन (१) में देने से $\int y^{-y} y^{n-1}$ इस का

मान आ जायगा । यदि a, k, g को a_1, k_1, g_1 इत्यादि के मान जानने के लिये सॉचा मानो तो

$g_1 = k_1 - a_1$, $k_2 = g_1$, $a_2 = -(a_1 + 1)$ इन पर से

	१	२	३	४	५	६	७	८	इत्या
अ	n_1	$-(n_1 + 1)$	n_1	$-(n_1 + 1)$	n_1	$-(n_1 + 1)$	n_1	$-(n_1 + 1)$	इत्या.
क	०	$-n_1$	१	$1 - n_1$	२	$2 - n_1$	३	$3 - n_1$	इत्या.
ग	$-n_1$	१	$1 - n_1$	२	$2 - n_1$	३	$3 - n_1$	४	इत्या.

फिर g के मान पर से

$$\int_y^\infty e^{-y} y^{n_1} \text{ ताय} = e^{-y} y^{n_1} \frac{1}{1 - \frac{n_1 y^{-1}}{1 + \frac{y^{-1}}{1 + \text{इत्या०}}}}$$

$$= e^{-y} y^{n_1} \frac{1}{1 - \frac{n_1 y^{-1} y^{-1} (1 - n_1) y^{-1}}{1 + \text{इत्या०}}}$$

इस में यदि $y = a$ और a एक बड़ी संख्या हो तो बहुत जल्द आसन्नमान सूक्ष्म आ जायगा फिर $\int_a^\infty e^{-y} y^{n_1} \text{ ताय}$ इसके मान से (१) समीकरण से $\int_0^a e^{-y} y^{n_1} \text{ ताय}$ इसका भी आसन्नमान आ जायगा ।

अब इतना ही कह कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं कि इस सान्तचलानयन से अनेक चमत्कार प्रकार उत्पन्न होते हैं इसी लिये गणितज्ञ लोग आज तक कुछ न कुछ विचार करते ही चले जाते हैं । इसमें प्रवेश होने के लिये जितना हमने दिखलाया है उतना ही बहुत है ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

१। $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{ज्यापताप}}{\text{कोज्याप}} = \sqrt{2} - 1$

२। $\int_0^a \frac{\text{ताय}}{\sqrt{y} + \sqrt{a+y}} = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$

३। $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{a + 2ky + gy^2} = \frac{\pi}{\sqrt{(a-gk^2)}} \text{ यदि } a > k^2$

४। $\int_0^1 y^3 (1-y)^{\frac{4}{2}} \text{ ताय} = \frac{2^4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$

५। $\int_0^1 y^4 (1-y)^{\frac{9}{2}} \text{ ताय} = \frac{2^{12}}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$

६। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n-1} \text{कोज्या}^{2m-1} \text{यताय} = \frac{1}{n(n+1) \cdot (m+m+1)}$

- ७। $\int_0^{\infty} \frac{य^n ताय}{(अ + कय^x)^{1 + \frac{n}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \frac{1}{\sqrt{(अक^{2+n})}}$
- ८। $\int_0^1 \left\{ ला \frac{1}{य} \right\}^n ताय = \frac{1}{n}$
- ९। $\int_0^अ \frac{ताय}{(अ^n - य^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\pi}{n ज्या \frac{\pi}{n}}$
- १०। $\int_0^{\infty} \frac{ताय}{(य^x + अ^x)(य^x + क^x)} = \frac{\pi}{2अक(अ + क)}$
- ११। $\int_0^{\infty} \frac{ताय}{१ - य^x} = \frac{\pi}{४}$
- १२। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} स्प^n ष ताय = \frac{\pi}{२कोज्या \frac{n\pi}{२}}$ यदि $n < १$
- १३। $\int_0^1 \frac{य^m + य^{-m}}{य^n + य^{-n}} \frac{ताय}{य} = \frac{\pi}{२नकोज्या \frac{m\pi}{2n}}$ यदि $n > m$
- १४। $\int_0^{\infty} \frac{(इ^{अय} + इ^{-अय})(इ^{कय} + इ^{-कय})}{इ^{नय} + इ^{-नय}} ताय = \frac{कोज्या^अ कोज्या^क}{काज्याअ + कोज्याक}$
यदि $अ + क < \pi$
- १५। $\int_0^{\infty} \frac{(इ^{अय} + इ^{-अय})(इ^{कय} + इ^{-कय})}{इ^{नय} + इ^{-नय}} ताय = \frac{ज्याक}{काज्याअ + कोज्याक}$
यदि $अ + क < \pi$
- १६। $\int_0^{\infty} \frac{इ^{कय} + इ^{-कय}}{इ^{नय} + इ^{-नय}} कोज्याअय ताय = \frac{(इ^अ + इ^{-अ}) कोज्या^क}{इ^अ + २कोज्याक + इ^{-अ}}$
यदि $क < \pi$
- १७। $\int_0^{\infty} \frac{इ^{कय} - इ^{-कय}}{इ^{नय} - इ^{-नय}} कोज्याअयताय = \frac{ज्याक}{इ^अ + २कोज्याक + इ^{-अ}}$
यदि $क < \pi$
- १८। $\int_0^{\infty} \frac{इ^{कय} + इ^{-कय}}{इ^{-य} - इ^{-नय}} ज्याअयताय = \frac{१}{२} \frac{इ^अ - इ^{-अ}}{इ^अ + २कोज्याक + इ^{-अ}}$

१९। $\int_0^1 \frac{y^a - y^{-a}}{1 - y} \text{ ताय} = \pi \text{ कोम्पअ} \pi - \frac{\pi^2}{a}$, यदि $a < 1$.

२०। $\int_0^\pi \frac{\text{ला}(1 + ज्याअ कोज्याय)}{\text{कोज्याय}}$ इसका मान क्या होगा

उ० π अ (अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

२१। $\int_0^\infty \frac{इ^{-अय} \text{कोज्यामय}}{य} \text{ ताय}$ इसका मान बताओ उ० स्प' (अ)

२२। $\int_0^\infty \frac{\text{ला}(1 + अ^2 य^2)}{1 + क^2 य^2} \text{ ताय}$ इसका क्या मान होगा ।

उ० $\frac{\pi}{क} \text{ला}\left(\frac{अ + क}{क}\right)$

(अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

२३। $\int_0^\infty \frac{इ^{अय} + इ^{-अय}}{इ^{\piय} - इ^{-\piय}} \text{ य ताय} = \frac{\pi}{2} \text{छे}^2 \frac{अ}{इ}$

सिद्ध करो कि

२४। $\int_0^1 \frac{यअ-1 + य^{-अ}}{1 + य} \frac{\text{ताय}}{य} = \text{ला}\left(\text{स्प}\frac{अ\pi}{2}\right)$

२५। $\int_0^\pi \text{ला}(1 + कोज्याअ कोज्याय) \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\pi}{2} (\frac{\pi}{2} - अ)$

२६। $\int_0^\infty \frac{य^अ \text{लाय ताय}}{1 + य^2} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\text{ज्या}^{\frac{अ\pi}{2}}}{\text{कोज्या}^{\frac{अ\pi}{2}}}$

२७। $\int_0^\infty \frac{(य^2 + अ) / \sqrt{3}}{य^2 + क^2 य^2 + क^2} \text{ ताय} = \frac{\pi}{2} \frac{अ + क}{क}$

२८। $\int_0^1 \text{नय}^{अन-1} इय^{न} \text{ ताय} = 1$

२९। $\int_0^\pi २कोज्या (अस्पय) \text{ ताय} = \pi इ^{-अ}$

३०। सिद्ध करो कि $\int_0^\pi \frac{\text{छे'यताय}}{(अ + क \text{स्प'य})} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{अक} + \frac{1}{अक} \right]$

$$३१। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(२स्पय)} \text{ ताय} \\ = \frac{१}{३} + ला \{ \sqrt{२-१} \}, \text{ मान लो कि स्पय} = य^२$$

$$३२। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(कोस्पय)} \text{ ताय} = \frac{१}{\sqrt{२}} [\frac{१}{३} + ला \{ \sqrt{२+१} \}]$$

$$३३। \text{ सिद्ध करो कि कय } इ^{-अ^२य^२} \int_0^{\infty} य इ^{अ^२य^२} \text{ ताय} = \frac{क}{२अ^२}, \text{ यदि य} = \infty$$

३४। यदि फ (य, $\frac{१}{य}$) = फ($\frac{१}{य}$, य) तो सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(य, \frac{१}{य})} = २ \int_{\frac{१}{१}}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(य, \frac{१}{य})}$$

$$३५। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{२\pi} इ^{कोज्याय} कोज्याय (ज्याताय)य = २\pi$$

(डेमाइवर के सिद्धान्त से कोज्याय, कोज्या२य, इत्यादि के रूप में इसके मान तुल्य एक श्रेणी बना कर चलानयन करो)

$$३६। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\sqrt{२}} ज्या^न पताय = \frac{\sqrt{२}}{२} \frac{\text{गा}(\frac{न+१}{२-१})}{\text{गा}(\frac{न-१}{२-१})}$$

$$३७। \text{ सिद्ध करो कि } \text{गा}(\frac{न}{२})\text{गा}(\frac{न+१}{२-१}) = \frac{\sqrt{२}}{२न-२} \text{गा}(न)$$

$$३८। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\sqrt{२}} \frac{\text{ज्या}^{न-१} \text{पकोज्या}^{न-१} \text{पताय}}{(\text{अज्या}^२य + ककोज्या^२य)^{म-न}} = \frac{\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{२अ^म क^n \text{गा}(म+न)}$$

$$३९। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\infty} इ^{-अय} कोज्याकय^{म-१} \text{ताय} \\ = \frac{\text{गा}(म)}{(अ^२ + क^२)^{\frac{म}{२}}} कोज्याम \{ स्प^{-१} \frac{क}{अ} \}$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} इ^{-अय} ज्याकय^{म-१} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(म)}{(अ^२ + क^२)^{\frac{म}{२}}} ज्याम \{ स्प^{-१} \frac{क}{अ} \}$$

$$\int_0^{\infty} इ^{-अय} य^{म-१} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(म)}{अ^म},$$

इसमें अ = अ - क $\sqrt{-१}$ मान सम्भाव्य, असम्भाव्य को बराबर करो)

४०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या } y}{y} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या}^2 y}{y^2}$

४१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{कोज्याकय } y^{n-1} \text{ ताय} = \frac{\text{गा}(n)}{k^n} \text{कोज्या} \frac{n\pi}{2}$

$\int_0^{\infty} \text{ज्याकय } y^{n-1} \text{ ताय} = \frac{\text{गा}(n)}{k^n} \text{ज्या} \frac{n\pi}{2}$

४२। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याकलताल}}{l^n}$

$= \frac{1}{\text{गा}(n)} \int_0^{\infty} \frac{y^n \text{ताय}}{k^2 + y^2} = \frac{k^{n-1} \pi}{\text{गा}(n) 2 \text{कोज्या} \frac{n\pi}{2}}$

$\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याकलताल}}{l^n} = \frac{k^{n-1} \pi}{\text{गा}(n) 2 \text{ज्या} \frac{n\pi}{2}}$

४३। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-r^2} r^{-2} \text{तार} = -\sqrt{\pi}$

४४। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \left(\text{इ}^{-\frac{a^2}{y^2}} - \text{इ}^{-\frac{k^2}{y^2}} \right) \text{ताय} = (k-a)\sqrt{\pi}$

४५। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ला}(1-2n\text{कोज्याकय} + n^2) \text{ताय}}{y} = 0$

यदि $n < 1$

४६। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{ला} \frac{1 + 2n\text{कोज्याअय} + n^2 \text{ताय}}{1 + 2n\text{कोज्याकय} + n^2 y} \text{ यह क्रम से}$

$2 \text{ला}(1+n) \frac{k}{a}, 2 \text{ला}(1 + \frac{1}{n}) \text{ला} \frac{k}{a}$ इस के तुल्य होगा

यदि $n < 1, n > 1$

(फ्रुलानी का सिद्धान्त देखो)

४७। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1+y^2} \text{ला}(y + \frac{1}{y}) = \pi \text{ला}(2)$

(य = स्पष्ट ऐसा मान कर आगे क्रिया करो)

४८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \left[\frac{\text{इ}^{-ay} - \text{इ}^{-ky}}{y} \right]^2 \text{ताय} = \text{ला} \frac{(2a)^{2a} (2k)^{2k}}{(a+k)^2 (a+k)}$

$$४९। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{y^m - y^n}{\text{लाय}} \frac{\text{ताय}}{y} = \text{ला} \frac{m}{n}$$$

(लाय = र मान दूसरा रूप बना कर फ्रुलानी का सिद्धान्त लगावो) वा

$$\text{द्विगुण चलानयन } \int_n^m \int_0^1 y^{अ-१} \text{ताय ताअ इसका करो)}$$

$$५०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \{ \sqrt{(\text{स्पष})} + \sqrt{(\text{कोस्पष})} \} \text{ताष} = \frac{\pi}{२\sqrt{३}}$$$

$$५१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{स्प}^न\text{ष}}{\text{अकोज्या}^२\text{ष} + \text{कज्या}^२\text{ष}}$

$$= \frac{\pi}{३\text{कोज्या}^३\text{न}\pi} \frac{१}{\text{अ} \frac{१-न}{२} \text{क} \frac{१+न}{२}}$$$$

यदि $n < १$

$$५२। सिद्ध करो कि ला $\int \left\{ \frac{\text{इय} + १}{\text{इय} - १} \right\} \text{ताय} = \frac{\pi^२}{४},$$$

(इय का अंश हर मे भाग देकर लघुरिक्थ की श्रेढी से क्रिया करो)

$$५३। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{y} \text{लाय}}{(१+y)^३} \text{ताय} = \pi$$$

$$५४। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{y^{द-१} (१-y)^{म-१}}{(\text{क} + \text{गय})^{द+म}} \text{ताय}$

$$= \frac{\text{गा(द)गा(म)}}{\text{गा(द+म)}} \frac{१}{\text{क}^म(\text{क} + \text{ग})^द}$$$$

$$५५। सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi} \frac{\text{ज्या}^{न-१}\text{ष ताष}}{(\text{अ}_१ + \text{क}_१\text{कोज्याष})^न}$

$$= \frac{\{\text{गा}(\frac{\pi}{२})\}^२}{\text{गा}(न)} \frac{२^{न-१}}{(\text{अ}_१^२ - \text{क}_१^२)^{\frac{न}{२}}}$$$$

$$५६। सिद्ध करो कि न $\int_0^1 \frac{y^{म-१}\text{ताय}}{(१-y^न)^{\frac{म}{न}}} = \frac{\pi}{\text{ज्या} \frac{म\pi}{न}}$$$

५७। सिद्ध करो कि

$$(१-ग) \frac{म}{न} \int_0^१ \frac{y^{\frac{म}{न}-१}\text{ताय}}{(१+गय)(१-y)^{\frac{म}{न}}} = न \int_0^1 \frac{y^{म-१}\text{ताय}}{(१-y^न)^{\frac{म}{न}}}$$

५८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या अय ज्यांगय}}{य}$ ताथ इस का मान अ, और π के वश से ० वा $\pm \frac{\pi}{2}$ अथवा $\pm \frac{\pi}{4}$ होगा ।

५९। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{-(y^2 + \frac{a^2}{y^2})}$ क ताथ $= \sqrt[3]{\frac{a}{k}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt[3]{-2}$ अक

६०। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty} \sqrt[3]{-(y^2 + \frac{a^2}{y^2})} \text{ कोज्याप कोज्या } \left\{ (y^2 + \frac{a^2}{y^2}) \text{ ज्याप } \right\} \text{ ताथ}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{-2} \text{ अकोज्याप कोज्या } \left\{ 2 \text{ अज्याप } + \frac{\pi}{2} \right\}$$

और $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{-(y^2 + \frac{a^2}{y^2})} \text{ कोज्याप ज्या } \left\{ (y^2 + \frac{a^2}{y^2}) \text{ ज्याप } \right\} \text{ ताथ}$

$$= \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{-2} \text{ अकोज्याप ज्या } \left(2 \text{ अज्याप } + \frac{\pi}{2} \right)$$

(५९वें प्रश्न में क के स्थान में कोज्याप + ज्याप $\sqrt{-1}$ का उत्थापन दे कर सम्भाव्य और असम्भाव्य को अलग अलग बराबर करो)

६१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{(1-y^2) \text{ कोज्या गय ताथ}}{1+y^2} = \pi \sqrt[3]{-ग}$

६२। सिद्ध करो कि $1 - \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{y^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ कोज्या (यज्यार) तार}$$

६३। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ज्यायज्या}^{-1} (\text{ज्याय ज्यार}) \text{ ताथ तार} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

६४। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{ कोज्या } \left(\text{कय } \frac{1}{n} \right) \text{ ताथ} = \frac{\text{गा}(n+1) \text{ कोज्या } \left(\frac{\pi}{2n} \right)}{k^n}$

६५। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{\text{लाय ताथ}}{1+y} = -\frac{\pi^2}{6}$

६६। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{\text{ताथ } (\text{लाय})^{2n-1}}{1-y}$

$$= - \frac{1}{2n-1} \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right]$$

६७। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sqrt{(2\cos x - \cos^2 x)} \sqrt{(\cos^2 x - \cos^4 x)}}$

$$= \frac{2}{3} \text{ है, (ग, } \frac{\pi}{2}), \text{ जहाँ ग} = \frac{\pi}{2}$$

{ ३४ प्रक्रम का (३) और ३७ प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो }

६८। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण $\sin \theta = \cos \phi$ को ज्याय यह है उसमें $\phi = 0$ और $\phi = \frac{\pi}{2}$ के बीच में श्रुति का मध्यम मान निकालो । $\text{उ० } \frac{\pi}{4}$

६९। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{-2x} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} + \dots \text{ जहाँ } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

७०। सिद्ध करो

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 + \frac{x^{-1}}{1} + \frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^{-3}}{3} + \frac{x^{-4}}{4} + \dots$$

७१। पचीस अंगुल आधार पर जो वर्गाकार एक रूमाल थी उसके बीच में एक किनारे से दूसरे किनारे तक एक लड़के ने एक टेढ़ी लाल रोशनाई से धारी कर दी । धारी के प्रतिबिन्दु से सामने के भुज पर लम्ब डाला तो लम्ब का मान $6\sqrt{5}$ ठहरा तो लम्बो के मध्यम मान तुल्य लम्ब से य का क्या मान होगा । एक कोने से लम्ब मूल का अन्तर य है । $\text{उ० } y = 11\frac{1}{2} \text{ अंगुल}$

इति नवमाध्याय ।



अथ दशसाध्याय ।

मिश्रित प्रकीर्णक ।

२४७। ६३ वे प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हो चुका है कि यदि सीमा स्थिराङ्क हो तो $\int_a^x \int_a^y f(y,r) \text{ तारताय} = \int_a^y \int_a^x f(y,r) \text{ तायतार}$

परन्तु यदि इन सीमाओं में से कोई दो चल हो जैसा कि ६४ वे प्रक्रम में दिखलाया है तब कैसे क्रम को बदल कर चलानयन करना इसके लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं ।

$\int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2-y^2}} f(y,r) \text{ तार ताय}$ इसमें क्रम को बदलने की इच्छा है । अर्थात् जहाँ पहले r के वश से चलानयन किया गया है वहाँ पहले y के वश से किया चाहते हैं ।

यहाँ यदि विचारो तो r की सीमा 0 और $\sqrt{x^2-y^2}$ है इसलिये कह सकते हो कि जिस वृत्त का केन्द्र मूल स्थान और व्यासार्ध x है उसके परिधि-चतुर्थांश के प्रतिविन्दु तक r के मान में पहले चल निकाला गया है फिर r अक्ष और वृत्त के योग विन्दु से लेकर y के x तुल्य मान में चल का मान लाया गया है । इसलिये यदि $l = f(y,r)$ यह एक घनपृष्ठ का समीकरण कल्पना करे तो ऊपर का द्विगुण चल १७४ वे प्रक्रम से एक घनक्षेत्र के उस खण्ड के घनफल के समान है जो इस वृत्त पाद के प्रतिविन्दु से लम्ब खड़ा करने से लम्बाग्रो के भीतर है । इसलिये यदि अब क्रम बदलना चाहें तो वृत्तपाद के भीतर पहले y की सीमा 0 और $\sqrt{x^2-r^2}$ होगी फिर r की सीमा 0 और x होगी इसलिये ।

$\int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2-r^2}} f(y,r) \text{ तारताय} = \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2-r^2}} f(y,r) \text{ तायतार}$
ऐसा होगा ।

क्रम बदलने से क्या अभिप्राय है इसके समझने के लिये केवल ऊपर उदाहरण दिखलाया गया है इसके लिये कोई विधि नहीं है उदाहरण के वश बुद्धिमानों को चाहिये कि क्रम बदलने में सीमाओं का ज्ञान करें ।

२४८। ऊपर के विषय का एक और उदाहरण दिखलाते हैं ।

$\int_0^x \int_0^y \int_0^r f(y, r, l) \text{ ताल तार ताय इसमें क्रम को बदलना है ।}$

यहाँ सीमाओं के देखने से बोध होता है कि एक सूची के सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जिसके सीमाओं के धरातल का क्रम से $l = 0, l = r, r = y, y = x$, ये समीकरण हैं ।

इसलिये क्रम बदलने से

$$\int_0^x \int_r^x \int_0^r f(y, r, l) \text{ तालतायतार}$$

$$\int_0^x \int_0^r \int_r^x f(y, r, l) \text{ तायतालतार}$$

$$\int_0^x \int_l^x \int_r^x f(y, r, l) \text{ तायतारताल}$$

$$\int_0^x \int_0^y \int_l^y f(y, r, l) \text{ तारतालताय}$$

$$\int_0^x \int_l^x \int_l^y f(y, r, l) \text{ तारतायताल}$$

ये पाँच भेद होंगे । इन पाँचों से वही चल आवेगा जो कि दिये हुए फल का चल होगा । यदि $f(y, r, l)$ के स्थान में १ रख लो तो छओ पर से $\frac{x^3}{6}$ यही मान प्रतीति के योग्य आ जायगा ।

२४१। $\int \int$ शातारताय इसको व और श के रूप में बदल देना है जहाँ शा, य और र का फल है और

$$f_1(y, r, v, sh) = 0, f_2(y, r, v, sh) = 0, \dots \dots (१)$$

यहाँ पर इतना समझ लेना चाहिये कि $\int \int$ शातारताय इसमें र के ज्ञात सीमाओ के भीतर चलानयन किया गया है जो सीमाये कि य के फल हैं और य की सीमायें भी ज्ञात हैं और यह भी जानने हैं कि स्थिर हैं ।

(१) इसके दोनो समीकरणो पर से व की उन्मिति जान उनके साम्य से स्पष्ट है कि $r = f_1(y, sh)$ (२) ऐसा होगा ।

इस पर से तार = $f_1(y, sh)$ ताश जहाँ $f_1(y, sh)$ य को स्थिर मान श के वग से $f_1(y, sh)$ का तात्कालिक सम्बन्ध है ।

र, और तार का यह जो मान आया है उसका उत्थापन \int शातार में देने से \int शा, फा (य,श) ताश ऐसा होगा जहाँ शा, यह शा के मान में र का उत्थापन देने से शा का रूपान्तर है । इसलिये पहले द्विगुणचलानयन का रूप $\int \int$ शा, फा(य,श)ताशताय ऐसा होगा जहाँ र के ज्ञात सीमाओं पर से श की भी उचित सीमा (२) समीकरण से विदित हो जायँगी ।

आगे अब समझो कि उदाहरण के रूप के वश से जैसा कि २४७-४८ प्रक्रमों में दिखा आये हैं $\int \int$ शा, फा (य,श) ताश ताय इसमें उचित सीमाओं के भीतर क्रम को बदल कर $\int \int$ शा, फा (य,श) ताय ताश इसका मान जान लिया अब चाहते हैं कि य और ताय को उड़ा दें और उसके स्थान में व और ताव आ जायँ ।

(१) के समीकरणों पर से र की दो उन्मिति जान कर उनके साम्य से य का मान ले आवो तो स्पष्ट है कि य = फि(श,व) . . (३) होगा फिर इस पर से ताय = फि' (श,व) ताव, जहाँ फि(श,व) व के वश से फि(श,व) का तात्कालिक सम्बन्ध है ।

द्विगुणचल का जो $\int \int$ शा, फा(य,श) तायताश यह रूपान्तर है इसमें य, और ताय के मान का उत्थापन देने से

$\int \int$ शा फा(य,श) फि'(श,व) ताव ताश जहाँ शा, के मान में य के मान का उत्थापन देने से शा आया है और फा(य,श) के मान में य के स्थान में फि(श,व) का उत्थापन दे देना है ।

यहाँ य की जानी हुई सीमाओं पर से (३) समीकरण के बल से श के रूप में व की सीमा विदित हो जायगी ।

(१) से और चलनकलन के

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{नार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताव}}{\text{ताश}} \text{ की उन्मिति से } \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}} = \frac{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} = \text{फ}'(\text{य,श}) = \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}$$

तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर र और व के स्थान में उनका मान जो य और श के रूप में आया है रख देना चाहिये ।

इसी तरह (१) से

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} \frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} = 0,$$

इस पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}$ की उन्मिति जान कर

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} = \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}} = \text{फि}'(\text{श,व})$$

इस लिये फा' (य,श) फि' (श,व)

$$= \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}}$$

इन सबका उत्थापन देने से ।

$$\iint \text{शातारताय} = \iint \text{शा} \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}} \text{तावताश} \quad (\text{४})$$

यहाँ भी तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर य और र के मान का उत्थापन दे देना चाहिये जो कि व और श के रूप में आये हैं और शा के मान में भी य, र के इन्ही मानों का उत्थापन दे दो ।

यदि (१) समीकरण का रूप

$$\text{फ}_1(\text{य,र,व,श}) = \text{य-फि}_1(\text{व,श}) = 0, \text{र-फि}_2(\text{व,श}) = 0, = \text{फ}_2(\text{य,र,व,श}) \cdots (\text{५})$$

पैसा हो तो

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} = १, \frac{\text{ताफ}_१}{\text{तार}} = ०, \frac{\text{ताफ}_२}{\text{ताय}} = ०, \frac{\text{ताफ}_२}{\text{तार}} = १,$$

इस का उत्थापन (४) में देने से

$$\int \int \text{शा तारताय} = \int \int \text{शा} \left(\frac{\text{ताफी}_१}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफी}_२}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफी}_१}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफी}_२}{\text{ताव}} \right) \text{तावताश}$$

यहाँ (५) वे से य, और र के मान व और श के रूप में जो निकलेंगे उनका उत्थापन शा में दे देना चाहिये ।

यदि (५) वें से य, और र के रूप में फी_१(व,श) और फी_२(व,श) का मान जानकर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो ऊपर का समीकरण नीचे लिखे समीकरण के समान होगा ।

$$\int \int \text{शा तारताय} = \int \int \text{शा} \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताश}} \frac{\text{तार}}{\text{ताव}} \right) \text{ताशताव} \dots (६)$$

यदि (१) समीकरण का रूप नीचे लिखे के ऐसा हो

$$व - \text{फु}_१(\text{य}, \text{र}) = ०, \text{श} - \text{फु}_२(\text{य}, \text{र}) = ० \dots \dots (७)$$

तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\int \int \text{शा तारताय} \int \int \frac{\text{शा तारताश}}{\frac{\text{ताफु}_१}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफु}_२}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफु}_१}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफु}_२}{\text{तार}}} = \int \int \frac{\text{शा तारताश}}{\frac{\text{तावताश}}{\text{ताय तार}} - \frac{\text{तावताश}}{\text{तार ताय}}} (८)$$

नये चलों के यदि सीमा प्रसिद्ध हो जायँ तो (४), (६), और (८) वें से नये चल राशि के वश से द्विगुण चल का मान सहज में सिद्ध हो जायगा परन्तु $\int \text{शा}_१ \text{फा}_१(\text{य}, \text{श}) \text{ताश ताय}$ पर से क्रम बदलने में जहाँ कठिनता आ पड़ेगी वहाँ पर ये सब बेकाम पड़ जायँगे ।

२५०। ऊपर के प्रक्रम की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

$$(१) \int_०^{\text{ग}} \int_०^{\text{ग}-\text{य}} \text{शा तार ताय इसको व,श के वश से बदल देने की इच्छा$$

है जहाँ $\text{य} + \text{र} = \text{व}, \text{र} = \text{वश} ।$

ऊपर के प्रक्रम में जैसा लिखा है वैसी सब क्रिया करने से

$$\text{र} = \frac{\text{शय}}{१-\text{श}} \text{ और } \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} = \frac{\text{य}}{(१-\text{श})^२} ।$$

जब $r = 0$ तब $\theta = 0$ और जब $r = g - y$ तब $\theta = \frac{g-y}{g}$ इस लिये पहले r को बदलने से

$$\int_0^g \int_0^{\frac{g-y}{g}} \text{शा.य} (1 - \theta)^{-2} \text{ता.श} \text{ता.य} \text{ऐसा हुआ।}$$

इस द्विगुणचल का २४७ प्रक्रम के ऐसा यदि स्वरूप विचारो तो g व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनेगा उसके एक व्यास रेखा को y अक्ष मान और उसके एक अग्र से भुज गणना करें तो θ का मान, उस कोण की कोटिज्या होगी जो वृत्त के कोट्रग्र पर केन्द्र से गई रेखा और y अक्ष से उत्पन्न होता है। इसलिये एक वृत्तपाद के भीतर θ का मान 0 और 1 के भीतर होगा और y की सीमा 0 और $g (1 - \theta)$ के भीतर होगी इसलिये यदि ऊपर के द्विगुणचल में क्रम को बदले तो

$$\int_0^1 \int_0^{g(1-\theta)} \text{शा.य} (1 - \theta)^{-2} \text{ता.य} \text{ता.श} \text{ऐसा होगा।}$$

अब इसमें दिये हुए समीकरण से

$$y = v(1-\theta) \text{ और } \frac{\text{ता.य}}{\text{ता.व}} = 1 - \theta \text{ और जब } y = 0 \text{ तब } v = 0 \text{ और जब}$$

$$y = g(1 - \theta) \text{ तब } v = g \text{ इसलिये ऊपर के द्विगुणचल का रूप}$$

$$\int_0^1 \int_0^g \text{शा.व} \text{ता.व} \text{ता.श} \text{ऐसा हुआ।}$$

(२) $\int \int \theta$ तार ता.य इसको θ , और p के साथ बदल देना है जहाँ $y = \theta$ कोज्या p , $r = \theta$ ज्या p ।

यहाँ मान लो कि $\theta = p$ और $v = \theta$ है तो २४९ प्रक्रम के (६) वे समीकरण से

$$\frac{\text{ता.य}}{\text{ता.व}} \frac{\text{तार}}{\text{ता.श}} - \frac{\text{ता.य}}{\text{ता.श}} \frac{\text{तार}}{\text{ता.व}} = \theta \text{कोज्या } p + \theta \text{ज्या } p = \theta$$

इसलिये ऊपर के द्विगुणचल का रूप $\int \int \theta$ ता.य ता.व ऐसा हुआ। इसे यदि विचारो तो १७८ वे प्रक्रम में जो घनफल जानने के लिये अश्रीय समीकरण पर से प्रकार लिखा है उसी के समान है। सीमाओं का विचार अवश्य यहाँ पर कर लेना चाहिये जिसमें y और r के वश से जो अवयव आये हो वेही अवयव v और θ के वश से भी आ जायँ।

इसी में यदि शा = फ(अय + कर) तो ऊपर की युक्ति से बदलने पर द्विगुण चल का रूप

$$\int \int \text{फ} \{ \text{ज श्रु कोज्या}(\text{प} - \text{अ}_1) \} \text{श्रु ताश्रुताप} \text{ ऐसा होगा,}$$

जहाँ ज कोज्याअ_१ = अ और जज्याअ_१ = क । इसमें यदि प - अ_१ = प' तो द्विगुण चल का रूप

$\int \int \text{फ}(\text{ज श्रु कोज्या प}') \text{श्रुताश्रु ताप}'$, फिर इसमें मान लो कि श्रुकोज्याप' = य' और श्रुज्याप' = र' तो इसका रूपान्तर

$$\int \int \text{फ}(\text{ज य}') \text{तार}' \text{ताय}' \text{ ऐसा होगा ।}$$

(एक एक को स्थिर मान कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो जैसा कि २४९ वें प्रक्रम में कहा है)

स्वर चिह्न को उड़ा देने से

$$\int \int \text{फ} (\text{अय} + \text{कर}) \text{तार} \text{ताय} = \int \int \text{फ}(\text{जय}) \text{तार} \text{ताय}$$

जहाँ ज' = $\sqrt{(\text{अ}^2 + \text{क}^2)}$ और वायें पक्ष की सीमाओं पर से उदाहरण के स्वरूप से दहने पक्ष में सीमाओं का ज्ञान प्रायः हो सकता है ।

(३) १५२ वें प्रक्रम से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल सिद्ध है कि द्विगुण चल के रूप में $\int \int \sqrt{ \{ १ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \} } \text{तार} \text{ताय}$ ऐसा होगा इसे ताय, ताय_१ के वश से बदलना है जहाँ

$$ल = \text{श्रुकोज्याप}, \text{ य} = \text{श्रुज्यापकोज्याप}_१, \text{ र} = \text{श्रुज्यापज्याप}_१$$

पृष्ठ के समीकरण से ल, य और र के रूप में आजायगा इसलिये ल के स्थान में य, र का फल रख देने से स्पष्ट है कि प, प_१ का कोई फल श्रु होगा इसलिये पहले तार ताय बदलने के लिये २४९ वें प्रक्रम की युक्ति से पहले प_१ को फिर प को स्थिर मान लेने से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याष कोज्याप}_१ + \text{श्रुकोज्यापकोज्याप}_१$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}_१} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_१} \text{ज्याप कोज्याप}_१ - \text{श्रुज्याप ज्याप}_१$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याप ज्याप}_१ + \text{श्रुकोज्याप ज्याप}_१$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताप}_r} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_r} \text{ज्याप ज्याप}_r + \text{श्रुज्यापकोज्याप}_r,$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताय ताप}_r} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताप}_r \text{ताप}} = \text{श्रुज्याप (श्रु कोज्याप + } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याप)}$$

इसलिये तार ताय को हटा कर उसके स्थान मे

$$\text{श्रुज्याप(श्रु कोज्याप + } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याप) इसे रख दो ।}$$

अब $\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}}$ इसके बदलने के लिये एक एक को स्थिर

मानने से चलनकलन के ६६ वे प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \frac{\text{ताल ताय}}{\text{ताय ताप}} + \frac{\text{ताल तार}}{\text{तार ताप}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}_r} = \frac{\text{ताल ताय}}{\text{ताय ताप}_r} + \frac{\text{ताल तार}}{\text{तार ताप}_r}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{कोज्याप} - \text{श्रुज्याप}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}_r} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_r} \text{कोज्याप}$$

अब इन पर से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ का मान ले आओ तो एक भिन्न होगा जिसका अंश

$$= \frac{\text{ताल तार}}{\text{ताप ताप}_r} - \frac{\text{ताल तार}}{\text{ताप}_r \text{ताप}}$$

$$= \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{कोज्याप} - \text{श्रु ज्याप} \right] \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_r} \text{ज्याप ज्याप}_r + \text{श्रुज्याप कोज्याप}_r \right] \\ - \frac{\text{ताल तार}}{\text{ताप}_r \text{ताप}}$$

$$= - \text{श्रुज्याप}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_r} + \text{श्रुज्यापकोज्यापकोज्याप}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याप कोज्याप}_r$$

और हर = $\frac{\text{ताय तार}}{\text{ताय ताप}_r} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताप}_r \text{ताप}}$ जिसका मान अभी ऊपर ले आये है ।
इस तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{श्रुज्यापकोज्यापकोज्याप}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याप}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_r} - \text{श्रुज्यापकोज्याप}_r}{\text{श्रुज्याप (श्रुकोज्याप + ज्याप } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{)}$$

इसी तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{श्रुकोज्याप, } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप,}} + \text{श्रज्याप कोज्याप ज्याष, } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याषज्याप}}{\text{श्रुज्याप (श्रुकोज्याप + ज्याप } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}})}$$

इसलिये $1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2$

$$= \frac{\text{श्रुज्याप}^2 + \text{श्रु}^2 \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप,}}\right)^2 + \text{श्रुज्याष} \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2}{\text{श्रुज्याष} \left(\text{श्रुकोज्याप} + \text{ज्याष } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2}$$

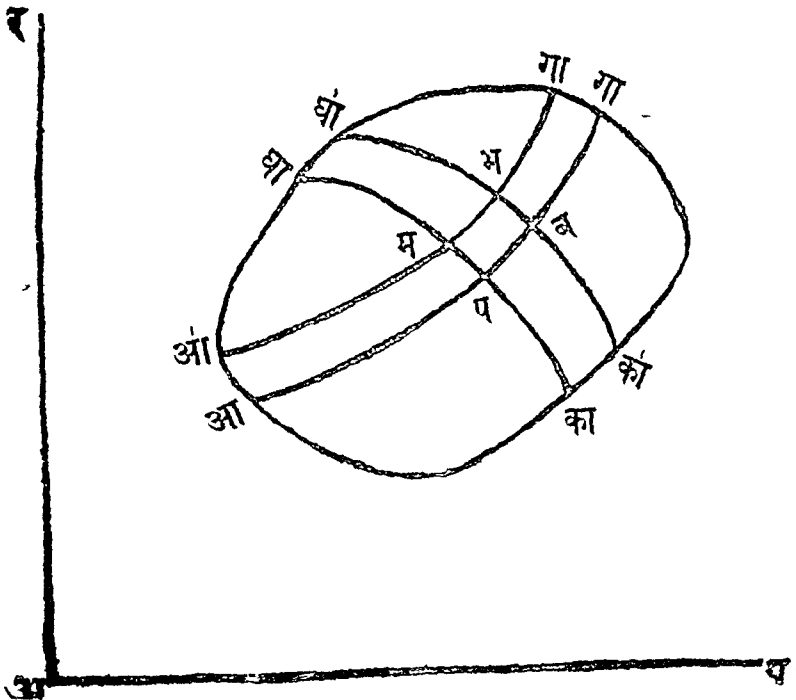
इस लिये बदले हुए द्विगुणचल का रूप

$$\iint \sqrt{\left\{ \text{श्रुज्याप}^2 + \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप,}}\right)^2 + \text{ज्याष} \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2 \right\}} \text{श्रुताप ताप,}$$

ऐसा हुआ ।

यही १५५ वें प्रक्रम में भी लिख आये हैं ।

२५१। इस प्रकार से द्विगुणचल का जो परिवर्तन किया है उसे क्षेत्रीति से भी दिखा सकते हैं ।



कल्पना करो कि \iint शा तार ताप यह एक द्विगुण चल है जिसका मान आकागाधा सीमा के भीतर जितने य, और र हैं उन सबके वश से निकाला गया

है। मानो कि $y = फ_२ (व, श)$, $r = फ. (व, श)$. (१) जहाँ व और श नये चल हैं।

(१) से कल्पना करौ कि

$$व = फ_२(य, र), \quad श = फ_२(य, र) \quad \dots \dots \quad (२)$$

अब इसके पहले समीकरण में यदि व के स्थान में कोई स्थिराङ्क रख दें तो कह सकते हैं कि यह एक कोई वक्र का समीकरण होगा इसलिये नये नये स्थिराङ्को के रखने से इस समीकरण से एक वक्रों की श्रेणी उत्पन्न होगी। मान लो कि व के स्थान में एक स्थिराङ्क को रख देने से आ प व गा वक्र का समीकरण उत्पन्न हुआ। आ प व गा यह ऐसा वक्र हुआ जिसके प्रतिविन्दु पर $फ_२(य, र)$ यह एक स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इसी प्रकार से समझो कि व के स्थान में $व + \Delta$ व के रख देने से दूसरा आ म म गा वक्र हुआ। इसी तरह से (१) में दूसरे समीकरण से समझो कि श से एक वक्र का प म वा और श के स्थान में $श + \Delta$ श के रख देने से दूसरा का व म वा वक्र हुआ। अब मानो कि प विन्दु का भु = य. और कोटि र है जिनके वश से व म म विन्दुओं के भुज कोटि को जानना है।

वक्र के समीकरण से स्पष्ट है कि श के स्थान में $श + \Delta$ श के रख देने से व विन्दु के भुज कोटि होंगे। इसलिये यदि Δ श का मान बहुत ही छोटा माने तो व के भुज कोटि के मान (१) से क्रम से $य + \frac{नाय}{ताय} \Delta$ श, और $र + \frac{तार}{ताय} \Delta$ श होंगे।

इसी तरह व के स्थान में $व + \Delta$ व के रख देने से म के भुज कोटि के मान (१) से और Δ श को बहुत ही छोटा मानने से $य + \frac{नाय}{ताय} \Delta$ व और $र + \frac{तार}{ताय} \Delta$ व होंगे, व के स्थान में $व + \Delta$ व और श के स्थान में $श + \Delta$ श को रख देने से म के भुज कोटि क्रमसे $य + \frac{नाय}{ताय} \Delta$ व + $\frac{नाय}{ताय} \Delta$ श और $र + \frac{तार}{ताय} \Delta$ व + $\frac{तार}{ताय} \Delta$ श के होंगे,। इन चारों विन्दुओं के भुज कोटि के मानों से स्पष्ट होता है कि ये चारों विन्दु एक समानान्तर चतुर्भुज के कोनों पर क्रम से स्थित हैं जो चतुर्भुज अत्यन्त छोटी दशा में वक्र चापीय चतुर्भुज हो जायगा और उसका फल यदि कोणीय भुज कोटि के वश से ले आवो तो

$$\pm \left(\frac{\text{ताय तार}}{\text{ताव ताश}} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताश ताव}} \right) \triangle \text{ श } \triangle \text{ व यह होगा ।}$$

इस लिये $\int \int$ शा तार ताय इसके स्थान में

$$\pm \int \int \text{शा} \left(\frac{\text{ताय तार}}{\text{ताव ताश}} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताश ताव}} \right) \text{ताश ताव ऐसा रख सकते हैं जैसा कि २४९ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण में है ।}$$

इसमें उदाहरण के स्वरूप के वश से जहाँ पर कि सीमाओं को जानते हैं धन ऋण का संशय निकल जायगा ।

यहाँ पर पहले व को स्थिर मान श के वश से जो उचित सीमाओं के भीतर चलानयन किया जायगा वह ऊपर दिखाये हुए अनेक चतुर्भुजों के योग के वश से होगा जिनसे एक आकागाघा धारी बन जायगी फिर उचित सीमाओं के भीतर व के वश से जो चलानयन किया जायगा वह सब धारियों के योग के वश से अर्थात् आकागाघा सीमाओं के वश से होगा । इस प्रकार से आकागाघा सीमाओं पर जो अनेक लम्ब खड़े किये जायँगे उनके भीतर जो घनक्षेत्र का अवयव होगा उसका घनफल आ जायगा यदि ऊपर के द्विगुणचल में शा = ल मान लें ।

२५२। इसी तरह से $\int \int \int$ शा ताल तार ताय इस त्रिगुणचल को तीन नये चल के वश से बदलना हो जहाँ नये चलों का पुराने से सम्बन्ध $य = फ_१(व, श, ह), र = फ_२(व, श, ह), ल = फ_३(व, श, ह) \dots \dots (१)$

इस तरह का होय तो पहले ल के स्थान में ह को रखने के लिये समझ रखो कि जब ताल का साधन करते हैं उस समय य और र को स्थिर मान लेते हैं इस लिये (१) के पहले दो समीकरणों से व की उन्मिति से श का मान य, र और ह के फल रूप में आवेगा फिर विलोम उत्थापन से व का मान भी य, र और ह के कोई फल के रूप में आवेगा । इसलिये ल में इनका उत्थापन देने से ल का मान भी य, र और ह का कोई फल होगा । इसलिये इस फल में य और र को स्थिर मान जो ताल का मान आवेगा उसका स्वरूप ताह के वश से सिद्ध हो जायगा इसलिये ताल के स्थान में ताह को रख सकते हैं । अथवा (१) से चलनकलन के ६७ वे प्रक्रम से ।

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताह}} = ० = \frac{\text{ताफ}_१}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_२}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_३}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताह}} = 0 = \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताह}}$$

यहाँ $\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}}$ और $\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}}$ के उन्मितियों पर से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}$$

$$\begin{aligned} \text{जहाँ ना} &= \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \right) \\ &+ \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} \right) \\ &+ \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} \right) \end{aligned}$$

इस लिये ऊपर के त्रिगुण चल का रूप

$$\iiint \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}} \text{ताह तार ताव ऐसा होगा ।}$$

जहाँ शा₁ ल के स्थान में ल का मान जो य, र और ह के फल रूप में आया है उस का उत्थापन दे देने से शा का मान है । और ल के सीमाओं पर से ह सीमायें भी मालूम हो जायंगी ।

अब ऊपर के त्रिगुणचल में मान लो कि दो वार क्रम बदलने से

$$\iiint \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}} \text{तार ताव ताह इस का मान}$$

जान लिया तो २४९ वे प्रक्रम की युक्ति से ऊपर (१) के प्रथम दो समीकरणों से तार ताव के स्थान में

$$\left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \right) \text{ताव ताश इस को रख सकते हैं ।}$$

इस लिये त्रिगुण चल का रूप बदलने से

$$\iiint \text{शा ताव ताश ताह होगा ।}$$

जहां y, r और l के मान जो v, s और h के फल रूप में आवेंगे उनका शा में उत्पादन देने से शा है ।

२५३ । इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रमों का विशेष बोध होने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं ।

$$(१) \int \int \int \dots f(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n) t_1 y_n t_2 y_{n-1} \dots t_1 y_1$$

इस अनेक गुणचल को एक गुणचल में बदलना है जहां चलो के प्रतिमानों के वश से (जो कि $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2 < 1$ इस नियम से आवेंगे) चलानयन किया गया है ।

यहां २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार क्रिया करने से अन्त में अनेक गुणचल का रूप

$$\int \int \int \dots f(j y_1 \dots) t_1 y_n t_2 y_{n-1} \dots t_1 y_1 \text{ ऐसा होगा ।}$$

$$\text{जहां } j = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)}$$

यहां पर यह जो परिवर्तन किया गया है वह सब चलराशियों का वर्गयोग १ से अधिक नहीं है इस नियम को न तोड़ेगा अर्थात् इस में भी सब की वही सीमा रहेंगी जो कि पहले में थी ।

इस लिये y_1 को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने में और $y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2 < 1 - y_1^2$ मान लेने से २१४ वें प्रक्रम में यदि $d, m, n,$ इत्यादि को १, p, v, s इत्यादि को २ और a, k, x इत्यादि को $\sqrt{1 - y_1^2}$ मान लें तो चलराशियों के सब धन मान में मान

$$\frac{\{ \text{गा}(\frac{3}{2}) \}^{n-1}}{2^{n-1} \text{गा}(\frac{n-1}{2} + 1)} (1 - y_1^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{ यह होगा ।}$$

परन्तु यदि जैसे चलराशियों के मान सब धन लिये गये वैसे ही ऋण लिये जाते तो सब मान ऊपर के मान का 2^{n-1} गुणित होता । इस

लिये सब मान $= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} (1 - y_1^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2} + 1)}$ इस लिये ऊपर के अनेक गुणचल का

मान साधारण चल के रूप में y_1 के -1 और $+1$ मान के भीतर

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2} + 1)} \int_{-1}^{+1} f(j y_1) (1 - y_1^2)^{\frac{n-1}{2}} t_1 y_1 \text{ यह होगा ।}$$

$$(2) \iiint \dots \frac{f(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)}{\sqrt{(1 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2)}} \text{ताय}_n \text{ताय}_{n-1} \dots \text{ताय}_1$$

इसको साधारण चल के रूप में ले आना है । जहाँ $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 < 1$

यहाँ भी २५० वे प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार क्रिया करने से

$$\iiint \dots \frac{f(\text{जय}_1)}{\sqrt{(1 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2)}} \text{ताय}_n \text{ताय}_{n-1} \dots \text{ताय}_1 \text{ऐसा होगा ।}$$

अब यहाँ y_1 को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने से और $y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2 < 1 - y_1^2$ इस नियम से चलराशियों के सब धन मान में २१६ वे प्रक्रम से (जैसा कि द, म, न इत्यादि का मान ऊपर (१) उदाहरण में माना है वैसा ही यहाँ भी मान लेने से)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^{n-1}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2})} \int_0^{1-y_1^2} (1-y_1^2 - \text{च})^{-\frac{1}{2}} \text{च}^{\frac{n-1}{2}} - 1 \text{ताय} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^{n-1}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2})} \frac{\text{गा}(\frac{1}{2}) \text{गा}(\frac{n-1}{2})}{\text{गा}(\frac{n}{2})} (1-y_1^2)^{\frac{n}{2}} - 1 \text{ (२१२ वे प्रक्रम से)} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^n}{\text{गा}(\frac{n}{2})} (1-y_1^2)^{\frac{n}{2}} - 1 \end{aligned}$$

परन्तु यदि चलराशियों के मान ऋण भी लिये जायें तो स्पष्ट है कि ऊपर का मान 2^{n-1} गुणित होगा ।

इसलिये ऊपर के अनेक गुण चल का मान y_1 के -1 और $+1$ मान के भीतर साधारण चल के रूप में

$$\frac{\pi}{\text{गा}(\frac{n}{2})} \int_{-1}^{+1} f(\text{जय}_1) (1-y_1^2)^{\frac{n}{2}} - 1 \text{ताय}_1 \text{ऐसा होगा ।}$$

२५४। बहुत से त्रिकोणमिति फलों के रूप चलराशिकलन के बल से श्रेढी में ला सकते हैं । जैसे यह चाहना है कि

$$f(y) = \text{आ}_1 \text{ज्याय} + \text{आ}_2 \text{ज्या}^2 \text{य} + \text{आ}_3 \text{ज्या}^3 \text{य} + \dots + \text{आ}_n \text{ज्या}^n \text{य} \quad (1)$$

यह समीकरण y के स्थान में ϕ , 2ϕ , 3ϕ , \dots $m\phi$ तक उत्थापन देने तक ठीक रहे जहाँ $\phi = \frac{\pi}{m+n}$ और $\text{आ}_1, \text{आ}_2, \dots, \text{आ}_m$ स्थिराङ्क हैं । तो यहाँ

सब स्थिराङ्कों के मान जानने के लिये नीचे लिखे हुए m समीकरण उत्पन्न होंगे

$$f(y) = \text{आ}_1 \text{ज्या} \phi \text{य} + \text{आ}_2 \text{ज्या} 2\phi \text{य} + \text{आ}_3 \text{ज्या} 3\phi \text{य} + \dots + \text{आ}_m \text{ज्या} m\phi \text{य} ।$$

$$फ(२ष) = आ_१ज्या२ष + आ_२ज्या४ष + आ_३ज्या६ष + \dots + आ_nज्या२मष ।$$

⋮

$$फ(मष) = आ_१ज्यामष + आ_२ज्या२मष + आ_३ज्यामष + \dots + आ_nज्याममष ।$$

इन में पहले को ज्यासष, दूसरे को ज्या२सष, अन्त को ज्यामसष से गुण कर जोड़ देने से दहने पक्ष में आ_n का गुणक

ज्यासष ज्यानष + ज्या२सष ज्या२नष + ⋯ + ज्यामसष ज्यामनष यह होगा । इस गुणक का दूना त्रिकोणमिति से

$$\begin{aligned} &कोज्या (स-न)ष + कोज्या२(स-न)ष + \dots + कोज्याम (स-न)ष \\ &= \{ कोज्या (स+न)ष + कोज्या२ (स+न)ष + \dots + कोज्याम(स+न)ष \} \end{aligned}$$

यह होगा

इसने ऊपर के श्रेढी का योग त्रिकोणमिति से

$$\begin{aligned} &ज्या(२म+१) \frac{(स-न)}{२} ष - ज्या \frac{(स-न)ष}{२} \\ &= \frac{२ ज्या \frac{(स-न)ष}{२}}{२ ज्या \frac{(स-न)ष}{२}} \text{ यह होगा और इसी में न के} \end{aligned}$$

स्थान में -न का उत्थापन दे देने से नीचे के श्रेढी का योग

$$\frac{ज्या \{ (स+न) ष - \frac{(स-न)ष}{२} \} - ज्या \frac{(स+न)ष}{२}}{२ ज्या \frac{(स+न)ष}{२}}$$

यहाँ स्पष्ट है कि यदि स - न यह विषम संख्या होगी तो ऊपर के श्रेढी का योग शून्य होगा और यदि स - न यह सम संख्या होगी तो योग -१ होगा । इसी तरह स + न के विषम संख्या होने से दूसरी का योग शून्य और सम होने से -१ के तुल्य होगा । इस पर से यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि यदि विषम, और सम के वश से जाति का विचार करे तो कह सकते हैं कि यदि न की जाति स से भिन्न हो तो दोनों योग शून्य और एक हो तो -१ होंगे । परन्तु संख्याओं के सिद्धान्त से यदि स - न विषम तो स + न भी विषम होगा और यदि स - न सम तो स + न भी सम होगा इसलिये यदि न, स के समान न हो अर्थात् स से भिन्न हो तो आ_n का गुणक शून्य होगा ।

यदि न = स तो आ_n का गुणक

$$\begin{aligned} & \text{ज्या}^1\text{सप} + \text{ज्या}^2\text{सप} + \dots + \text{ज्या}^m\text{सप} \\ & = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \{ \text{कोज्या}^2\text{सप} + \text{कोज्या}^4\text{सप} + \dots + \text{कोज्या}^{2m}\text{सप} \} \end{aligned}$$

यह होगा जहाँ ऊपर की युक्ति से कोटिज्याओं का योग — १ के बराबर होगा । इसलिये ऐसी दशा में आ_n का गुणक $\frac{m+1}{2}$ यह होगा ।

इसलिये

$$\text{आ}_n = \frac{m+1}{2} \{ \text{ज्या}^1\text{सप फ(प)} + \text{ज्या}^2\text{सप फ(२प)} + \dots + \text{ज्या}^m\text{सप फ(मप)} \}$$

जहाँ स के स्थान में १, २, ... म का उत्थापन देने से आ₁, आ_२, ... आ_m इत्यादि स्थिराङ्कों के मान व्यक्त हो जायेंगे ।

ऊपर अ के मान में यदि म को अनन्त माने तो श्रेणी के द्वारा जो ४० वे प्रक्रम में चल का स्वरूप दिखलाया है उससे

$$\text{आ}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{ज्यानशफ(श)ताश ऐसा होगा और } 0 \text{ और } \pi \text{ के भीतर}$$

अनन्त तुल्यान्तर य के मानों में

फ(य) = आ_१ ज्याय + आ_२ ज्या^२य + आ_३ ज्या^३य + ... इत्यादि यह समीकरण ठीक होगा ।

लाघव से ऊपर के समीकरण को

$$\text{फ(य)} = \frac{2}{\pi} \text{यौ } \int_0^{\pi} \text{ज्यानशफ(श)ताश ऐसा लिखते हैं यहाँ}$$

यौ \int_0^{π} यह दिखलाता है कि न के स्थान में क्रम से

१, २, ... ∞ का उत्थापन देने से जितने मान होंगे उनका योग कर दिया गया है । इस सिद्धान्त को ल्यागरेञ्ज (Lagrange) ने निकाला है । इसके विषय पर प्वाइसन (Poisson) का विशेष दिखलाते हैं ।

२५५। २३३ वे प्रक्रम से विदित है कि

$$\frac{1 - \text{च}^2}{1 - २ \text{च कोज्या} \frac{\pi(\text{अ}-\text{य})}{\text{द}} + \text{च}^2} = १ + २\text{चकोज्या} \frac{\pi(\text{अ}-\text{य})}{\text{द}}$$

$$+ २\text{च}^2\text{कोज्या} \frac{2\pi(\text{अ}-\text{य})}{\text{द}} + २\text{च}^3\text{कोज्या} \frac{3\pi(\text{अ}-\text{य})}{\text{द}} + \dots \quad (१)$$

जहाँ च, १ से न्यून है इसलिये श्रेणी का मान सान्त होगा ।

(१) के दोनों पक्षों को फ(श) ताश से गुण कर श के वश से चलानयन करो—द, द सीमाओं के भीतर और च को शून्य के समान मान लो तो बायें

पक्ष का अंश शून्य होगा इसलिये यदि इसका हर शून्य न हो तो श्रेढी द्वारा चलानयन की जो विधि है उससे स्पष्ट है कि, बायें पक्ष के चल का मान शून्य होगा परन्तु यदि य का मान—द, और द के भीतर हो तो चलानयन के बीच में हर में च कोज्या $\frac{\pi(\lambda-y)}{d}$ जो यह भाग है उसका मान १ के बराबर होगा इसलिये ऐसी स्थिति में हर का मान $(1-\text{च})^2$ यह होगा तब यह नहीं कह सकते कि बायें पक्ष का चल शून्य होगा । ऐसी दशा में इसका मान जानने के लिये कल्पना करो कि $\lambda - y = l$ और $\text{च} = 1 - \epsilon_1$

$$\text{तो } \int \frac{(1-\text{च}^2)फ(\lambda)ताश}{1-2\text{चकोज्या}\frac{\pi(\lambda-y)}{d}+\text{च}^2} = \int \frac{\epsilon_1(1+\text{च})फ(y+l)ताल}{\epsilon_1^2+\epsilon_1\text{चकोज्या}^2\frac{\pi l}{2d}}$$

इसमें निश्चय है कि $\lambda - y$ इसका मान धन वा ऋण जब बहुत ही छोटा होगा उसी समय के मान का तो विचार ही कर रहे हैं इसलिये ज्या चाप का भेद न मानने से और $फ(y+l) = फ(y)$ कल्पना करने से

$$\int \frac{\epsilon_1(1+\text{च})फ(y+l)ताल}{\epsilon_1^2+\epsilon_1\text{चकोज्या}^2\frac{\pi l}{2d}} = \epsilon_1(1+\text{च})फ(y) \int \frac{ताल}{\epsilon_1^2+\frac{\text{च}\pi^2 l^2}{d^2}}$$

$$= 2 \epsilon_1 फ(y) \int \frac{ताल}{\epsilon_1^2+\frac{\pi^2 l^2}{d^2}} = \frac{2dफ(y)}{\pi} \text{स्प}^{-1} \frac{\pi l}{\epsilon_1 d}$$

इसमें मानो कि l की सीमा a_1 , और $-k_1$ है तो मान

$$\frac{2dफ(y)}{\pi} \left\{ \text{स्प}^{-1} \frac{\pi a_1}{\epsilon_1 d} + \text{स्प}^{-1} \frac{\pi k_1}{\epsilon_1 d} \right\} \text{ऐसा होगा ।}$$

इसमें ϵ_1 को शून्य मान लेने से

$$2dफ(y) \text{ऐसा होगा । इसलिये यदि } y, -d \text{ और } d \text{ के भीतर हो तो } फ(y) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d फ(\lambda)ताश + \frac{1}{d} \text{यौ } \int_{-d}^{\infty} फ(\lambda) \text{कोज्या } \frac{\pi(\lambda-y)}{d} \text{ताश} \dots \dots (2)$$

यदि $y = d$ वा $-d$ तो बायें पक्ष के चल का मान जब λ, d और $-d$ के बहुत ही पास होगा $\lambda - y = l$ $\frac{2dफ(y)}{\pi} \text{स्प}^{-1} \frac{\pi l}{\epsilon_1 d}$ इन दोनों समीकरणों से क्रम से $d \{ फ(d) + फ(-d) \}$ यह होगा क्योंकि जब $y = d$ और $\lambda = d$ तब $\lambda - y = l$ यह समीकरण दिखलाता है कि l का मान केवल $-k_1$ से 0 तक

पहुँचेगा और जब $x = -d$ और $y = -d$ तब l का मान केवल 0 से अ, तक होगा। इसलिये ऐसे समय में (2) का बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} \{ f(d) + f(-d) \}$ यह होगा।

इस प्रकार से $d, -d$ के बीच वा $d, -d$ के तुल्य y के मान में दहने पक्ष का मान निश्चित हो जाता है।

२५६। २५५ वें प्रक्रम की युक्ति से यदि 0 और d के बीच x के मान में सान्तचलानयन करो तो

$$f(y) = \frac{1}{2d} \int_0^d f(x) \text{ताश} + \frac{1}{d} \text{यौ } \int_0^{\infty} f(x) \text{कोज्या } \frac{n\pi(x-y)}{d} \text{ताश} \dots (1)$$

यह समीकरण 0 और d के बीच कोई y के मान में सत्य होगा परन्तु यदि $y = 0$ तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(0)$ और जब $y = d$ तो बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(d)$ होगा।

इसी तरह

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^d f(x) \text{ताश} + \frac{1}{d} \text{यौ } \int_0^{\infty} f(x) \text{कोज्या } \frac{n\pi(x+y)}{d} \text{ताश}, \dots (2)$$

यह 0 और d के बीच चाहे जो y का मान मानो समीकरण सत्य होगा। परन्तु जब $y = 0$ तो बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(0)$ के तुल्य और जब $y = d$ तो बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(d)$ के तुल्य होगा।

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$f(y) = y \frac{1}{d} \int_0^d f(x) \text{ताश} + \frac{2}{d} \text{यौ } \int_0^{\infty} \text{कोज्या } \frac{n\pi y}{d} \int_0^d \text{कोज्या } \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ताश} \dots (3)$$

यह y का मान चाहे 0 और d के तुल्य हो वा इनके बीच में हो सर्वत्र सत्य रहेगा।

(१) और (२) के अन्तर से

$$f(y) = \frac{2}{d} \text{यौ } \int_0^{\infty} \text{ज्या } \frac{n\pi y}{d} \int_0^d \text{ज्या } \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ताश} \dots (4)$$

यह y का मान यदि 0 और d के बीच में हो तब सत्य होगा और जब $y = 0$ और $y = d$ तो बायाँ पक्ष अवश्य शून्य के समान होगा। यदि देखो तो (४) समीकरण ठीक ठीक ल्याग्रांज के सिद्धान्त से मिल जाता है।

थोड़ा सा परिवर्तन कर देने से (३) से (४) और (४) से (३) समीकरण उत्पन्न हो जाता है ।

जैसे यदि (३) में $f(y)$ के स्थान में यदि ज्या $\frac{\pi y}{d}$ $f(y)$ रख दो तो

$$\text{ज्या } \frac{\pi y}{d} f(y) = \frac{1}{d} \int_0^d \text{ज्या } \frac{\pi z}{d} f(z) \text{ ताश}$$

$$+ \frac{2}{d} \text{ यौ } \infty \text{ कोज्या } \frac{n\pi y}{d} \int_0^d \text{कोज्या } \frac{n\pi z}{d} \text{ ज्या } \frac{\pi z}{d} f(z) \text{ ताश}$$

इसमें कोज्या $\frac{n\pi z}{d}$ ज्या $\frac{\pi z}{d}$ के स्थान में इसका जो दूसरा

$$\frac{1}{d} \text{ ज्या } \frac{(n+1)\pi z}{d} - \frac{1}{d} \text{ ज्या } \frac{(n-1)\pi z}{d} \text{ यह रूपान्तर है इसे रख}$$

देने से ज्या $\frac{\pi y}{d} f(y)$

$$= \frac{1}{d} \text{ यौ } \infty \left\{ \text{कोज्या } \frac{(n-1)\pi y}{d} - \text{कोज्या } \frac{(n+1)\pi y}{d} \right\} \int_0^d \text{ज्या } \frac{n\pi z}{d} f(z) \text{ ताश}$$

ऐसा होजायगा । इसमें { } इसके अन्तर्गत दोनो खण्डों का त्रिकोण-

मिति से २ज्या $\frac{n\pi y}{d}$ ज्या $\frac{\pi y}{d}$ ऐसा रूपान्तर कर दोनो पक्षों में ज्या $\frac{\pi y}{d}$ का भाग

दे देने से (४) उत्पन्न हो जायगा । और ऊपर जो क्रिया दिखलाया है उसके विपरीत से (४) से (३) यह उत्पन्न हो जायगा ।

२५७। इन ऊपर दिखलाये हुए समीकरण रूपी सिद्धान्तों की व्याप्ति दिखलाने के लिये इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) य को जीवा की श्रेढी में ले आना है ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण ग्रहण करो और मान लो कि $d = \pi$ तो

यहाँ $f(y) = y$ इसलिये $f(z) = z$

$$\text{इसलिये } \int_0^d \text{ज्या } \frac{n\pi z}{d} f(z) \text{ ताश} = \int_0^{\pi} z \text{ज्या } n z \text{ ताश}$$

■ $\frac{\pi}{n}$ यदि विषम और $-\frac{\pi}{n}$ यदि न सम इसलिये

$$y = 2 \left\{ \text{ज्या } y - \frac{1}{3} \text{ ज्या } 3y + \frac{1}{5} \text{ ज्या } 5y - \frac{1}{7} \text{ ज्या } 7y + \dots \right\}$$

यह y के 0 और π के बीच के मानों में सत्य है और यह भी देख पड़ता है कि यदि $y = 0$ तब भी ठीक है और ऋण मान में भी देखने से स्पष्ट है कि ठीक है इसलिये $-\pi, \pi$ के बीच में $-\pi, \pi$ को छोड़ और सब मानों में समीकरण ठीक हुआ ।

(२) कोज्याय को ज्या की श्रेढी में ले आना है । यहाँ भी २५६ का (४) समीकरण लेने से $f(y) = \text{कोज्याय}$ इसलिये $f(\pi) = \text{कोज्याश}$ इसलिये यदि $d = \pi$ तो

$$\begin{aligned} \int \text{ज्या} \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ ताश} &= \int \text{कोज्याश ज्यानश ताश} \\ &= \frac{1}{2} \int \{ \text{ज्या}(n+1) \text{श} + \text{ज्या}(n-1) \text{श} \} \text{ ताश} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{कोज्या}(n+1)\text{श}}{n+1} + \frac{\text{कोज्या}(n-1)\text{श}}{n-1} \right\} \\ \text{इसलिये} \int_0^{\pi} \text{कोज्याश ज्यानश ताश} &= 0 \text{ यदि } n \text{ विषम हो} \end{aligned}$$

$$\text{और} = \frac{2n}{n^2-1} \text{ यदि सम ।}$$

इसलिये

$$\text{कोज्याय} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{4\text{ज्या}2\text{य}}{2^2-1} + \frac{4\text{ज्या}4\text{य}}{4^2-1} + \dots + \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} n\text{ज्यानय} + \dots \right\}$$

यह 0 और π के बीच, 0 और π को छोड़ और y के सब मानों में सत्य है ।

(३) (ग) स्थिराङ्क को चाहते हैं कि y की ज्या श्रेढी में ले आवें ।

यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से और $f(y) = g$, और $d = \pi$ मान लेने से $\int_0^{\pi} g \text{ ज्यानश ताश} = g \int_0^{\pi} \text{ज्यानश ताश} = \frac{2g}{n}$ यदि n

विषम, $= 0$, यदि n सम हो तो

इसलिये

$$g = \frac{4g}{\pi} \left\{ \text{ज्याय} + \frac{1}{3} \text{ज्या}3\text{य} + \frac{1}{5} \text{ज्या}5\text{य} + \dots \right\}$$

$\frac{4g}{\pi}$ का भाग दे देने से

$$\frac{\pi}{4} = \text{ज्याय} + \frac{1}{3} \text{ज्या}3\text{य} + \frac{1}{5} \text{ज्या}5\text{य} + \dots$$

यह ० और π के बीच ० और π को छोड़ और π के सब मानों में ठीक होगा । इसी में यदि y के स्थान में $\frac{\pi}{2} - r$ रख लें तो

$$\frac{\pi}{2} = \text{कोज्या } r - \frac{1}{3} \text{ कोज्या } 3r + \frac{1}{5} \text{ कोज्या } 5r - \frac{1}{7} \text{ कोज्या } 7r + \dots$$

यह r के $-\frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2}$ के बीच $-\frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2}$ को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा ।

(४) y को इसकी कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण ग्रहण करो और $d = \pi$ मान लो तो

$$\int \text{शकोज्यानशताश} = \frac{\text{शज्यानश}}{n} + \frac{\text{कोज्यानश}}{n^2}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\pi} \text{शकोज्यानशताश} = -\frac{2}{n^2} \text{ यदि } n, \text{ विषम हो ।}$$

$$\text{और } = 0 \text{ यदि } n, \text{ सम हो ।}$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \text{शताश} = \frac{\pi^2}{2} \text{ इसलिये}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\pi} \left\{ \text{कोज्या } x + \frac{1}{3^2} \text{कोज्या } 3x + \frac{1}{5^2} \text{कोज्या } 5x + \dots \right\}$$

यह y के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी सत्य होगा ।

यदि यहाँ $y = \frac{\pi}{2} - r$ तो r के $-\frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2}$ मान में और इनके बीच के

मान में भी $r = \frac{x}{\pi} (\text{ज्या } x - \frac{1}{3^2} \text{ज्या } 3x + \frac{1}{5^2} \text{ज्या } 5x \dots)$ यह ठीक रहेगा ।

(५) $e^{अय}$ इसको ज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से y के ० और π को छोड़ इनके बीच के मान में

$$e^{अय} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^2 + n^2} (1 - \text{कोज्यान } \pi \times e^{अ\pi}) \text{ ज्यानय}$$

{ १० वे प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण देखो }

(६) $e^{अय}$ को कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$e^{अय} = + \frac{e^{अ\pi} - 1}{अ\pi} \frac{2अ}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{कोज्यान } \pi \times e^{अ\pi} - 1}{a^2 + n^2} \text{ कोज्यानय}$$

यह y के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी ठीक होगा ।

(७) ज्याअय को ज्या की श्रेढी में ले आवो । जहाँ $a < 1$ है
यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\text{ज्याअय} = \frac{a}{\pi} \text{ज्याअ}\pi \left\{ \frac{\text{ज्याय}}{1^2 - a^2} - \frac{2\text{ज्या२य}}{2^2 - a^2} + \frac{3\text{ज्या३य}}{3^2 - a^2} - \frac{4\text{ज्या४य}}{4^2 - a^2} + \dots \right\}$$

यह य के ० और ० और π के बीच π को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा ।

(८) कोज्याअय को कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो । जहाँ $a < 1$ यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\text{कोज्याअय} = \frac{a}{\pi} \text{ज्याअ}\pi \left\{ \frac{1}{2a} - \frac{\text{अकोज्याय}}{a^2 - 1} + \frac{\text{अकोज्या२य}}{a^2 - 2^2} - \dots \right\}$$

यह य के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी ठीक होगा ।

(९) $e^{अय} - e^{-अय}$ इस को ज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} (e^{अश} - e^{-अश}) \text{ज्यानशताश} = - \frac{n (e^{अ\pi} - e^{-अ\pi})}{a^2 + n^2} \text{कोज्यान}\pi$$

इसलिये

$$\begin{aligned} & e^{अय} - e^{-अय} \\ &= \frac{a}{\pi} (e^{अ\pi} - e^{-अ\pi}) \left(\frac{\text{ज्याय}}{1^2 + a^2} - \frac{2\text{ज्या२य}}{2^2 + a^2} + \frac{3\text{ज्या३य}}{3^2 + a^2} - \dots \right) \end{aligned}$$

(१०) $e^{अ(\pi-y)} + e^{-अ(\pi-y)}$ इसको कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो ।
यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} \left\{ e^{अ(\pi-श)} + e^{-अ(\pi-श)} \right\} \text{कोज्यानशताश} = \frac{अ(e^{अ\pi} - e^{-अ\pi})}{a^2 + n^2}$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \left\{ e^{अ(\pi-श)} + e^{-अ(\pi-श)} \right\} \text{ताश} = \frac{e^{अ\pi} - e^{-अ\pi}}{अ}$$

$$\text{इसलिये } \frac{e^{अ(\pi-y)} + e^{-अ(\pi-y)}}{e^{अ\pi} - e^{-अ\pi}} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\text{कोज्याय}}{1^2 + a^2} + \frac{\text{कोज्या२य}}{2^2 + a^2} + \dots$$

इस प्रकार से हज़ारों उदाहरण सहज में सिद्ध हो जाते हैं ।

इन के चलानयन से और भी नये नये चमत्कार उत्पन्न होते चले जाते हैं ।

जैसे (२) उदाहरण में जो कोटिज्या का मान ज्या की श्रेणी में आया है उस का यदि ताय से गुण कर चलानयन करो तो ।

$$\frac{r}{r} \text{ ज्याय} = \text{स्थिर} - \frac{\text{कोज्या}^2 \text{य}}{१.३} - \frac{\text{कोज्या}^4 \text{य}}{३.५} - \frac{\text{कोज्या}^6 \text{य}}{५.७} - \dots$$

इसमें यदि $y = 0$ तो

$$\text{स्थिर} = \frac{१}{१.३} + \frac{१}{३.५} + \frac{१}{५.७} + \dots = \frac{१}{२}$$

(चलनकलन के २०वें अध्याय के ४४वें “अभ्यासार्थ” प्रश्न में $n = \infty$ मान

$\frac{१}{१.३}$ जोड़ देने से ।

२५८। यदि २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण में, जो कि y के ० और d और इन के बीच के सब मान में सत्य है, यदि y का मान d से पार हो तब देखना चाहिये कि दहने पक्ष किस के तुल्य होता है। मानो कि y का मान d और $२d$ के बीच में है और धन है तो यदि $y = २d - y'$ ऐसा माने जहां y' , d से न्यून है तो

$$\text{कोज्या} \frac{\text{नाय}}{d} = \text{कोज्या} \left(२n\pi - \frac{\text{नाय}'}{d} \right) = \text{कोज्या} \frac{\text{नाय}'}{d}$$

इस लिये इस स्थिति में दहने पक्ष का मान $f(y')$ होगा ।

फिर मानो कि y , $२d$ से बड़ा है और $२md + y'$ इस के तुल्य है जहां y' , $२d$ से अल्प है तो

$$\text{कोज्या} \frac{\text{नाय}}{d} = \text{कोज्या} \frac{\text{नाय}'}{d}$$

अर्थात् दहने पक्ष का वही मान हुआ जो कि y के स्थान में y' के रख देने से होता है इस लिये यदि $y' < d$ तो दहने पक्ष का मान $f(y')$ होगा और यदि $y' > d < २d$ तो दहने पक्ष का $f(२d - y')$ यह मान होगा । इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हो कि y के ऋण मान में भी वही मान होगा जो कि धनमान में होता है ।

इसी तरह यदि y धन और $२md + y'$ इस के तुल्य हो तो २५६ प्रक्रम के (४) समीकरण का मान $f(y')$ होगा यदि $y' < d$ और यदि $y' > d$ तो दहने पक्ष का मान $-f(२d - y')$ यह होगा । और y के ऋण मान में वही मान आवेंगे जो कि y के धनमान में आते हैं केवल धन ऋण चिह्न बदल जायगा ।

२५९। २५६ प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण में यह कुछ आवश्यकता नहीं कि य का मान ० और द के बीच में लगातार हो किन्तु ० और अ के बीच के य के मान में $f_1(y) = f_2(y)$, अ और क के बीच में य के मान में $f_1(y) = f_2(y)$, और क और ग के बीच में य के मान में $f_1(y) = f_2(y)$, इसी तरह अन्त में ग और द के बीच में य के मान में $f_1(y) = f_2(y)$ ऐसा मान ले तौ भी समीकरण सत्य रहेगा केवल जब $y = ०$ वा अ, वा क, वा ग तब व्यभिचरित होगा उस समय २५६ वे प्रक्रम की युक्ति से वास्तव में दहने पक्ष का क्या रूप होगा इसका ज्ञान सहज में हो जायगा। जैसे २५६ वे प्रक्रम के (३) समीकरण का दहना पक्ष जब $y = अ$ तब $\frac{१}{३} \{ f_1(अ) + f_2(अ) \}$ यह होगा।

इस लिये यदि $y = अ$ तब $f_1(y) = f_2(y)$ तो (३) समीकरण जब $y = अ$ तब भी सत्य ठहरेगा।

२६०। ज्या और कोटिज्या के रूप में एक श्रेढी ऐसी बनानी है जिसका योग ग तुल्य हो य के ० और अ के बीच के मानों में और वही योग शून्य के तुल्य हो य के अ और द के बीच के मानों में।

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$f(y) = ग$, इस लिये $f(श) = ग$, श के ० और अ के बीच के मानों में और फिर उसके बाद श के अ और द के बीच के मानों में $f(श) = ० = f(y)$
इस लिये

$$\int_0^द कोज्या \frac{नगश}{द} f(श) ताश यह$$

$$ग \int_0^अ कोज्या \frac{नगश}{द} ताश = \frac{गद}{नग} ज्या \frac{नगअ}{द} ऐसा होगा।$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{गअ}{द} + \frac{२ग}{न} \left\{ ज्या \frac{नगअ}{द} कोज्या \frac{नगय}{द} + \frac{१}{३} ज्या \frac{२नअ}{द} कोज्या \frac{२नय}{द} + \frac{१}{३} ज्या \frac{३नअ}{द} कोज्या \frac{३नय}{द} + \dots \right\}$$

इस में जब $y = अ$ तब इसका मान ३ होगा।

अथवा इसी जगह २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$ग \int_0^{\alpha} ज्या \frac{n\pi}{d} ताश = \frac{गद}{n\pi} \left(1 - कोज्या \frac{n\pi}{d} \right)$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{2ग}{\pi} \left\{ उ ज्या \frac{\pi\alpha}{d} ज्या \frac{\pi\gamma}{d} + \frac{1}{3} उ ज्या \frac{2\pi\alpha}{d} ज्या \frac{2\pi\gamma}{d} + \frac{1}{5} उ ज्या \frac{3\pi\alpha}{d} ज्या \frac{3\pi\gamma}{d} + \dots \right\} यह होगी$$

यहां जब $y = 0$ तब यह श्रेढी भी शून्य और जब $y = \alpha$ तब श्रेढी का मान $\frac{\pi}{2}$ होगा ।

२६१। एक श्रेढी कोटिज्या के रूप में ऐसी बनावो जिसका योग ज y हो y के 0 और $\frac{d}{2}$ के बीच के मान में और जब y , $\frac{d}{2}$ और d के बीच में हो तो वही योग ज $(d - y)$ के तुल्य हो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ।

$$\begin{aligned} & \int_0^d फ(श) कोज्या \frac{n\pi\alpha}{d} ताश \\ &= \int_0^{\frac{d}{2}} ज श कोज्या \frac{n\pi\alpha}{d} ताश + \int_{\frac{d}{2}}^d ज(d-श) कोज्या \left(\frac{n\pi\alpha}{d} \right) ताश \\ &= \frac{जद^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2n} ज्या \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2} कोज्या \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{\pi n^2} \right\} + \frac{जद^2}{n\pi} \left(ज्या n\pi - ज्या \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \frac{जद^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{n} ज्या n\pi - \frac{1}{2n} ज्या \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{\pi n^2} कोज्या n\pi - \frac{कोज्या n\pi}{\pi n^2} \right\} \\ &= \frac{जद^2}{\pi^2 n^2} \left\{ 2 कोज्या \frac{n\pi}{2} - कोज्या n\pi - 1 \right\} \end{aligned}$$

यहि यदि $n = 2m + 2$ ऐसा होगा तो $-\frac{4जद^2}{\pi^2 n^2}$ इसके तुल्य होगा और सर्वत्र शून्य के तुल्य होगा । और

$$\int_0^d फ(श) ताश = ज \int_0^{\frac{d}{2}} शताश + ज \int_{\frac{d}{2}}^d (d-श)ताश = \frac{जद^2}{4}$$

इसलिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{जद}{4} - \frac{जद}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2^2} कोज्या \frac{2\pi\gamma}{d} + \frac{1}{4^2} कोज्या \frac{4\pi\gamma}{d} + \frac{1}{6^2} कोज्या \frac{6\pi\gamma}{d} + \dots \right\}$$

इस श्रेणी का मान यदि र रख ले तो य के ० और $\frac{\pi}{2}$ मान और इनके बीच के मानों में भी र = ज य और य के $\frac{\pi}{2}$ और द और इनके बीच के मानों में भी र = ज(द-य) यह होगा । यदि य का मान द से बड़ा हो तो २५८ वें प्रक्रम से र का मान फिर फिर यही आवेगा क्योंकि २५८ वे प्रक्रम से यदि य = २ द—य जहाँ य, द से छोटा है तो दहना पक्ष फ(य) के अर्थात् जहाँ य, द से छोटा है वहाँ जो र का मान है वही यहाँ पर भी हुआ । इस तरह से २५६ वें प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण से हजारों प्रकार के नये सिद्धान्त बना सकते हो ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। सिद्ध करो कि य के $-\pi$ और π और इनके बीच के मानों में

$$\frac{य^३}{४} = \frac{\pi^३}{१२} - \text{कोज्याय} + \frac{\text{कोज्या २य}}{२^३} - \frac{\text{कोज्या ३य}}{३^३} +$$

२। (१) प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\frac{य^३}{१२} - \frac{\pi^३य}{१२} = -\text{ज्याय} + \frac{\text{ज्या २य}}{२^३} - \frac{\text{ज्या ३य}}{३^३} + \dots$$

३। सिद्ध करो कि यदि एक श्रेणी ऐसी बनाई जाय जो य के ० और अ के बीच के मानों में शून्य, य के अ और $\pi - अ$ के बीच के मानों में अ, और फिर य के $\pi - अ$ और π के बीच के मानों में $\pi - य$ के तुल्य हो तो

$$\frac{४}{\pi} \left\{ \text{ज्याअ ज्याय} + \frac{१}{३} \text{ज्या३अज्या३य} + \frac{१}{५} \text{ज्या ५अ ज्या ५ य} + \dots \right\}$$

२६२। जिस समीकरण में

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}, \frac{\text{तार}^३}{\text{ताय}^३}, \dots, \frac{\text{तार}^न}{\text{ताय}^न} \text{ क्रम से रहते हैं ।}$$

उन्हे क्रम से एक घात, प्रथम सम्बन्ध, द्वितीय सम्बन्ध, तृतीय सम्बन्ध, ... न सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं । एक घात को प्रत्येक सम्बन्ध के साथ मिलाना चाहिये । इसी प्रकार जिसमें $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^२, \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^३, \dots, \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^न$ ये हों उन्हे एक घात प्रथम सम्बन्ध, द्वितीयघात प्रथम सम्बन्ध, तृतीयघात प्रथम सम्बन्ध, न घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं । और $\left[\frac{\text{तार}^न}{\text{ताय}^न}\right]^न$ यह जिसमें हो उसे न घात म सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं ।

२६३। यदि एक घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण का रूप

मा + ना $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$ ऐसा हो जहाँ मा और ना, य और र के फल

हों और फलों में य और र के घात संख्याओं का योग प्रत्येक

पद में एक ही हों तो कल्पना करो कि $r = yL \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = L + y \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ ।

समीकरण में ना का भाग दे दो तो

$$\frac{\text{मा}}{\text{ना}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 \text{ वा } \frac{\text{मा}}{\text{ना}} + L + y \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = 0$$

परन्तु $\frac{\text{मा}}{\text{ना}}$, $\frac{r}{y}$ वा L का कोई फल है इसलिये कल्पना करो कि

$$\frac{\text{मा}}{\text{ना}} = f(L) \text{ इसलिये य } \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = - \{ L + f(L) \}$$

$$\therefore \frac{\text{ताय}}{y \text{ ताल}} = - \frac{1}{L + f(L)} \therefore \text{ला } \left(\frac{y}{n} \right) = - \int \frac{\text{ताल}}{L + f(L)}, \text{ जहाँ}$$

ग कोई स्थिराङ्क है ।

अपने सुभीते के लिये जहाँ कहीं लाघव जान पड़े तहाँ $y = rL$ ऐसा मान कर भी ऊपर की क्रिया कर सकते हो ।

(१) उदाहरण

$$\text{कल्पना करो कि } y + r = (y - r) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{यहाँ } r = yL \text{ मान लो तो } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = L + y \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore L + y \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{y + r}{y - r} = \frac{1 + L}{1 - L} \therefore y \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{1 + L^2}{1 - L}$$

$$\therefore \frac{\text{ताय}}{y \text{ ताल}} = \frac{1 - L}{1 + L^2} = \frac{1}{1 + L^2} - \frac{L}{1 + L^2}$$

$$\text{इसलिये ला } \left(\frac{y}{n} \right) = \text{स्प}^{-1} L - \frac{1}{2} \text{ला } (1 + L^2)$$

$$\text{वा ला } \left\{ \frac{y}{n} (1 + L^2)^{\frac{1}{2}} \right\} = \text{ला } \frac{\sqrt{(y^2 + r^2)}}{n} = \text{स्प}^{-1} \frac{r}{y}$$

(२) एक ऐसा वक्र बताओ जिसके भुज कोटि का योग उसके अवान्तर स्पर्श-रेखा के समान हो ।

$$\text{यहाँ चलनकलन से अवान्तर स्पर्श रेखा} = r \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = y + r, \text{ और } y = rL,$$

$$\text{मान लो } \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \text{ल} + \text{र} \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{य} + \text{र}}{\text{र}} = \text{ल} + १$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{रताल}} = १ \therefore \text{ला} \left(\frac{\text{र}}{\text{ग}} \right) = \text{ल} = \frac{\text{य}}{\text{र}}$$

२६४। $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार} = \text{वा}$ (१) इसमें र का मान जानना है जहाँ पा और वा य के कोई फल है ।

$$\begin{aligned} \text{देखो } \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left(\text{र इ}^{\int \text{पाताय}} \right) &= \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{इ}^{\int \text{पाताय}} + \text{पार इ}^{\int \text{पाताय}} \\ &= \text{इ}^{\int \text{पाताय}} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार} \right) \end{aligned}$$

इसलिये (१) को इ^{∫पाताय} से गुण देने से

$$\text{इ}^{\int \text{पाताय}} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार} \right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left(\text{र इ}^{\int \text{पाताय}} \right) = \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}}$$

इसलिये चलानयन से

$$\text{र इ}^{\int \text{पाताय}} = \text{स्थि} + \int \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}} \text{ताय}$$

$$\text{और र} = \text{स्थि इ}^{-\int \text{पाताय}} + \text{इ}^{-\int \text{पाताय}} \int \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}} \text{ताय}$$

$$(१) \text{ उदा० } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{र} = \text{अय}^३,$$

$$\text{यहाँ पा} = १, \int \text{पाताय} = \text{य} \quad \text{इ}^{\int \text{पाताय}} = \text{इ}^{\text{य}} \text{ और वा} = \text{अय}^३$$

$$\text{र} = \text{स्थि इ}^{-\text{य}} + \text{इ}^{-\text{य}} \int \text{अय}^३ \text{इ}^{\text{य}} \text{ताय}$$

$$= \text{स्थि इ}^{-\text{य}} + \text{इ}^{-\text{य}} \text{अ} \left\{ \text{य}^३ \text{इ}^{\text{य}} - ३ \int \text{य}^३ \text{इ}^{\text{य}} \text{ताय} \right\}$$

$$= \text{स्थि इ}^{-\text{य}} + \text{अ} (\text{य}^३ - ३\text{य}^२ + ६\text{य} - ६)$$

$$(२) \text{ उदा० } (१ + \text{य}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{रय} = \text{अ}, \text{ वा } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \frac{\text{य}}{१ + \text{य}^२} \text{ र} = \frac{\text{अ}}{१ + \text{य}^२}$$

$$\text{यहाँ पा} = -\frac{\text{य}}{१ + \text{य}^२}, \int \text{पाताय} = \text{ला} \frac{१}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}} \text{ और इ}^{\int \text{पाताय}} = \frac{१}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}}$$

$$\therefore \text{र} \frac{१}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}} = \text{अ} \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}} \times \frac{१}{१ + \text{य}^२} = \text{अ} \int \frac{\text{ताय}}{(१ + \text{य}^२)^{३/२}}$$

$$= \frac{\text{अय}}{\sqrt{(१+य)}} + \text{स्थि}$$

इसलिये $r = \text{अय} + \text{स्थि} \sqrt{(१+य)}$

२६५। यदि $r^{m-n} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}^m = \text{वा } r^n$ ऐसा समीकरण हो तो दोनों

पक्षों में r^n का भाग देकर $r^{m-n} = (m-n)$ ल मान लो तो

$$r^{m-n} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}^{m-n} = \text{वा}$$

$$\text{और } r^{m-n} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + (m-n) \text{ पाल} = \text{वा}$$

यह अब ठीक २६४ वें प्रक्रम के समीकरण ऐसा हो गया ।

$$(१) \text{ उदा० श } \frac{\text{ताश}}{\text{ताचा}} - \frac{\text{चश}^२}{\text{चा}} = - \frac{म}{\text{चा}^२}$$

$$\text{यहाँ मान लो कि } \text{श}^२ = २ल \therefore \text{श } \frac{\text{ताश}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}$$

$$\therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} - \frac{२चल}{\text{चा}} = - \frac{म}{\text{चा}^२}$$

$$\text{अब इस में पा} = - \frac{२च}{\text{चा}} \therefore \int \text{पाताचा} = - २ \text{चलाचा} = \text{ला } \frac{१}{\text{चा}^{२च}}$$

$$\therefore \int \text{पाताचा} = \frac{१}{\text{चा}^{२च}} \therefore \text{ल चा}^{-२च} = - म \int \text{चा}^{-(२च+२)} \text{ताचा}$$

$$= \text{स्थि} + \frac{\text{मचा}^{-(२च+१)}}{२च+१} \therefore \text{ल} = \frac{\text{श}^२}{२} = \text{स्थि चा}^{२च} + \frac{म}{(२च+१)\text{चा}}$$

(२) उदा० $\text{यर}^२ \text{तार} + \text{र}^३ \text{ताय} = \frac{\text{अताय}}{\text{य}}$, यहाँ भी

ऊपर की क्रिया करने से

$$r^३ = \frac{३अ}{२य} + \frac{\text{स्थि}}{\text{य}^३}$$

२६६। मा ताय + ना तार = ० यह समीकरण $\int \text{फ (यर)} = \text{ग}$ इसका तात्कालिक चलन सर्वदा नहीं हो सकता क्योंकि सम्भव है कि $\int \text{फ (यर)}$ इसके तात्कालिक चलन में जो कि शून्य के तुल्य होगा किसी गुणक का अप-

वर्तन दे दिया गया हो अथवा कोई स्थिराङ्क का लोप हो गया हो मूल समीकरण के वश से । परन्तु जिस स्थान में इसका पूरा रूप हो अर्थात् गुणक का अपवर्तन न दिया गया हो वा स्थिराङ्क का लोप मूल समीकरण के वश से न किया गया हो तो चलनकलन की युक्ति से $\frac{तास}{ताय तार} = \frac{तास}{तार ताय}$ इस नियम से र का मान जान सकते हो क्योंकि यहाँ

मा = $\frac{ताम}{ताय}$ और ना = $\frac{ताम}{तार}$ । यहाँ दोनों खण्ड तात्कालिक सम्बन्ध है अर्थात् पहले में र को दूसरे में य को स्थिर मान कर सम्बन्ध निकाला गया है ।

$$\text{इसलिये स} = \int \text{मा ताय} + फ_r (र)$$

र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{तास}{तार} = \frac{ता \int \text{माताय}}{तार} + \frac{ताफ_r (र)}{तार}$$

$$\text{परन्तु } \frac{तास}{तार} = \text{ना} \cdot \frac{ताफ_r (र)}{तार} = \text{ना} - \frac{ता \int \text{माताय}}{तार}$$

$$\text{और } फ_r (र) = \int \left(\text{ना} - \frac{ता \int \text{माताय}}{तार} \right) तार$$

$$\text{इसलिये स} = \int \text{मा ताय} + \int \left(\text{ना} - \frac{ता \int \text{माताय}}{तार} \right) तार + स्थि$$

$$(१) \text{ उदा० कल्पना करो कि तास} = \frac{२ ताय}{\sqrt{(य^२ - र^२)}} - \frac{२ य तार}{र\sqrt{(य^२ - र^२)}}$$

$$\text{यहाँ मा} = \frac{२}{\sqrt{(य^२ - र^२)}}, \text{ ना} = \frac{-२ य}{र\sqrt{(य^२ - र^२)}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{तामा}{तार} = \frac{२र}{(य^२ - र^२)^{\frac{३}{२}}} \text{ । } \frac{ताना}{ताय} = \frac{-२}{र} \left(\frac{-र^२}{(य^२ - र^२)^{\frac{३}{२}}} \right) = \frac{२र}{(य^२ - र^२)^{\frac{३}{२}}}$$

$$\therefore \text{ स} = \int \text{मा ताय} + फ_r (र) = २ ला \{ य + \sqrt{(य^२ - र^२)} \} + फ_r (र)$$

$$\frac{तास}{तार} = \frac{-२र}{\{ य + \sqrt{(य^२ - र^२)} \} \sqrt{(य^२ - र^२)}} + \frac{ताफ_r (र)}{तार} = \text{ना} = \frac{-२ य}{र\sqrt{(य^२ - र^२)}}$$

$$\frac{ताफ_r (र)}{तार} = \frac{२}{\sqrt{(य^२ - र^२)}} \left\{ \frac{र}{य + \sqrt{(य^२ - र^२)}} - \frac{य}{र} \right\}$$

$$= \frac{-२}{\sqrt{(य^२ - र^२)}} \left\{ \frac{य^२ - र^२ + य\sqrt{(य^२ - र^२)}}{रय + र\sqrt{(य^२ - र^२)}} \right\} = -\frac{२}{र}$$

$$\therefore f_2(r) = \text{स्थि} - 2 \text{ ला } r$$

$$\text{इसलिये स} = \text{ला} \left\{ \frac{y + \sqrt{(y^2 - r^2)}}{r} \right\}^2 + \text{स्थि} ।$$

जहाँ गुणक से अपवर्तन दे दिया गया हो वहाँ पर बड़ी कठिनता पड़ेगी और कोई विधि नहीं है जिससे गुणक का पता लगे, केवल अपने बुद्धि बल से गुणक का पता लगा कर गणित करना चाहिये ।

२६७। इस प्रक्रम में चलनसमीकरण सम्बन्धि कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

(१) एक ऐसे वक्र का पता लगावो जो दिये हुए समीकरण सम्बन्धि वक्र-परम्परा को काटने से निर्दिष्टकोण तुल्य कोण बनावे ।

कल्पना करो कि दिये हुए वक्र का भुज = y और कोटि r और साध्य वक्र का भु = y_1 और कोटि r_1 है और निर्दिष्ट कोण की स्पर्शरेखा = m है

$$\text{तो स्पर्शरेखा } m = \text{स्पर्शरेखा} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{स्पर्शरेखा} \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1} । \therefore m = \frac{\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}}{1 + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}}$$

सिद्धवक्र के समीकरण पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान y, r के फल रूप में अर्थात् $f(y, r)$ ऐसा सिद्ध हो जायगा और योग बिन्दु पर दोनो वक्र के भुज कोटि एक ही होंगे इसलिये y_1 के स्थान में y और r_1 के स्थान में r को रख सकते हैं इन पर से फिर साध्य वक्र का समीकरण भी व्यक्त हो जायगा । ऊपर के समीकरण को ।

$$m \left\{ 1 + f(y, r) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right\} = f(y, r) - \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ ऐसे लिख सकते}$$

हैं जो कि एकघात प्रक्रम सम्बन्धि चलनसमीकरण के ऐसा होगा ।

यदि साध्य वक्र सिद्ध वक्रों को काट कर समकोण बनावे तो $m = \infty$

$$\text{इसलिये } 1 + f(y, r) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \frac{1}{f(y, r)}$$

जैसे उस वक्र को बताओ जो उन परवलयों को काटने से समकोण बनावे जिनमें शिखरस्थान और y अक्ष एक ही है ।

कल्पना करो कि परवलय का $r^2 = 4ay$ यह समीकरण है

$$\therefore f(y, r) = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{2a}{r} = \frac{r}{2y}$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{२य}{र} \text{ इसलिये } \frac{र^२}{२} = (ग^२ - य^२)$$

यह एक दीर्घवृत्त का समीकरण हुआ जिसका केन्द्र परवलय का शिर स्थान और बृहद्भास य अक्ष पर लम्ब होगा । यहाँ ग का मान अनिश्चित है इसलिये कोई दीर्घवृत्त जिनके व्यासों में $\sqrt{२} : १$ यह सम्बन्ध हो वे सब परवलयों को समकोण पर काटेगे ।

(२) $\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^न + प\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^न + वा\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^न-२ + \dots + धान = ०$ जहाँ पा, वा, इत्यादि य, र के फल हैं इसमें र का मान क्या होगा ।

इस न घात प्रथमसम्बन्ध चलनसमीकरण में साधारण बीजगणित से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का न विध मान आवेगा इसलिये न विध र का मान चलानयन से निकलेगा और इनका घातरूप एक और मान आवेगा ।

जैसे यदि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = अ$ $\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \pm अ$ इसलिये $र = ग \pm अय$ वा $र = ग - अय$ ये दोनों द्विये समीकरण को ठीक रखेंगे और इनका घात $(र - ग - अय)(र - ग + अय) = ०$ यह भी समीकरण को ठीक रखेगा ।

इस पर से यह एक उदाहरण बनता है कि उस वक्र को घताओ जिसमें $चा = अय + कर$ हो

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^२ \right\}} = अ + क \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

इससे सिद्ध है कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान स्थिर होगा मानो कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = म$

तो $र = मय + ग$ यह एक सरलरेखा का समीकरण है

$$\therefore \frac{र-ग}{य} = म = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ इसलिये } \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{र-ग}{य}\right)^२ \right\}} = अ + क\left(\frac{र-ग}{य}\right)$$

यह समीकरण हुआ ।

(३) $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = या$ इसमें र का मान क्या होगा जहाँ या, य का कोई फल है ।

पहले मानो कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = या$ $\therefore \frac{ता}{ताय} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right) = या$ $\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \int याताय$

और $र = \int \left\{ \int याताय \right\} ताय$

फिर मान लो कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{या}$, तो, $\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right) = \text{या} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \int \text{याताय}$

फिर ऊपर के ऐसा दो बार चलानयन करो। यहाँ स्थिराङ्क को छोड़ दिया है।

(४) $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{रा}$ यहाँ (ग, र कोई फल है) र का मान क्या होगा।

मान लो कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{प}$ ∴ $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताप}}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{प} \frac{\text{ताप}}{\text{तार}}$

= रा ∴ $\frac{\text{प}}{\text{र}} = \text{स्थि} + \int \text{ग तार}$

(५) $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पा} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{वार} = 0$ इसमें र का मान क्या होगा।

यहाँ मान लो कि

$$r = \int^{\text{गताय}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{श} \int^{\text{गताय}}, \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \left(\frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} + \text{श}^2 \right) \int^{\text{शताय}}$$

$$\text{इसलिये } \int^{\text{शताय}} \left\{ \text{श} + \text{पाश} + \text{वा} + \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} \right\} = 0$$

∴ श + पाश + वा + $\frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} = 0$ इसलिये यदि पा और वा

स्थिराङ्क हों तो सहज में श का और श पर से र का ज्ञान हो जायगा।

क्योंकि यदि पा = आ और वा = का तो

$$\text{श} + \text{आश} + \text{का} + \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} + (\text{श}-\text{अ}_1)(\text{श}-\text{क}_1) = 0$$

जहाँ श + आश + का = 0 इसमें श का, अ_१ और क_१ मान हैं।

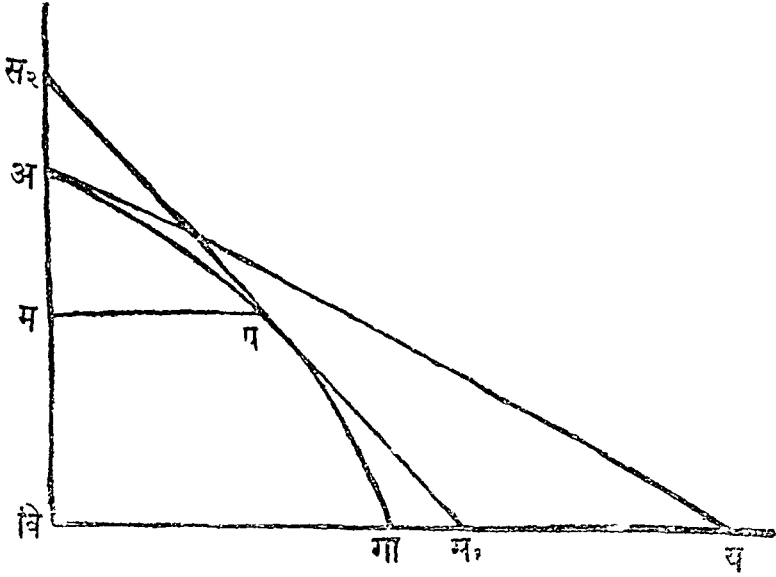
इसमें यदि श = अ, वा श = क, तो समीकरण ठीक होता है

इसलिये $r = \int^{\text{अ, य}} \text{अ}_1 \text{ ताय} = \int^{\text{अ, य}} \text{अ}_1 \text{ य} + \text{ग} = \text{ग}_1 \int^{\text{अ, य}} \text{अ}_1 \text{ य} \text{ वार} = \text{ग}_2 \int^{\text{क, य}}$ दोनो के योग तुल्य र माने तो भी समीकरण ठीक होगा इसलिये

$$r = \text{ग}_1 \int^{\text{अ, य}} + \text{ग}_2 \int^{\text{क, य}}$$

अ_१ और क_१ के सम्भाव्य, असम्भाव्य, और तुल्य होने से इस में कई भेद उत्पन्न होते हैं।

(६) नव हाथ ऊँचे खंभे पर एक मोर बैठा था उसने खंभे की जड़ से २७ हाथ दूरी पर एक साँप को विल की तरफ जो कि खंभे की जड़ में थी आते देख उसके ऊपर झपटा । बतावो खंभे की जड़ से कितनी दूरी पर मोर ने साँप को पकड़ा । इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि प्रतिक्षण मे साँप की गति से दूनी मोर की गति थी ।



कल्पना करो कि अवि = खंभा = ९ = अ, विस = साँप विल का अन्तर = २७ = क, सअ = ग, वि विल, स, पहिले साँप का स्थान । अप गा, वह वक्र है जिस में मोर चला । इस का अय रेखा य अक्ष और अ मूल बिन्दु है । प्रतिक्षण में जब साँपही के सम्मुख मोर चलता है तब रपष्ट है कि इष्ट स्थान में जहाँ पर साँप होगा वहाँ से वक्र पर जो स्पर्शरेखा होगी उस के स्पर्शबिन्दु पर मोर होगा । मान लो कि इष्ट समय में सर्प का स्थान स_१ और वहाँ से वक्र स्पर्शरेखा स_१ प । प, उस समय में मोर का स्थान और उसका भुज = अम = य और कोटि = पम = र है । मोर गति और साँप गति का सम्बन्ध = इ, मान रखो तो चलनकलन से ।

$$\text{सप} \angle \text{स}_१ = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \text{स}_१\text{म} = \frac{\text{र ताय}}{\text{तार}}, \text{स}_१\text{वि} = \text{अ} - \text{य} + \frac{\text{र ताय}}{\text{तार}},$$

$$\text{विस}_१ = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} (\text{अ} - \text{य}) + \text{र} । \text{इस सस}_१ = \text{क} - \text{र} (-\text{अ} - \text{य}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{इसलिये अप चाप} = \text{च} = \text{इ} \times \text{सस}_१ = \text{इक} - \text{इ} \left\{ \text{र} + (\text{अ} - \text{य}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right.$$

इसका य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} = -\text{इ}, (\text{अ-य}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}^2} = \text{इ}_1 (\text{य-अ}) \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]$$

इसलिये

$$\frac{\text{ताय}}{\text{य-अ}} = \frac{\text{ता} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)}{\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}}} = \frac{-\text{ताय इ}_1}{\text{अ-य}} \quad \text{यदि } \frac{1}{\text{इ}_1} = \text{इ}_2$$

चलानयन करने से

$$\text{स्थि} + \text{ला} (\text{अ-य})^{\text{इ}_2} = \text{ला} \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}} \right] \quad (\text{८ वें प्रक्रम के (६) वें}$$

उदाहरण से)

इसमें यदि य = ० तो

$$\begin{aligned} \text{स्थि} + \text{ला} (\text{अ})^{\text{इ}_2} &= \text{ला} [\text{स्प} < \text{अ} + \sqrt{\left\{ 1 + \text{स्प}^2 < \text{अ} \right\}}] \\ &= \text{ला} \left(\frac{\text{क}}{\text{अ}} + \frac{\text{ग}}{\text{अ}} \right) = \text{ला} (\text{क} + \text{ग}) - \text{ला} (\text{अ}) \end{aligned}$$

इसलिये स्थि = ला (क + ग) - ला (अ)^{इ + १} इसका उत्थापन (१) में देने

$$\text{से ला} \left\{ \frac{(\text{अ-य})^{\text{इ}_2} (\text{क} + \text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}_2 + 1}} \right\} = \text{ला} \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} \right]$$

लघुरिक्त्य को उड़ा देने से

$$\frac{(\text{अ-य})^{\text{इ}_1} (\text{क} + \text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}_2 + 1}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} \dots \dots \dots (२)$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{अ}^{\text{इ}_2 + 1}}{(\text{अ-य})^{\text{इ}_2} (\text{क} + \text{ग})} &= \frac{1}{\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}} \\ &\quad - \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \dots \dots \dots (३) \end{aligned}$$

(२) और (३) के अन्तर से

$$\frac{२ \text{ तार}}{\text{ताय}} = \left[\frac{\text{अ-य}}{\text{अ}} \right]^{\text{इ}_2} \left[\frac{\text{क} + \text{ग}}{\text{अ}} \right] - \left[\frac{\text{अ}}{\text{अ-य}} \right]^{\text{इ}_2} \left[\frac{\text{अ}}{\text{क} + \text{ग}} \right]$$

इसलिये चलानयन से

$$२ \text{ र} + \text{स्थि} = \frac{\text{अ}^{\text{इ}_2}}{१ - \text{इ}_2} \left[\frac{\text{अ}}{\text{क} + \text{ग}} \right] (\text{अ-य})^{१ - \text{इ}_2}$$

$$-\frac{१}{अ^{३०}(१+इ_२)} \left[\frac{क+ग}{अ} \right] (अ-य)^{१+इ_२}$$

इसमें य = ० तो

$$\begin{aligned} \text{स्थि} &= \frac{अ}{१-इ_२} \frac{अ}{क+ग} - \frac{अ}{१+इ_२} \left(\frac{क+ग}{अ} \right) = \frac{-क+ग}{१-इ_२} - \frac{क+ग}{१+इ_२} \\ &= \frac{-क-इ_२क+ग+गइ_२-क+इ_२क-ग+इ_२ग}{१-इ_२^२} = \frac{२इ_२ग-२क}{१-इ_२^२} \end{aligned}$$

इसका उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$\begin{aligned} र &= \frac{अ^{इ_२}}{२(१-इ_२)} \left[\frac{अ}{क+ग} \right] (अ-य)^{१-इ_२} \\ &= \frac{अ^{-इ_२}}{२(१+इ_२)} \left[\frac{क+ग}{अ} \right] (अ-य)^{+१+इ_२} - \frac{-क+इ_२ग}{१-इ_२^२} \quad (४) \end{aligned}$$

इसमें यदि य = अ तो विल से साँप और मोर का योग

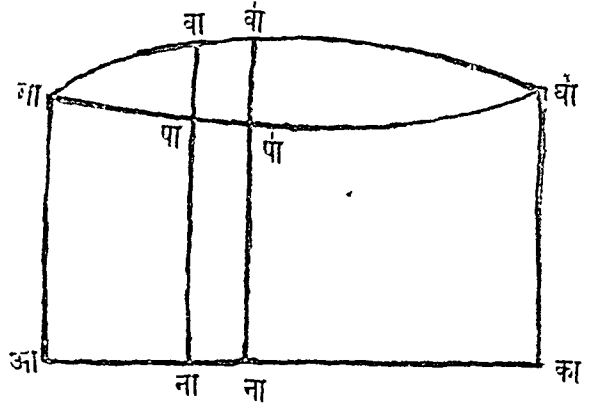
$$\begin{aligned} &= \frac{-क+इ_२ग}{१-इ_२^२} = \frac{-क+\frac{ग}{इ_२}}{१-\frac{१}{इ_२^२}} = \frac{-कइ_२^२+\frac{ग}{इ_२}}{इ_२^२-१} \\ &= \frac{इ_२^२क-इ_२क}{इ_२^२-१} \text{ इतने अन्तर पर हुआ ।} \end{aligned}$$

इस पर से यदि संख्यात्मक मान निकालो तो १७०३ इतना होगा । भास्कराचार्य ने जो अपनी लीलावती के क्षेत्र व्यवहार में मोर और साँप का प्रश्न लिखा है उसमें दोनों की गति तुल्य माना है इसलिये इ_२ = १ इस पर से ऊपर की क्रिया करो तो विल से अनन्त दूर पर भिन्न दिशा में योग आता है इसलिये भास्कर का उदाहरण अशुद्ध है । भास्कराचार्य ने जो त्रिभुजगणित की युक्ति से अपने उदाहरण का उत्तर निकाला है वह ठीक नहीं क्योंकि मयूर कोई देवता नहीं कि उसे पहले से मालूम हो जाय कि मैं इस सरल मार्ग से चलकर जब तक पृथ्वी के जिस स्थान पर पहुँचूँगा तब तक साँप जी चल कर उसी स्थान पर पहुँच जायगा ।

वैशेषिक कलन ।

२६८ । यदि य का फल ज्ञात हो तो चलनकलन की युक्ति से उसके महत्तम और न्यूनतम मान का प्रमाण भी मालूम हो जाता है परन्तु बहुत से ऐसे प्रश्न हैं जिनमें य के फल ही का पता लगाना पड़ता है जिसमें महत्तम वा न्यूनतम का धर्म हो । जैसे दो द्विये हुए चिन्हों के बीच में परमात्प अन्तग जानना है तो

यहाँ न्यूनतम अन्तर जानने के लिये उस वक्र का पता लगाना पड़ेगा जिसका चाप दोनों विन्दुओं के अन्तर्गत परमाल्प हो । यदि गा वा दो निर्दिष्ट विन्दु हों तो यहाँ दोनों विन्दुओं पर गये गापाघा, गावाघा इत्यादि वक्रों में से एक ऐसे वक्र को चुनना चाहिये जिसका चाप औरों के चाप से छोटा हो । ऐसे



वक्र का क्या समीकरण होगा इसके लिये एक वक्र के पा विन्दु से दूसरे वक्र के वा विन्दु का पता लगाना पड़ेगा । इस पा और वा विन्दु का जो अन्तर है इसे पाना कोटि की वैशेषिक गति कहते हैं इसको "वै" से प्रकाश करेंगे । जैसा गापाघा वक्र के पा विन्दु का भुज = आना = य और कोटि = पाना = र मानो तो यदि पावा बहुत ही छोटा हो तो ता और वै में इस प्रकार का भेद है अर्थात् र + तार इससे गापाघा वक्र में पा विन्दु के बहुत ही पास में जो पा विन्दु है उसकी कोटि पाना समझी जाती है और र + वैर इससे दूसरा वक्र जो गावाघा है उसमें पा विन्दु के बहुत ही पास जो वा विन्दु है उसकी कोटि वाना समझी जाती है ।

२६९ । ऊपर के क्षेत्र में नापा = र , नापा = र + तार और नावा = र + वैर इसलिये नावा = नावा + ता (नावा) = र + वैर + ता (र + वैर)

और नावा = नापा + वै (नापा) = र + तार + वै (र + तार) इसलिये

$$र + वैर + ता (र + वैर) = र + वैर + तार + तावैर$$

$$= र + तार + वै (र + तार) = र + तार + वैर + वैतार इसलिये$$

$$तावैर = वैतार$$

अर्थात् वैशेषिकगति की तात्कालिकी गति और तात्कालिकी गति की वैशेषिकगति दोनों परस्पर तुल्य है ।

इसी प्रकार यदि तार को र मान लो तो

$$तावैतार = वै तार, वा तावैतार = तातावैर = तावैर$$

$$\therefore तावैर = वैतार और इसी तरह तावैर = वैतार ।$$

यदि र की तात्कालिकी गति = $r_1 - r$ यह हो और र की वैशेषिकगति बहुत ही अल्प हो तो ऊपर के सिद्धान्त से

$$वै तार = वै (r_1 - r) = वैर_1 - वैर = तावैर यह भी सिद्ध कर सकते हैं ।$$

२७०। इसी तरह यदि $\int s = s_1$ तो $s = \text{तास}_1$

∴ वैस = वैतास_१ = तावैस_१ इसलिये $\int \text{वैस} = \int \text{वैतास}_1 = \int \text{तावैस}_1$
 $= \text{वैस}_1 = \text{वै} \int s$ और $\int^2 \text{वैस} = \int \text{वै} \int s = \text{वै} \int \int s = \text{वै} \int^2 s$

इसी तरह $\int^n \text{वैस} = \text{वै} \int^n s$

\int^n इस से समझो कि बार बार न बार चलानयन किया गया है।

२७१। ऊपर के सिद्धान्तों के देखने से यह स्पष्ट होता है कि तात्कालिक और वैशेषिक के गणितों में केवल ता और वै का भेद है अर्थात् ता के स्थान में वै को रख देने से सब गणित तात्कालिकी गति के ऐसा हो जाता है। जैसे यदि $s = r^n$ तो चलनकलन से $\text{तास} = n r^{n-1} \text{तार}$

इस में ता के स्थान में वै को रख देने से $\text{वैस} = n r^{n-1} \text{वैर}$

इसी तरह यदि $s = f(y, r, p, v, \dots)$ जहाँ p, v, \dots

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}, \dots$ हैं तो चलनकलन से

$$\begin{aligned} \text{तास} &= \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \text{ताय} + \frac{\text{तास}}{\text{तार}} \text{तार} + \frac{\text{तास}}{\text{ताप}} \text{ताप} + \frac{\text{तास}}{\text{ताव}} \text{ताव} + \dots \\ &= \text{मा ताय} + \text{ना तार} + \text{पा ताप} + \text{वा ताव} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{जहाँ मा} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}, \text{ना} = \frac{\text{तास}}{\text{तार}}, \frac{\text{तास}}{\text{ताप}} = \text{पा}, \frac{\text{तास}}{\text{ताव}} = \text{वा}, \dots$$

इस में ता के स्थान में वै को रख देने से

$$\text{वैस} = \text{मा वैय} + \text{ना वैर} + \text{पा वैप} + \text{व वैव} + \dots$$

२७२। वै/स, या/वैस इस का मान यदि जानना हो जहाँ s, y, r , और इनके तात्कालिकी गति का कोई फल हो और y, r, \dots चलराशि का फल हो तो

$$\begin{aligned} \text{तास} &= \text{मा ताय} + \text{ना तार} + \text{पा ताप} + \text{वा ताव} + \dots \\ &+ \text{म तार} + \text{न तार} + \text{प तार} + \text{व तार} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{परन्तु ताय} = \text{ता ताय}, \text{तार} = \text{ता तार}$$

इस लिये ता के स्थान में वै को रख देने से

$$\begin{aligned} \text{वैस} &= \text{मा वैय} + \text{ना वैताय} + \text{पा वैताप} + \text{वा वैताव} + \dots \\ &+ \text{म वैर} + \text{न वैतार} + \text{प वैतार} + \text{व वैतार} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{वैस} = \int (\text{मावैय} + \text{नावैताय} + \text{पावैताय} + \text{वावैताय} + \dots) \\ + \int (\text{मवैर} + \text{नवैतार} + \text{पवैतार} + \text{ववैतार} + \dots)$$

परन्तु खण्डचलानयन से

$$\int \text{नावैताय} = \int \text{नातावैय} = \text{नावैय} - \int \text{तानावैय} ।$$

$$\int \text{पावैताय} = \int \text{पातावैय} = \text{पातावैय} - \int \text{तापा तावैय} \\ = \text{पातावैय} - \text{तापावैय} + \int \text{तापावैय} ।$$

$$\int \text{वावैताय} = \int \text{वातावैय} = \text{वातावैय} - \int \text{तावातावैय} \\ = \text{वातावैय} - \text{तावातावैय} + \int \text{तावातावैय} \\ = \text{वातावैय} - \text{तावातावैय} + \text{तावावैय} - \int \text{तावावैय}$$

इ०

इ०

इ०

इसी तरह

$$\int \text{नवैतार} = \int \text{नतावैर} = \text{नवैर} - \int \text{तानवैर} ।$$

$$\int \text{पवैतार} = \int \text{पतावैर} = \text{पतावैर} - \text{तापवैर} + \int \text{तापवैर} ।$$

$$\int \text{ववैतार} = \text{बतावैर} - \text{तावतावैर} + \text{ताववैर} - \int \text{ताववैर} ।$$

इन सबका उत्थापन \int वैस मे देने से

$$\int \text{वैस} = (\text{ना} - \text{तापा} + \text{तावा} - \text{इ०}) \text{वैय} + (\text{न} - \text{ताप} + \text{ताव} - \text{इ०}) \text{वैर}$$

$$+ (\text{पा} - \text{तावा} + \text{इ०}) \text{तावैय} + (\text{प} - \text{ताव} + \text{इ}) \text{तावैर}$$

$$+ (\text{वा} - \text{ताभा} + \text{इ०}) \text{तावैय} + (\text{व} - \text{ताम} + \text{इ०}) \text{तावैर}$$

$$+ \int (\text{मा} - \text{ताना} + \text{तापा} - \text{तावा} + \text{इ०}) \text{वैय}$$

$$+ \int (\text{म} - \text{तान} + \text{ताप} - \text{ताव} + \text{इ०}) \text{वैर}$$

इसके देखने से स्पष्ट होता है कि वैय, तावैय, इत्यादि के और वैर, तावैर इत्यादि के गुणको मे साजात्य धर्म है । इस लिये एक चल स के मान मे ल को और माने तो इसके वश से \int वैस मे उसी चाल के और खण्ड होंगे जैसा कि वैय और वैर के वश से उत्पन्न हुए हैं ।

२७३। यदि स = शाताय जहां \int गाताय इस के वैशेषिक का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो कि

$$\text{ताशा} = \text{माताय} + \text{नातार} + \text{पाताप} + \text{वाताव} + \text{भाताभ} + \text{इ०}$$

$$\text{जहाँ } \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \text{ व} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}^2}, \text{ भ} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ । इ०}$$

$$\text{और } \text{मा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}}, \text{ ना} = \frac{\text{ताशा}}{\text{तार}}, \text{ पा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}}, \text{ इ०}$$

इसलिये

$$\text{वैशा} = \text{मावैय} + \text{नावैर} + \text{पावैप} + \text{वावैव} + \text{भावैभ} + \text{इ०}$$

$$\text{अब } \int \text{शाताय} = \int \text{वै (शाताय)} = \int (\text{शा वैताय} + \text{ताय वैशा})$$

$$= \int (\text{शा तावैय} + \text{तायवैशा}) = \int \text{शा तावैय} + \int \text{तायवैशा}$$

$$= \text{शावैय} + \int (\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा})$$

$$\text{परन्तु } \int (\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा}) = \int \text{ताय} (\text{मावैय} + \text{नावैर} + \text{पावैप} + \dots)$$

$$- \int \text{वैय} (\text{माताय} + \text{नातार} + \text{पाताप} + \dots)$$

$$= \int \text{ना}(\text{वैर} - \text{पवैय})\text{ताय} + \int \text{पा}(\text{वैप} - \text{ववैय})\text{ताय} + \int \text{वा}(\text{वैव} - \text{मवैय})\text{ताय} + \dots$$

$$\text{अब यहां } \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \text{ व} = \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}}, \text{ म} = \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$$

इस लिये

$$\text{वैप} = \frac{\text{तायवैतार} - \text{तारवैताय}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{वैतार} - \text{पवैताय}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore \text{वैप} - \text{ववैय} = \frac{\text{वैतार} - \text{पतावेय} - \text{तापवैय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} (\text{वैर} - \text{पवैय})$$

$$\text{और वैव} = \frac{\text{तायवैताप} - \text{तापवैताय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{तावैप} - \text{वतावैय}}{\text{ताय}}$$

$$\text{वैव} - \text{भवैय} = \frac{\text{तावैप} - \text{वतावैय} - \text{ताववैय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} (\text{वैप} - \text{ववैय})$$

और कल्पना करो कि

$$\text{वैर} - \text{पवैय} = \text{ह} \quad \text{वैप} - \text{ववैय} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \quad | \quad \text{वैव} - \text{भवैय} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \text{इ०}$$

इस लिये

$$\text{वै} \int \text{शाताय} = \text{शावैय} + \int \text{नाहनाय} + \int \text{पा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय} + \int \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय} + \dots$$

$$\text{परन्तु} \int \text{पा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय} = \text{पाह} - \int \text{ह} \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$

$$\int \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय} = \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \int \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$

$$= \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \text{ह} \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \int \text{ह} \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$

$$\text{और} \int \text{भा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय} = \text{भा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + \text{ह} \frac{\text{ताभा}}{\text{नाय}}$$

$$- \int \text{ह} \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये वै} \int \text{शाताय} = \text{शावैय} + \left(\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} - \text{इ०} \right) \text{ह}$$

$$+ \left(\text{वा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताभा}_2}{\text{ताय}_2} - \text{इ०} \right) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$+ \left(\text{भा} - \frac{\text{ताभा}_3}{\text{ताय}_3} + \text{इ०} \right) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + \text{इ०}$$

$$+ \int \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + \text{इ०} \right) \text{ह} \text{ताय}$$

इस तरह से स्पष्ट देख पड़ता है कि \int शाताय इसके वैशेषिक गति में दो भाग हैं एक चल चिह्न के अन्तर्गत और दूसरा चल चिह्न रहित इसमें जब y_1 और r_1 तब शा, पा आदि का मान $शा_1, पा_1$ इत्यादि और जब y_2 और r_2 तब शा, पा आदि का मान $शा_2, पा_2$ इत्यादि मानो तो y_2 , और y_1 सीमा के भीतर,

वै ∫ शाताय, इसका मान

$$\text{शा}_2\text{वैय}_2 - \text{शा}_1\text{वैय}_1 + (\text{पा}_2 - \frac{\text{तावा}_2}{\text{ताय}_2} + \frac{\text{ताभा}_2}{\text{ताय}_2} - ३०) \text{ह}_2 \cdot$$

$$- (\text{पा}_1 - \frac{\text{तावा}_1}{\text{ताय}_1} + \frac{\text{ताभा}_1}{\text{ताय}_1} - ३०) \text{ह}_1 + ३०$$

$$+ \int_{\text{य}_1}^{\text{य}_2} (\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} - ३०) \text{ह ताय} ।$$

२७४। यदि स = फ (य, र, ल) जहां य का र और ल फल हैं तो यहां भी ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से कल्पना कर सकते हो कि

$$\begin{aligned} \text{ताशा} &= \text{मा ताय} + \text{ना तार} + \text{पा ता प} + \text{वा ता व} + ३० \\ &+ \text{वा ता ल} + \text{पा ता र} + \text{न वा ता व} + ३० \end{aligned}$$

इस लिये

$$\begin{aligned} \text{वैशा} &= \text{मा वैय} + \text{ना वैर} + \text{पावैप} + \text{वावैव} + ३० \\ &+ \text{ना वैल} + \text{पा वै प} + \text{वा वै व} + ३० \end{aligned}$$

यहां ना, पा इत्यादि उसी चाल के हैं जैसे कि ना, पा ३० हैं अर्थात् र के स्थान मे ल को रख देने से ना पा ३० हो जायंगे ।

यहां भी यदि वैल — प वैय = ह तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{वै} \int \text{शाताय} = \text{शावैय} + (\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} - ३०) \text{ह}$$

$$+ (\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} - ३०) \text{ह}$$

$$+ (\text{वा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + ३०) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$+ (\text{वा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + ३०) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + ३०$$

$$+ \int (\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} - ३०) \text{ह ताय}$$

$$+ \int (\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} - ३०) \text{ह ताय}$$

२७५। जिस युक्ति से चलनकलन में सिद्ध है कि यदि र = फ (य) और र का महत्तम वा न्यूनतम मान हो तो तार = ० उसी युक्ति से जिस समय

$\int_{y_1}^{y_2}$ शाताय इसका मान महत्तम वा न्यूनतम होगा उस समय वै $\int_{y_1}^{y_2}$ शा ताय

= ० ऐसा होगा । परन्तु जब वै इसका मान ऐसे समय में सर्वदा शून्य होगा तब कह सकते हैं कि २७३ वें प्रक्रम में वैशेषिक का मान जो दो खण्ड में एक चल-चिह्नान्तर्गत और दूसरा चलचिह्न रहित में सिद्ध हुआ है वे दोनों पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे जैसे ।

(१) उदाहरण, दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर जानना है यहां

$$\int \text{शाताय} = \int \sqrt{\left(1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)} \text{ताय} = \int \sqrt{(1 + \text{प}^2)} \text{ताय}$$

$$\text{इसलिये गा} = \sqrt{(1 + \text{प}^2)} \quad \text{तागा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1 + \text{प}^2)}} \text{ताप}$$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि इसे २७३ वें प्रक्रम में ताशा का जो रूप है उसके साथ तुलना करो तो

$$\text{मा} = ०, \quad \text{ना} = ० \quad \text{पा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1 + \text{प}^2)}}, \quad \text{वा} = ०,$$

और चल चिह्नान्तर्गत मान को शून्य के तुल्य करने से

$$\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = ० \quad \therefore \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = ० \quad \therefore \text{पा} = \text{स्थिराङ्क} = \text{ग} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1 + \text{प}^2)}}$$

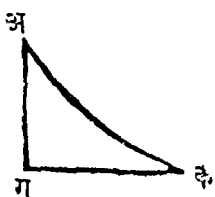
$$\text{तब ग}^2 = \frac{\text{प}^2}{1 + \text{प}^2} \quad \therefore 1 - \text{ग}^2 = \frac{1}{1 + \text{प}^2} \quad \text{और प} = \frac{\text{ग}}{\sqrt{(1 - \text{ग}^2)}} = \text{अ}$$

इस लिये

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ तब र} = \text{अय} + \text{क अर्थात् दोनो विन्दुओं में परमाल्प अन्तर उस}$$

वक्र का चाप होगा जिसका समीकरण अय + क = र यह अर्थात् सरलरेखा-रूप होगा ।

(२) दो विन्दुओं के बीच में एक ऐसा वक्र बनावो जिसमें ऊपर के विन्दु से कोई पिण्ड पृथ्वी के आकर्षण से उसके चाप में चल कर परमाल्प काल में नीचे की विन्दु पर पहुँचे । यहां चाप का प्रमाण चा ।



अग = र, कग = य, \angle अगक = समकोण, पृथ्वी के

आकर्षण का बल = वे मानो तो गतिविद्या से अ से

क तक चाप की राह से पिण्ड के आने में काल

$$\text{सेकण्ड में} = \int \frac{\frac{\text{तापा}}{\text{ताय}}}{\sqrt{2\text{वे}}}}{\text{ताय}} = \frac{1}{\sqrt{2\text{वे}}} \int \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{r}} \text{ताय} = \frac{1}{\sqrt{2\text{वे}}} \int \text{शा ताय}$$

$$\therefore \text{शा} = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{r}} \text{और ताशा} = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2r^{\frac{3}{2}}} \text{तार} + \frac{p}{\sqrt{r}\sqrt{(1+p^2)}} \text{ताप}$$

इस लिये

$$\text{मा} = 0, \text{ना} = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2r^{\frac{3}{2}}}, \text{पा} = \frac{p}{\sqrt{r}\sqrt{(1+p^2)}}, \text{घा} = 0$$

$$\text{और ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = 0 \quad \therefore \text{ना} = \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} \text{ इसलिये इसका उत्थापन}$$

ताशा में देने से

$$\text{ताशा} = \text{तापा} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पा ताप} = \text{तापाप} + \text{पा ताप} = \text{ता} (\text{प} \times \text{पा})$$

इसलिये शा = पा × प + ग जहाँ ग कोई स्थिराङ्क है ।

$$\text{अब शा} = \text{पाप} + \text{ग} = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{r}} = \frac{p^2}{\sqrt{r}\sqrt{(1+p^2)}} + \text{ग}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{(1+p^2)}} = \text{ग} = \frac{1}{\sqrt{2\text{अ}}} \quad \sqrt{(1+p^2)} = \sqrt{\frac{2\text{अ}}{r}} \text{और}$$

$$p = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{2\text{अ}-r}{r}} \text{ यह एक चक्रालद का समीकरण है (चलनकलन देखो)}$$

(३) उदाहरण । दो वक्रों के बीच में परमाल्प अन्तर निकालो अर्थात् दोनों वक्रों में एक एक ऐसी विन्दु ठहरावो जिनमें परमाल्प अन्तर हो ।

यहाँ (१) उदाहरण से दो विन्दुओं में परमाल्प अन्तर का समीकरण $r = \text{अय} + \text{क}$ और $\text{शा} = \sqrt{(1+p^2)}$ जहाँ $p =$ कोई स्थिराङ्क ।

मान लो कि दोनों दिये हुए वक्रों में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = m$, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = n$ और जिन विन्दुओं को परमाल्प अन्तररूप सरलरेखा दोनों वक्रों को काटती है उन विन्दुओं के क्रम से भुज कोटि r_1, y_1 और r_2, y_2 हैं तो

$$\frac{\text{वैर}_1}{\text{वैय}_1} = \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1} = m \text{ और } \frac{\text{वैर}_2}{\text{वैय}_2} = \frac{\text{तार}_2}{\text{ताय}_2} = n$$

परन्तु २७३ प्रक्रम में महत्तम और न्यूनतम मान में

$$\text{शा}_2 \text{ वैय}_2 - \text{शा}_1 \text{ वैय}_1 + \text{पा}_2 \text{ ह}_2 - \text{पा}_1 \text{ ह}_1 = 0$$

परन्तु अन्तिम विन्दुओं का वैशेषिक गमन भी शून्य होगा ।

इसलिये शा_१ वैय_१ + पा_१ ह_१ = ०, शा_२ वैय_२ + पा_२ ह_२ = ०

ह_१ और ह_२ का मान २७३ वें प्रक्रम में जो है उसका उत्थापन

$$\text{देने से } \text{शा}_1 \text{ वैय}_1 + \text{पा}_1 (\text{वैर}_1 - \text{प}_1 \text{ वैय}_1) = 0 \quad \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{शा}_2 \text{ वैय}_2 + \text{पा}_2 (\text{वैर}_2 - \text{प}_2 \text{ वैय}_2) = 0 \quad \dots \dots \dots (२)$$

$$(१) \text{ से } \text{शा}_1 + \text{पा}_1 \text{ म} - \text{पा}_1 \text{ प}_1 = 0 \quad \therefore \text{म} = \text{प}_1 - \frac{\text{शा}_1}{\text{पा}_1} = - \frac{१}{\text{प}_1} = - \frac{१}{\text{ग}}$$

$$(२) \text{ से } \text{शा}_2 + \text{पा}_2 \text{ न} - \text{पा}_2 \text{ प}_2 = 0 \quad \therefore \text{न} = \text{प}_2 - \frac{\text{शा}_2}{\text{पा}_2} = - \frac{१}{\text{प}_2} = - \frac{१}{\text{ग}}$$

$\therefore १ + \text{ग म} = ०$ और $१ + \text{ग न} = ०$ ।

यह दोनों समीकरण दिखलाते हैं कि सरलरेखा दोनों वक्रों को काटने से समकोण बनाती है। और दोनो बिन्दुओं पर गई हुई सरलरेखा का

$$\text{समीकरण } r - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) \quad \therefore \text{ग} = \frac{r_2 - r_1}{y_2 - y_1} \text{ इसका उत्थापन}$$

१ + गम और १ + गन में देने से दो समीकरण होंगे और वक्रों के समीकरण पर से y_२ और y_१ के फल के वश से r_२, r_१ के जानने के लिये दो समीकरण और होंगे इस तरह से चारो समीकरणों पर से y_२, y_१, r_२, r_१ चारो के मान व्यक्त हो जायेंगे ।

(४) ऐसा वक्र बताओ जिसके चाप, अवलूत के चाप, और वक्र जातीय व्यासार्द्ध से उत्पन्न क्षेत्रफल न्यूनतम हो। यहाँ १३१ वें प्रक्रम से यदि फल का मान आ मानो तो

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताय}} = \frac{\text{वि}}{२} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{(१ + \text{प}^2)^{\frac{३}{२}}}{-२\text{व}} \sqrt{(१ + \text{प}^2)} = \frac{(१ + \text{प}^2)^2}{-२\text{व}} \text{ (चलनकलन से)}$$

$$\text{इसलिये शा} = \frac{(१ + \text{प}^2)^2}{\text{व}} \text{ यहाँ शा के मान में केवल प और व है}$$

$$\text{इसलिये २७३ वे प्रक्रम से ताशा} = \text{पाताप} + \text{वाताव}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = 0 \quad \therefore \text{पा} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} - \text{गा}_2$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिये ताशा} &= \frac{\text{ता वा ता प}}{\text{ताय}} + \text{ताप गा}_2 + \text{वाताव} \\ &= \text{ताचाव} + \text{वाताव} + \text{तापगा}_2 \end{aligned}$$

$$\text{इसलिये शा} = \text{वा व} + \text{प गा}_2 + \text{गा}_2 = \frac{(१ + \text{प}^2)^2}{\text{व}} \quad \dots \dots (१)$$

जहाँ गा_१ और गा_२ कोई स्थिराङ्क हैं ।

$$\text{परन्तु गा} = \frac{(१ + प^१)^१}{व} \therefore \text{ता गा} = \frac{४ प(१ + प^१) ताप}{व} - \frac{(१ + प^१)^१}{व^१} \text{ ताव}$$

इसलिये २७३ वें प्रक्रम से वा = $-\frac{(१ + प^१)^१}{व^१}$ इसका उत्थापन (१) में देने

$$\text{से } \frac{(१ + प^१)^१}{व} = -\frac{(१ + प^१)^१}{व^१} व + प गा + गा.$$

$$\text{इसलिये } \frac{व(गा, प + गा)}{(१ + प^१)^१} = २$$

चलानयन से

$$\text{गा. स्प}^{-१} प + \frac{\text{गा. प} - \text{गा.}}{(१ + प^१)} = ४ व + गा. \dots \dots (२)$$

$$\text{और } \frac{व(गा. प + गा. प)}{(१ + प^१)^१} = २ व$$

चलानयन से

$$\text{गा. स्प}^{-१} प - \frac{प \times गा. + गा.}{१ + प^१} = ४ र + स्थिराङ्क$$

इसमें गा. जोड़ देने से

$$\text{गा. स्प}^{-१} प + \frac{प(गा. प - गा.)}{१ + प^१} = ४ र + गा., \dots \dots (३)$$

(२) और (३) से स्प^{-१} प को लोप कर देने से

$$\frac{(गा. प - गा.)}{(१ + प^१)} = ४ गा. र - ४ गा. व + गा. गा. - गा. गा.$$

$$\text{इस लिये } \sqrt{(१ + प^१)} = \frac{\text{गा. प} - \text{गा.}}{२\sqrt{(गा. र - गा. व + का)}}$$

जहाँ ४ का = गा. गा. - गा. गा.

कल्पना करो कि एक स्थिर बिन्दु से गणना करने से वक्र के चाप का प्रमाण चा है तो चलानयन से चा + गा = $\sqrt{(गा. र - गा. व + का)}$.. (४)

मूल बिन्दु और अक्षों के परिवर्तन से (४) का स्प

चा = $\sqrt{टअव + स्थिराङ्क}$ ऐसा हो सकता है जो कि ७१ वें प्रक्रम से चक्रालङ्क का समाकरण है ।

(५) आकाश में दो बिन्दुओं का परमाल्प अन्तर क्या होगा ।

दोनों बिन्दुओं का अन्तर चा मानो तो

$$\text{ताचा} = \sqrt{\{\text{ताय}^2 + \text{तार}^2 + \text{ताल}^2\}} = \text{स}$$

इस लिये २७२ वें प्रक्रम से खण्ड तात्कालिकी गति पर से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताय}^2}{\text{स}} = \frac{\text{ताय}}{\text{स}} \text{ ता ताय, } \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{तार}}{\text{स}} \text{ ता तार और } \frac{\text{तास}}{\text{ताल}} = \frac{\text{ताल}}{\text{स}} \text{ ता ताल}$$

$$\text{इस लिये वै } \int \text{स} = \int \text{वैस} = \int \text{वैताचा} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \text{वैताय} + \int \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} \text{वैतार} + \int \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \text{वैताल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \text{वैय} + \frac{\text{र}}{\text{ताचा}} \text{वैर} + \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \text{वैल} - \int \left\{ \text{ता} \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \right) \text{वैय} - \text{ता} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} \right) \text{वैर} + \right.$$

$$\left. \text{ता} \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right) \text{वैल} \right.$$

इस लिये मा = ०, म = ० मां = ०, (क्योंकि न्यूनतम मान में सब पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे)

$$\text{ना} = \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}, \text{न} = \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}}, \text{नां} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}, \text{ताना} = ० = \text{तान} = \text{तानां}$$

$$\therefore \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{अ}, \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} = \text{क}, \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \text{ग},$$

$$\text{और } \frac{\text{ताय}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{ताल}^2}{\text{ताचा}^2} = १ = \text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ग}^2$$

$$\text{और } \frac{\text{ताय}}{\text{ताल}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}, \frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \cdot \text{य} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \text{ल} + \text{गं}, \text{र} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \text{ल} + \text{गं}$$

यह इष्ट धरातल में एक सरल रेखा को पतित करने से जो सरलरेखा होती है उसका समीकरण है ।

(६) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण दिया है उसके पृष्ठ पर दिये हुए दो बिन्दुओं के बीच में परमाल्प रेखा का प्रमाण क्या होगा ।

कल्पना करो कि दिये हुए पृष्ठ के समीकरण पर से

ताल = प ताय + वा तार ऐसा समीकरण बनता है जहाँ प, और व, य, र के फल हैं । तो वैल = प वै य + व वैर ऐसा होगा इसका उत्थापन (५) वे उदाहरण में देने से

$$\text{वै } \int \text{ताचा} = \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैय} + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{व} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैर}$$

$$- \int \left\{ \left[\text{ता} \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प ता} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैय} + \left[\text{ता} \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{व ता} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैर} \right\}$$

इसलिये परमाल्प अन्तर में

$$\text{ता} \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \right] + \text{प ता} \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] = 0, \text{ और } \text{ता} \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{व ता} \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] = 0 \quad (१)$$

पृष्ठ के समीकरण पर से प और व का मान निकाल फिर जो रेखा परमाल्प अन्तर रूप होगी उसका समीकरण (१) के बल से निकाल सकते हो । जैसे

यदि पृष्ठ का समीकरण ल = फ (य^२ + र^२) ऐसा हो तो

यहाँ प = २ य फ' (य^२ + र^२), व = २र फ' (य^२ + र^२) और मान लो कि चा स्वतन्त्र राशि है तो (१) से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + २ \text{य फ}' (\text{य}^२ + \text{र}^२) \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = 0, \quad (२)$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{व} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + २र \text{फ}' (\text{य}^२ + \text{र}^२) \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = 0, \dots\dots (३)$$

(२) को र से और (३) को य से गुण कर अन्तर करने से

$$र \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{य} \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} \text{ यहाँ यदि } \text{श्रु}^२ = \text{य}^२ + \text{र}^२ \text{ और } \text{प} = \text{कोज्या}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{श्रु}}$$

$$\text{तो } र \text{ताय} - \text{य तार} = \text{ता} (\text{श्रु}^२ \text{ताष}) = 0$$

$$\cdot \text{श्रु}^२ \frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}} = \text{स्थिराङ्क} = \text{ग और } \text{श्रु} \frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}}$$

परन्तु श्रु $\frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}}$ यह उस कोण की ज्या है जो कि परमाल्प रेखा उस वक्र को

काटकर उत्पन्न करती है जो वक्र कि स्वयं घूम कर घन का पृष्ठ बनाया है । इसलिये इस कोण को यदि भ कहो तो

$$\text{ज्याभ} = \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}} = \frac{\text{ग}}{\sqrt{(\text{य}^२ + \text{र}^२)}} \quad ।$$

अथवा जब $\text{श्रु}^२ \frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}} = \text{ग}$ इसलिये

$$\text{श्रु}^२ \frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२} = \text{ग}^२ \frac{\text{ताचा}^२}{\text{ताश्रु}^२} = \text{ग}^२ \left(१ + \text{श्रु}^२ \frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२} + \frac{\text{ताल}^२}{\text{ताश्रु}^२} \right)$$

(७५ वॉ और ९८ वॉ प्रक्रम देखो)

$$\text{समशोधन से } \text{श्रु}^२ (\text{श्रु}^२ - \text{ग}^२) \frac{\text{ताप}^२}{\text{ताश्रु}^२} = \text{ग}^२ [१ + \text{फ}' \{ \text{र}^२ \}]$$

$$\text{इसलिये } \frac{\text{ताप}}{\text{ताशु}} = \frac{ग}{शु} \cdot \left\{ \frac{१ + फ (र)}{शु - ग} \right\} \quad (४)$$

कल्पना करो कि घनक्षेत्र गोल है और यह याम्योत्तर वृत्त के घूमने से बना है प्राक् कपाल में श्रितिज के ऊपर कहीं रविकेन्द्र और चन्द्रकेन्द्र दो दत्त बिन्दु हैं इन दोनों के भीतर गोलपृष्ठ पर परमाल्प रेखा खींचना है। कल्पना करो कि परमाल्प रेखा याम्योत्तर वृत्त के साथ भ कोण बनाती है।

ल अक्ष गोल में जहाँ लगा है वहाँ से परमाल्प रेखा और याम्योत्तर वृत्त के सम्पात तक एक महद्वृत्त अ अंश, और गोल का व्यासार्द्ध त्रि तो यहाँ यदि त्रिकोणमिति से १ व्यासार्द्ध में जैसा कि सर्वत्र इस ग्रन्थ भर में है ज्यासाधन करो तो $शु = त्रिज्याअ$.

$$\text{और ऊपर की युक्ति से ज्याभ} = \frac{ग}{शु} = \frac{ग}{त्रिज्याअ} \cdot ज्याभ \times ज्याअ = \frac{ग}{त्रि}$$

अर्थात् दोनों जीवाओं का घात सर्वदा स्थिर है जो कि महद्वृत्त में धर्म पाया जाता है इसलिये दोनों बिन्दुओं में होकर जो महद्वृत्त जायगा उसमें दोनों बिन्दुओं के भीतर जो चाप होगा वही परमात्प अन्तर होगा।

२७४। बहुत से प्रश्न ऐसे हैं जिन्हें कि साम्बन्धिक महत्तम और न्यूनतम कहते हैं। समझो कि दो सीमाओं के भीतर किसी फल का चलानयन करने से ऐसा मान \int स जानना है जो महत्तम वा न्यूनतम हो इस नियम से कि उन्हीं चलराशिओं के दूसरे फल का उन्हीं सीमाओं के भीतर चलमान \int स_१ एक दिये हुए स्थिर संख्या के तुल्य हो। जैसे वक्र के परिधि का मान स्थिर ग के तुल्य हो और फल महत्तम हो इस नियम से पता लगावो कि कौन सा वक्र है।

ऐसे प्रश्नों के उत्तर करने में \int स_१ को एक स्थिर संख्या अ से गुण कर \int स में जोड़ देते हैं फिर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करते हैं क्योंकि महत्तम वा न्यूनतम मान में

$$\text{वै} \left(\int स + अ \int स_१ \right) \text{ताय} = \text{वै} \int स \text{ताय} + अ \text{वै} \int स_१ \text{ताय} = ० + ०$$

क्योंकि प्रश्न के अनुसार \int स_१ ताय यह महत्तम वा न्यूनतम है इसलिये

वै \int सताय = ० और \int स_२ ताय = ग = स्थिराङ्क इसलिये वै \int स_२ ताय = ० । इसी तरह प्रश्न में यदि यह नियम हो कि \int सताय महत्तम वा न्यूनतम और \int स_२ताय और \int स_३ताय स्थिराङ्क तो \int स_२ताय को दूसरे स्थिराङ्क क से गुण कर ऊपर के योग में जोड़ कर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करो अर्थात् वै $\{ \int$ सताय + अ \int स_२ताय + क \int स_३ताय $\} = ०$ फिर प्रश्न के वश से अ, क स्थिराङ्क का ज्ञान भी हो जायगा ।

(१) उदाहरण । बहुत से वक्र हैं जिन सभी का परिधि मान स्थिर ग के तुल्य है तो बतावो कि किस का क्षेत्रफल सबसे बड़ा होगा ।

$$\text{यहां प्रश्न की बोली से } \int \text{स_२ताय} = \int \sqrt{(१ + \text{य}^२)} \text{ताय} = \text{ग},$$

$$\int \text{स ताय} = \int \text{र ताय}$$

इस लिये \int शा ताय = $\int \{ \text{र} + \text{अ} \sqrt{(१ + \text{प}^२)} \}$ ताय और
शा = र + अ $\sqrt{(१ + \text{प}^२)}$ फिर २७३ वे प्रक्रम और २७५ वे प्रक्रम से

$$\text{ताशा} = \text{तार} + \frac{\text{अप}}{\sqrt{(१ + \text{प}^२)}} \text{ताय और, ना} = १ \text{ पा} = \frac{\text{अप}}{\sqrt{(१ + \text{प}^२)}} \text{ वा} = ०$$

$$\text{इस लिये शा} = \text{पाप} + \text{स्थि और } \text{र} + \text{अ} \sqrt{(१ + \text{प}^२)} = \frac{\text{अप}^२}{\sqrt{(१ + \text{प}^२)}} + \text{ग}_२$$

$$\text{समशोधन से } \text{र} - \text{ग}_२ = - \frac{\text{अ}}{\sqrt{(१ + \text{प}^२)}} \text{ इस लिये } \text{प} = \frac{\sqrt{\{ \text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_२)^२ \}}}{\text{र} - \text{ग}_२} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{और ताय} = \frac{(\text{र} - \text{ग}_२) \text{तार}}{\sqrt{\{ \text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_२)^२ \}}} \text{ चलानयन से}$$

$$\text{य} - \text{ग}_२ = - \sqrt{\{ \text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_२)^२ \}}$$

इस लिये $(\text{य} - \text{ग}_२)^२ + (\text{र} - \text{ग}_२)^२ = \text{अ}^२$ परन्तु यह वृत्त का समीकरण है इस लिये सब से बड़ा वृत्त फल का होगा ।

यह प्रश्न और २७५ प्रक्रम का (२) प्रश्न दोनों सन् १६९६ ई० में जान बर्नली (John Bernoulli) के निकाले हुए हैं और जान बर्नली ने इन के उत्तर को भी वैशेषिक कलन की रीति से निकाला । वैशेषिक कलन के प्रचार के जड़ भी यही दोनों प्रश्न हैं ।

२५५ प्रक्रम का (२) जो प्रश्न है उसे ऐसे भी कह सकते हो कि एक ऐसी पतली कांच की टेढ़ी पोली नली जिसके दोनों शिरे खुले हों बनाओ जिसके ऊपर के शिरे पर यदि एक गुरु परमाणु पदार्थ छोड़ दे तो वह परमाणु काल में नीचे के शिरे पर पहुँच जाय ।

इस प्रश्न को अङ्गरेज़ी में ब्याचिस्टोक्रोन प्रश्न का (Problem of the brachistochrone) कहते हैं ।

(२) उदाहरण । य अक्ष के चारो ओर एक वक्र को घुमाकर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाया चाहते हैं जो य अक्षगत नियत दो बिन्दुओं पर जाय और जिस का पृष्ठफल स्थिर ग के तुल्य और घनफल महत्तम हो तो उस वक्र का समीकरण बताओ ।

$$\text{यहां पृष्ठफल} = 2\pi \int r\sqrt{(1+p)} \text{ ताय} = \text{ग और घनफल} = \pi \int r^3 \text{ ताय}$$

इस लिये ऊपर की युक्ति से

$$\pi \int r^3 \text{ ताय} + 2\pi \text{अ} \int r\sqrt{(1+p^2)} \text{ ताय यह}$$

$$\text{वा} \int r^3 \text{ ताय} + 2 \text{अ} \int r\sqrt{(1+p^2)} \text{ ताय} = \int \text{शा ताय}$$

यह महत्तम होगा

इस लिये शा = $r^3 + 2\text{अ} r\sqrt{(1+p^2)}$ और

$$\text{ताशा} = 2 r \text{ तार} + 2 \text{अ तार} \sqrt{(1+p^2)} + \frac{2 \text{अ} r p}{\sqrt{(1+p^2)}} \text{ ताय}$$

$$\text{इस लिये मा} = 0, \text{ ना} = 2r + 2 \text{अ} \sqrt{(1+p^2)} \text{ और पा} = \frac{2 \text{अ} r p}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\text{इस लिये मा} = 0, \text{ ना} = 2r + 2 \text{अ} \sqrt{(1+p^2)} \text{ और पा} = \frac{2 \text{अ} r p}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\text{इस लिये शा} = \text{पा} \times \text{प} + \text{स्थि} = \frac{2 \text{अ} r p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} + \text{ग},$$

$$= r^3 + 2 \text{अ} r \sqrt{(1+p^2)}$$

$$\text{ग}_1 - r^3 = 2 \text{अ} r \left\{ \sqrt{(1+p^2)} - \frac{p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} \right\} = \frac{2 \text{अ} r}{\sqrt{(1+p^2)}} \cdot (1) \quad (1)$$

यहां प्रश्न के अनुसार वक्र य अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है इस लिये उन स्थानों में $r = 0$ इस का उत्थापन (१) में देने से $\text{ग}_1 = 0$ इस लिये

$$\frac{२अर}{\sqrt{(१+प^२)}} + र^२ = र \left\{ र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}} \right\} = ०$$

इस में यदि $र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}} = ०$ तो $\frac{४अ^२}{१+प^२} = र^२$

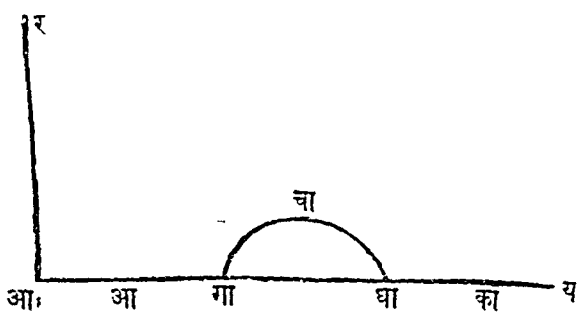
∴ $प^२ + १ = \frac{४अ^२}{र^२}$ इसलिये $प = \frac{\sqrt{४अ^२-र^२}}{र} = \frac{तार}{ताय}$

इसलिये $\frac{र}{\sqrt{(४अ^२-र^२)}} = \frac{ताय}{तार} \cdot \frac{र तार}{\sqrt{(४अ^२-र^२)}} = ताय$

— $\sqrt{(४अ^२-र^२)} = य-ग_२$, $र^२ + (य-ग_२)^२ = ४अ^२$

यह एक वृत्त का समीकरण है जिस का केन्द्र य अक्ष पर और व्यासार्ध = —२अ है ।

कल्पना करो कि य अक्ष में आ, और का बिन्दु नियत है जिनके ऊपर हो कर प्रश्न के अनुसार वक्र को जाना चाहिये । तो यदि आ, का के व्यास मान कर एक गोल बनाया जाय और प्रश्न में दिया हुआ स्थिर पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बराबर हो तो इस गोल में प्रश्नोक्त सब आलाप घट जायँगे परन्तु यदि दिया हुआ पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बराबर न हो किन्तु य अक्ष में गा, और घा बिन्दु जो हैं उन के अन्तर को व्यास मान कर जो गोल होगा उसके पृष्ठफल के बराबर हो तो ऐसी स्थिति में ऐसा समझना चाहिये कि आगा, य अक्ष का भाग, गाघा व्यास पर बना गाचाघा वृत्तार्ध और य अक्ष का घाका भाग



इन तीनों को एक में मिला देने से आगाचाघा का यह जो आ और का दो नियत बिन्दु-आ पर गया हुआ यर धरा-तल में एक वक्र है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से अभीष्ट घनक्षेत्र होगा जिसका

पृष्ठफल दिये हुए पृष्ठफल के समान और घनफल महत्तम होगा ।

इसी तरह यदि आका से गाघा बड़ा हो तो भी समझ लेना चाहिये ।

ऊपर का समीकरण भी दिखलाता है कि जब $र \left\{ र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}} \right\} = ०$ तो $र = ०$ यह भी एक वक्र का समीकरण होगा जो कि यहा पर आगा और घाका सरल रेखा के समान होगा ।

इस प्रकार से बुद्धिमान को चाहिये कि इस ग्रन्थ में दिखलाये गये जो सिद्धान्त हैं उनके अभ्यास से नाना प्रकार की कल्पना अपने बुद्धिबल से करे ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\alpha \cos \theta} f(\theta, \rho) \theta \rho \, d\rho \, d\theta$ इसमें क्रम को बदलो

उत्तर $\int_0^{2\alpha} \int_0^{\cos^{-1} \frac{\rho}{2\alpha}} \frac{\theta}{2\alpha} f(\theta, \rho) \theta \rho \, d\theta \, d\rho$

२। $\int_0^1 \int_y^{2-y} f(y, r) \, dy \, dr$ तार ताय इसमें क्रम को बदल देना है ।

उ० $\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-r}}^r f(y, r) \, dy \, dr$

३। $\int_0^{2\alpha} \int_{\frac{y^2}{4\alpha}}^{2\alpha-y} f(y, r) \, dy \, dr$ इसमें क्रम को बदलना है ।

उ० $\int_0^{\alpha} \int_0^{2\sqrt{\alpha r}} f(y, r) \, dy \, dr + \int_{\alpha}^{2\alpha} \int_0^{2\alpha-r} f(y, r) \, dy \, dr$

४। $\int_0^{\alpha} \int_0^{y+2\alpha} \frac{f(y, r)}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} \, dy \, dr$ तार ताय इसका क्रम बदलने से कैसा रूप होगा ।

उ० $\int_0^{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{f(y, r)}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}} \, dy \, dr + \int_{\alpha}^{2\alpha} \int_0^{\alpha} f(y, r) \, dy \, dr$
 $+ \int_{2\alpha}^{3\alpha} \int_{r-2\alpha}^{\alpha} f(y, r) \, dy \, dr$

५। यदि $y = \alpha \cos \theta$, और $r = k \cos \theta$

तो सिद्ध करो कि बदलने से $\int \int$ तार ताय इस द्विगुण चल का

$\pm \int \int$ अक ज्याप, कोज्याप, ताय ताय, ऐसा रूप होगा ।

६। यदि $y = v \cos \theta + s \sin \theta$,

और $r = v \cos \theta - s \sin \theta$ तो सिद्ध करो कि

$$\iint \text{फ}(y, r) \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(1-y^2-r^2)}} = \iint \text{फ}_r (v, \text{श}) \frac{\text{ताश ताय}}{\sqrt{(1-v^2-\text{श}^2)}}$$

७। सिद्ध करो कि

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \text{फ}(a^2 y^2 + k^2 r^2) \text{तार ताय} \frac{\pi}{4ak} \int_0^\infty \text{फ}(y) \text{ताय}$$

८। $\iint \frac{1}{\sqrt{(y^2 + 2y \cos \theta + r^2)}} \text{तार ताय}$ इसको अक्षीय भुज-

युग्म के रूप में बदलो और तब दिखलाओ कि यदि y और r की सीमा ० और ∞ हों तो द्विगुण चल का मान $\frac{a}{2 \cos \theta}$ होगा ।

९। सिद्ध करो कि

$$\int_0^a \int_0^k \frac{\text{तार ताय}}{(g^2 + y^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{g} \text{स्प}^{-1} \frac{\text{अक}}{g \sqrt{(a^2 + k^2 + g^2)}}$$

१०। अक्षीय भुजयुग्म के रूप में बदल कर सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{अ तार ताय}}{(y^2 + r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} (y^2 + r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{a + a}$$

११। यदि $y = \text{श्रुकोज्या} \phi + \text{अज्या} \phi$ और $r = \text{श्रुज्या} \psi + \text{अकोज्या} \psi$ तो $\iint \text{फ}(y, r) \text{तार ताय}$ इसको बदलने से कैसा रूप होगा ।

२० $\iint \text{फ}(\text{श्रुकोज्या} \phi + \text{अज्या} \phi, \text{श्रुज्या} \psi + \text{अकोज्या} \psi) (\text{अज्या} 2\psi - \text{श्रु}) \text{तार ताय}$

१२। सिद्ध करो कि $\iint \frac{\sqrt{(1-y^2-r^2)}}{\sqrt{(1+y^2+r^2)}} \text{तार ताय} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

यहां चलानयन y , और r के सब धनमानों के भीतर किया गया है और $y^2 + r^2 < 1$ ।

१३। सिद्ध करो कि

$$\iiint \frac{\text{ताय तार ताल}}{\sqrt{(1-y^2-r^2-l^2)}} = \frac{\pi \frac{n+1}{2}}{2^n \text{मा} \left(\frac{n+1}{2} \right)}$$

जहां चलराशियों की संख्या n है और चलानयन सब धन मान के भीतर किया गया है जो कि $y^2 + r^2 + l^2 < 1$ इस नियम से सिद्ध होते हैं ।

१४। सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या } \frac{1}{2} \text{ य} = \frac{c}{\pi} \left(\frac{\text{ज्याय}}{2^2-1} - \frac{2\text{ज्या}2\text{य}}{2^4-1} + \frac{3\text{ज्या}3\text{य}}{2^6-1} - \frac{4\text{ज्या}4\text{य}}{2^8-1} + \dots \right)$$

१५। सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या } \frac{1}{2} \text{ य} = \frac{c}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\text{कोज्याय}}{2^2-1} - \frac{1}{2} \frac{\text{कोज्या}2\text{य}}{2^4-1} + \dots \right\}$$

१६। एक मनुष्य से ३० हाथ के अन्तर पर दक्षिण ओर उस का पोसा तीतर था जैसे ही मनुष्य पूर्व की ओर चलने लगा वैसे ही तीतर भी मनुष्य के पास पहुंचने के लिये चला तो बतावो कि प्रथम स्थान से पूर्व की ओर कितनी दूरी पर मनुष्य और तीतर से भेंट हुई। इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि प्रतिक्षण में मनुष्य से दूना तीतर चलता था।

उ० २० हाथ ।

१७। सौ हाथ ऊँचे एक तालवृक्ष के ऊपर एक कौआ बैठा था उसने पेड़ की जड़ से दक्षिण ओर २५ हाथ के अन्तर पर दक्षिण ही की ओर जाता एक मूसे को देख कर उसकी दूनी गति से पकड़ने के लिये झपटा तो बतावो कि पेड़ की जड़ से कितने हाथ पर कौआ ने मूसे को पकड़ा।

उ० १८३ $\frac{1}{3}$ हाथ ।

१८। पृथ्वी से १०,००० हाथ ऊँचे पर जा कर एक कवूतर ने पृथ्वी पर ठीक अपने पैर के नीचे चावलों को देख कर एक पल में २०० हाथ की गति से उतरने लगा परन्तु उस समय पूर्व की वायु एक चाल से बहती थी जिसके कारण एक पल की गति कवूतर की पूर्व की ओर भी १०० हाथ हो गई तो बतावो कि कितने पल में वह कवूतर पृथ्वी पर पहुँचा।

उ० ६६ $\frac{2}{3}$ पल

१९। २६७ प्रक्रम के (६) वें प्रश्न में मोर और सांप के योग से वक्र त्रिवाहु होगा उसका क्षेत्रफल क्या होगा। उ०, फल = $\frac{(२ इ३ क - इ३ग) अ}{४गु^२ - १}$

२०। १६ वें प्रश्न में मनुष्य और तीतर के योग से जो वक्र त्रिवाहु होगा उसका फल क्या होगा।

उ० फल = १२०

२१। १७ वें प्रश्न में काक और मूस के योग से जो वक्र त्रिवाहु होगा उसका फल बतावो।

उ० फल = $\frac{\text{कोटि}(२गु^२ \times \text{भुज} + गु \times \text{कर्ण})}{४गु^२ - २}$

$$\text{यहां गु} = \frac{\text{काक गति}}{\text{मूस की गति}}$$

२२। १८ वें प्रश्न में कपोत जिस वक्र में पृथ्वी पर उतरेगा उससे और कपोत की उँचाई १०,००० से जो चापक्षेत्र होगा उसका क्या फल होगा।

$$\text{उ० फल} = \frac{२(१०,०००)^२}{३}$$

२३। एक वक्र ऐसा बतावो जिसमें $\int \frac{p^3 r}{1+p^2}$ नाय इसका मान न्यूनतम हो।

$$\text{उ० } r = \frac{g(1+p^2)^2}{p^3}, \text{ य} = gr + g\left(\frac{३}{४p^4} + \frac{१+p^2}{p^2} + \text{ला } p\right)$$

२४। जिस सूच्याकार शङ्कु के पृष्ठ का ल = $३\sqrt{(y^2 + r^2)} = ३$ श्रु यह समीकरण है उसके पृष्ठ पर दो दिये हुए विन्दुओं के बीच में जो परमालप रेखा होगी उसका समीकरण बतावो। उ० श्रु = गले $\left\{ \frac{p + gr}{\sqrt{(1 + ३^2)}} \right\}$

२५। वक्र का चाप और फल स्थिर है और यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका घनफल महत्तम है तो वक्र का पता लगावो। उ० यहां शा = $\pi r^2 + कर + अ\sqrt{(1+p^2)}$ ऐसा होगा फिर इस पर से २७६ प्रक्रम की क्रिया कर वक्र का समीकरण जानो।

२६। सब वक्रों में क्षेत्रफल स्थिर है तो बतावो किसकी परिधि सब से छोटी होगी। उ० वृत्त की।

२७। वक्र का चाप स्थिर है और यह य अक्ष के चारो ओर घूम कर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका न्यूनतम पृष्ठफल है तो बतावो वह कौन सा वक्र है। उ० कातन्वली (Catenary)

२८। एक नींव में जड़ से दो शाखा फूटी थी जिन का झुकाव ३०° था। पहली शाखा पर जड़ से ८ हाथ के अन्तर पर एक मैना बैठी थी और दूसरी शाखा पर जड़ से $३ + ४\sqrt{३}$ हाथ के अन्तर पर एक कीड़ा बैठा था। यह जैसे ही शाखा के ऊपर की ओर चलने लगा वैसे ही इस पर मैना झपटी तो बतावो कि पहले स्थान से कितनी दूर जाने पर मैना ने उस कीड़े को पकड़ लिया। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि कीड़े से मैना दूनी चलती थी।

$$\text{उ० } ४\frac{१}{३} \text{ हाथ}$$

२९। एक महाजन ने एक ज्यौतिषी से प्रसन्न होकर कहा कि कल आप एक पीतर का डब्बा किसी से बनवा कर लेते आइयेगा जो कि ठीक मेरी रूमाल से चारो ओर बंध जाय तो मैं उस डब्बे को अशर्कियाँ से भर कर आपको सङ्कल्प करूँगा । बतावो ज्यौतिषी कैसा डब्बा बनावे जिसमें उसे बहुत अशर्कियाँ मिलें । इतना यहां पर हम जानते हैं कि उस धनी के रूमाल की लम्बाई साढ़ेपांच हाथ और चौड़ाई पौने दो हाथ थी ।

उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{2}{3}$ हो तो पौने दो हाथ के व्यास का जो एक गोलाकार डब्बा बनेगा उस में सबसे अधिक अशर्कियाँ भरेगी ।

हरिगीत

रखि हैं कृपालुद्विवेदिसुतकृत सुकृतिजन मन लाय के ।
 चलराशिकलन वरासि कल नवराशि चरममिलाय के ॥
 धरि शान जौ बुद्धिबल गरवदलि सकल खलहि हिलाय के ।
 धन धान मान महान लहि है होय प्रिय नृप राय के ॥
 इतिश्रीकृपालुदत्तसुतश्रीसुधाकरद्विवेदिकृतं चलराशिकलनं
 सम्पूर्णम् ॥

सित सावन शनि तेरस वरस विरोधि ।
 पूरन कियेउ सुधाकर सब विधि शोधि ॥

